

# Глава 1

## Векторные поля Киллинга

В разделе ?? были рассмотрены геометрические структуры на многообразии, которые инвариантны относительно действия некоторой группы преобразований. Вопрос ставился так. Пусть задана группа преобразований  $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ , и требуется найти такие структуры, например, тензорные поля, которые инвариантны относительно этих преобразований. Обратная задача нахождения группы преобразований, которую допускает заданная геометрическая структура на многообразии  $\mathbb{M}$  также очень важна.

Изучение преобразований, которые сохраняют метрику пространства-времени играет исключительно важную роль в математической физике. Достаточно сказать, что с такими преобразованиями связаны наиболее важные законы сохранения. В настоящей главе мы рассмотрим (псевдо-)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  и найдем условия, при которых метрика инвариантна относительно действия группы преобразований  $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ . Дадим определение векторных полей Киллинга, которые являются генераторами локальных симметрий метрики, а также изучим некоторые из их свойств. Будет доказана теорема о том, что, если (псевдо-)риманово многообразие обладает максимально возможной группой симметрии, то это – пространство постоянной кривизны.

### 1.1 Изометрии и инфинитезимальные изометрии

Рассмотрим  $n$ -мерное (псевдо-)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  с метрикой  $g(x) = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha \otimes dx^\beta$ ,  $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n-1$ , и соответствующей связностью Леви-Чивиты  $\Gamma$ .

**Определение.** Диффеоморфизм

$$\iota : \mathbb{M} \ni x \mapsto x' = \iota(x) \in \mathbb{M}$$

называется *изометрией* или *движением* многообразия  $\mathbb{M}$ , если он сохраняет метрику,

$$g(x) = \iota^*g(x'), \tag{1.1}$$

где  $\iota^*$  – возврат отображения  $\iota$ . □

В настоящей главе, для простоты, мы не будем использовать знак тильды для обозначения компонент связности Леви-Чивиты, т.к. аффинная связность общего вида с кручением и неметричностью использоваться не будет.

Из условия инвариантности метрики (1.1) следует инвариантность скалярного произведения векторов. Пусть  $X, Y \in \mathbb{T}_x(\mathbb{M})$  – два произвольных вектора из касательного пространства в точке  $x \in \mathbb{M}$ . Тогда справедливы равенства:

$$g(X, Y)|_x = (\iota^* g)(X, Y)|_x = g(\iota_* X, \iota_* Y)|_{\iota(x)},$$

которое эквивалентно определению (1.1). Первое равенство следует из определения (1.1), а второе вытекает из определения возврата отображения (??).

Поскольку изометрия сохраняет метрику, то она сохраняет также связность Леви-Чивиты, соответствующий тензор кривизны, экстремали и, вообще, все геометрические объекты, которые определяются только метрикой.

Запишем отображение (1.1) в координатах. Пусть обе точки  $x$  и  $x'$  принадлежат одной координатной окрестности и имеют, соответственно, координаты  $x^\alpha$  и  $x'^\alpha$ . Тогда изометрия  $\iota$  в координатах запишется в виде условия

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} g_{\gamma\delta}(x'), \quad (1.2)$$

связывающего компоненты метрики в различных точках многообразия. Это условие по виду совпадает с правилом преобразования компонент метрики при преобразовании координат (??). Разница заключается в следующем. При преобразовании координат мы считаем, что одной и той же точке  $x \in \mathbb{M}$  соответствует два набора координат  $\{x^\alpha\}$  и  $\{x^{\alpha'} := x'^\alpha\}$  в двух различных системах координат. При рассмотрении изометрий  $x$  и  $x'$  – это две различные точки одного и того же многообразия  $\mathbb{M}$ , и равенство (1.2) связывает значения компонент метрики в этих точках.

**Предложение 1.1.1.** *Множество всех изометрий данного (псевдо-)риманова многообразия  $(\mathbb{M}, g)$  является группой, которую обозначим  $\mathbb{I}(\mathbb{M}) \ni \iota$ .*

*Доказательство.* Две последовательные изометрии также являются изометрией. Тождественное отображение многообразия  $\mathbb{M}$  является изометрией и представляет собой единицу группы. У каждого диффеоморфизма  $\iota$  есть обратной диффеоморфизм  $\iota^{-1}$ , который является обратной изометрией.  $\square$

Если метрика на многообразии задана, т.е. определены значения ее компонент во всех точках  $x$ , то соотношение (1.2) представляет собой уравнение на функции  $x'(x)$ , которые определяют изометрию. В общем случае это уравнение не имеет решений и у соответствующего (псевдо-)риманова многообразия нет никаких нетривиальных изометрий. В этом случае группа изометрий состоит из одного единичного элемента. Чем шире группа изометрий, тем уже класс соответствующих (псевдо-)римановых многообразий.

**Пример 1.1.1.** Евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  с евклидовой метрикой  $\delta_{\alpha\beta}$  допускает группу изометрий, которая состоит из преобразований неоднородной группы вращений  $\mathbb{IO}(n, \mathbb{R})$ ,  $\dim \mathbb{IO}(n, \mathbb{R}) = \frac{1}{2}n(n+1)$ , состоящей из вращений, сдвигов и отражений.  $\square$

Группа изометрий  $\mathbb{I}(\mathbb{M})$  может быть дискретной или группой Ли.

**Определение.** Если группа изометрий  $\mathbb{I}(\mathbb{M})$  является группой Ли, то имеет смысл говорить об инфинитезимальных преобразованиях (см. раздел ??). В этом случае мы говорим об *инфinitезимальных изометриях*. Каждая инфинитезимальная изометрия генерируется некоторым достаточно гладким векторным полем, которое называется *векторным полем Киллинга*.  $\square$

**Замечание.** Дискретные изометрии (псевдо-)риманова многообразия, например, отражения, не генерируются никакими векторными полями.  $\square$

Запишем условие инвариантности метрики относительно инфинитезимальных преобразований из группы изометрий в координатах. В разделе ?? было показано, что каждое векторное поле генерирует однопараметрическую группу преобразований, которая называется экспоненциальным отображением. Формально условие инвариантности метрики записывается в виде равенства нулю производной Ли вдоль векторного поля Киллинга  $K = K^\alpha \partial_\alpha$  от метрики [?]

$$\mathcal{L}_K g = 0. \quad (1.3)$$

Используя явное выражение для производной Ли (??), это уравнение в локальной системе координат принимает вид

$$\nabla_\alpha K_\beta + \nabla_\beta K_\alpha = 0, \quad (1.4)$$

где  $K_\alpha := K^\beta g_{\beta\alpha}$ , а ковариантная производная

$$\nabla_\alpha K_\beta = \partial_\alpha K_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma K_\gamma$$

строится по символам Кристоффеля  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ .

**Определение.** Уравнение (1.4) называется *уравнением Киллинга*, а интегральные кривые полей Киллинга называются *траекториями Киллинга*. Если  $K = K^\alpha \partial_\alpha$  – векторное поле Киллинга, то ему соответствует 1-форма  $K = dx^\alpha K_\alpha$ , где  $K_\alpha := K^\beta g_{\beta\alpha}$ , которая называется *формой Киллинга*, и для которой мы сохранили то же обозначение.  $\square$

На любом (псевдо-)римановом многообразии  $(\mathbb{M}, g)$  уравнения Киллинга (1.3) всегда имеют тривиальное решение  $K = 0$ . Если уравнения Киллинга имеют только тривиальное решение, то в этом случае нетривиальные непрерывные изометрии отсутствуют.

Траектории Киллинга  $\{x^\alpha(t)\} \in \mathbb{M}$ , где  $t \in \mathbb{R}$ , определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^\alpha = K^\alpha. \quad (1.5)$$

Если траектория Киллинга при  $t = 0$  проходит через точку  $p = \{p^\alpha\} \in \mathbb{M}$ , то при малых  $t$  она имеет вид

$$x^\alpha(t) = p^\alpha + t K^\alpha(p) + o(t). \quad (1.6)$$

Если в некоторой точке векторное поле Киллинга равно нулю, то эта точка остается неподвижной, т.е. является стационарной точкой группы изометрий. Поскольку изометрии определены для всего многообразия  $\mathbb{M}$  и образуют группу, то векторные поля Киллинга обязаны быть полными, т.е. параметр  $t$  должен меняться на всей вещественной прямой  $\mathbb{R}$ .

Если для (псевдо-)риманова многообразия  $(\mathbb{M}, g)$  известно векторное поле Киллинга, то оно определяет не только инфинитезимальные изометрии, но и всю однопараметрическую группу диффеоморфизмов. Для этого нужно найти интегральные кривые  $x(t)$ , проходящие, через все точки многообразия  $p \in \mathbb{M}$ . Если  $x(0) = p$ , то каждому значению  $t \in \mathbb{R}$  соответствует диффеоморфизм

$$\iota : \mathbb{M} \ni p \mapsto x(t) \in \mathbb{M}.$$

Уравнения для векторных полей Киллинга в ковариантной форме (1.4) можно переписать в частных производных,

$$\partial_\alpha K_\beta + \partial_\beta K_\alpha - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma K_\gamma = 0.$$

В моделях математической физики часто ставится задача нахождения векторов Киллинга для заданной метрики на многообразии. Для решения этой задачи бывает удобнее использовать контравариантные компоненты векторов Киллинга, для которых уравнение Киллинга принимает вид

$$g_{\alpha\gamma}\partial_\beta K^\gamma + g_{\beta\gamma}\partial_\alpha K^\gamma + K^\gamma\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.7)$$

Полученное уравнение линейно по компонентам метрики и компонентам векторов Киллинга. Отсюда сразу следует, что две метрики, которые отличаются постоянным множителем, имеют один и тот же набор векторов Киллинга. Кроме того, векторное поле Киллинга определено с точностью до умножения на произвольную постоянную, отличную от нуля. В частности, если  $K^\alpha$  – векторное поле Киллинга, то и  $-K^\alpha$  также является полем Киллинга. Если независимых векторных полей Киллинга несколько, то любая линейная комбинация этих полей также является полем Киллинга. То есть множество векторных полей Киллинга образует линейное пространство над полем вещественных чисел, которое является подпространством в множестве всех векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ .

**Замечание.** Векторные поля Киллинга не выдерживает умножения на функцию. Поэтому они не образуют  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ -модуль в отличие от множества всех векторных полей  $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ .  $\square$

Уравнения Киллинга (1.4) линейны по векторам Киллинга, но не линейны по метрике. Допустим, что метрика  $g_{\alpha\beta}(x, t)$  зависит от некоторого параметра  $t \in \mathbb{R}$ , и для каждого значения  $t$  уравнения Киллинга выполнены при фиксированном векторном поле Киллинга. Тогда разность метрик для различных значений параметра,  $g_{\alpha\beta}(x, t_2) - g_{\alpha\beta}(x, t_1)$ , в общем случае не будет удовлетворять уравнениям Киллинга. Отсюда следует, что производная  $\partial_t g_{\alpha\beta}$ , как правило, не будет симметричной метрикой, даже если метрика  $g_{\alpha\beta}(x, t)$  симметрична для всех значений  $t$ .

С каждым полем Киллинга как и с произвольным векторным полем связана однопараметрическая группа преобразований, которая в данном случае сохраняет метрику. Произвольная линейная комбинация векторов Киллинга ввиду линейности уравнения Киллинга (1.4) снова дает вектор Киллинга. То есть поля Киллинга образуют векторное пространство над полем вещественных чисел. В этом векторном пространстве можно ввести билинейную операцию. Простые вычисления показывают, что коммутатор двух векторных полей Киллинга  $K_1$  и  $K_2$  снова дает поле Киллинга:

$$\mathsf{L}_{[K_1, K_2]}g = \mathsf{L}_{K_1} \circ \mathsf{L}_{K_2}g - \mathsf{L}_{K_2} \circ \mathsf{L}_{K_1}g = 0,$$

Отсюда следует, что векторные поля Киллинга образуют алгебру Ли  $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$  над полем вещественных чисел, которая является подалгеброй алгебры Ли множества всех векторных полей,  $\mathfrak{i}(\mathbb{M}) \subset \mathcal{X}(\mathbb{M})$ . Эта алгебра является алгеброй Ли группы изометрий  $\mathbb{I}(\mathbb{M})$ .

**Предложение 1.1.2.** Пусть (псевдо-)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  имеет  $N \leq \dim \mathbb{M}$  отличных от нуля коммутирующих между собой и линейно независимых

векторных полей Киллинга  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Тогда существует такая система координат, в которой все компоненты метрики не зависят от  $N$  координат, соответствующих траекториям Киллинга. Обратно. Если в некоторой системе координат компоненты метрики не зависят от  $N$  координат, то метрика  $g$  допускает по крайней мере  $N$  коммутирующих между собой векторных полей Киллинга.

*Доказательство.* В разделе ?? была построена специальная система координат, связанная с произвольным векторным полем, отличным от нуля. Применительно к векторным полям Киллинга  $K_i$  это означает, что существует такая система координат  $(x^1, \dots, x^n)$ , в которой каждое поле Киллинга имеет только одну постоянную компоненту,  $K_i = \partial_i$ . В этой системе координат уравнение (1.7) для каждого поля Киллинга принимает особенно простой вид

$$\partial_i g_{\alpha\beta} = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Это значит, что все компоненты метрики не зависят от координат  $x^i$ . В этой системе координат траектории Киллинга определяются уравнениями

$$\dot{x}^i = 1, \quad \dot{x}^\mu = 0, \quad \mu \neq i.$$

Отсюда следует, что координатные линии  $x^i$  являются траекториями Киллинга.  $\square$

Согласно сформулированной теореме, в предельном случае, когда количество коммутирующих полей Киллинга равно размерности многообразия,  $N = n$ , существует такая система координат, в которой все компоненты метрики постоянны.

**Пример 1.1.2.** В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  в декартовой системе координат  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , компоненты метрики постоянны,  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ . Эта метрика допускает  $n$  векторных полей Киллинга  $K_\alpha := \partial_\alpha$ , которые соответствуют трансляциям. Все координатные оси являются траекториями Киллинга.  $\square$

Если риманово многообразие  $(M, g)$  имеет два или более некоммутирующих векторных полей Киллинга, то это отнюдь не означает, что существует такая система координат, в которой компоненты метрики не зависят от двух или более координат.

**Пример 1.1.3.** Рассмотрим двумерную сферу  $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ . Пусть метрика  $g$  на сфере индуцирована вложением. Риманово пространство  $(\mathbb{S}^2, g)$  имеет три векторных поля Киллинга, соответствующих  $\mathbb{SO}(3)$  вращениям евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ . Легко понять, что на сфере не существует локальной системы координат, в которой компоненты метрики не зависели бы от двух координат. Действительно, это означает, что в данной системе координат компоненты метрики постоянны, и, следовательно, кривизна равна нулю. Но это невозможно, поскольку кривизна сферы постоянна и отлична от нуля.  $\square$

В общей теории относительности мы предполагаем, что пространство-время является псевдоримановым многообразием с метрикой лоренцевой сигнатуры. Используя понятие векторного поля Киллинга, можно дать инвариантное

**Определение.** Пространство-время или его область называются *статическими*, если на них существует времениподобное векторное поле Киллинга.  $\square$

Векторные поля Киллинга определены глобально и удовлетворяют уравнениям Киллинга на всем  $M$ . В то же время уравнения Киллинга – это локальный объект, в том смысле, что они определены в каждой окрестности и могут иметь нетривиальные решения только на некотором подмногообразии  $U \subset M$ .

**Пример 1.1.4.** Рассмотрим гладкую замкнутую двумерную поверхность  $\mathbb{M}$ , вложенную в трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ , как показано на рис. 1.1. Отличительной особенностью этой поверхности является то, что ее нижняя часть является плоской. Пусть метрика на  $\mathbb{M}$  индуцирована вложением  $\mathbb{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ . Тогда уравнения Киллинга в нижней части поверхности легко интегрируются, как и на евклидовой плоскости. Однако найденные нетривиальные решения не будут в общем случае нетривиальными во всех точках  $\mathbb{M}$ . Действительно, верхняя часть поверхности может быть искривлена так, что уравнения Киллинга на ней имеют только тривиальное решение. Следовательно, векторные поля Киллинга могут быть нетривиальны только на части многообразия  $\mathbb{M}$ . Заметим, что в рассматриваемом примере траектории Киллинга не являются полными.  $\square$

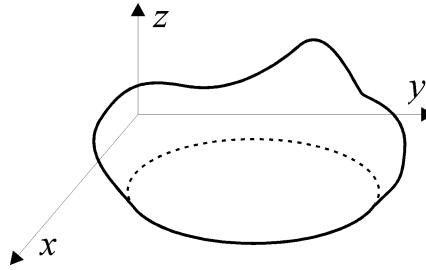


Рис. 1.1: Двумерная поверхность,ложенная в трехмерное евклидово пространство. Нижняя часть поверхности является плоской.

## 1.2 Свойства векторных полей Киллинга

Векторные поля Киллинга обладают рядом замечательных свойств. Начнем с простейших.

**Предложение 1.2.1.** *Длина вектора Киллинга остается постоянной вдоль траектории Киллинга:*

$$\mathcal{L}_K K^2 = \nabla_K K^2 = K^\alpha \partial_\alpha K^2 = 0. \quad (1.8)$$

*Доказательство.* Свернем уравнения Киллинга (1.4) с  $K^\alpha K^\beta$ :

$$2K^\alpha K^\beta \nabla_\alpha K_\beta = K^\alpha \nabla_\alpha K^2 = K^\alpha \partial_\alpha K^2 = 0. \quad \square$$

**Следствие.** Если векторные поля Киллинга существуют на лоренцевом многообразии, то они имеют определенную ориентацию: времениподобную, светоподобную или пространственноподобную.  $\square$

Сравним траектории Киллинга с экстремалями [?].

**Предложение 1.2.2.** *Пусть  $(\mathbb{M}, g)$  – (псевдо-)риманово многообразие с векторным полем Киллинга  $K$ . Траектории Киллинга являются экстремалями тогда и только тогда, когда их длина постоянна на  $\mathbb{M}$ ,  $K^2 = \text{const}$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим траектории Киллинга  $x^\alpha(t)$ , которые определяются системой уравнений

$$\dot{x}^\alpha = K^\alpha. \quad (1.9)$$

Длина дуги траектории Киллинга

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta dt^2 = K^2 dt^2$$

постоянна вдоль траектории, т.е. параметр  $t$  пропорционален длине и, следовательно, является каноническим. Дифференцируя уравнение (1.9) по параметру  $t$ , получим равенство

$$\ddot{x}^\alpha = \partial_\beta K^\alpha \dot{x}^\beta = (\nabla_\beta K^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha K^\gamma) \dot{x}^\beta,$$

которое перепишем в виде

$$\ddot{x}^\alpha = K^\beta \nabla_\beta K^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma. \quad (1.10)$$

Уравнения Киллинга позволяют переписать первое слагаемое в правой части в виде

$$K^\beta \nabla_\beta K^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\beta K^2.$$

Тогда уравнения (1.10) примут вид

$$\ddot{x}^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\beta K^2 - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma.$$

Это уравнение совпадает с уравнением для экстремалей (??) тогда и только тогда, когда  $K^2 = \text{const}$ .  $\square$

Доказанное утверждение показывает, что далеко не каждая траектория Киллинга является экстремалью.

**Пример 1.2.1.** Рассмотрим евклидову плоскость  $\mathbb{R}^2$  с евклидовой метрикой. Эта метрика инвариантна относительно трехпараметрической неоднородной группы вращений  $\text{IO}(2)$ . Обозначим декартовы и полярные координаты на плоскости соответственно  $x, y$  и  $r, \varphi$ . Тогда векторные поля Киллинга имеют вид  $K_1 = \partial_\varphi$  для вращений и  $K_2 = \partial_x, K_3 = \partial_y$  для сдвигов. Квадраты длин векторов Киллинга равны:

$$K_1^2 = r^2, \quad K_2^2 = K_3^2 = 1.$$

Векторы Киллинга  $K_2$  и  $K_3$  имеют постоянную длину, их траекториями Киллинга являются прямые линии, которые являются экстремалами. Это согласуется с предложением 1.2.2. Траекториями Киллинга для вращений  $K_1$  являются концентрические окружности с центром в начале координат. Длина вектора Киллинга  $K_1$  постоянна на траекториях в соответствии с предложением 1.2.1, однако непостоянна на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Соответствующие траектории Киллинга – окружности – не являются экстремалами.  $\square$

**Пример 1.2.2.** Рассмотрим полупростую группу Ли  $\mathbb{G}$ , как (псевдо-)риманово пространство с формой Киллинга–Картана в качестве метрики (см. раздел ??). Это – пространство постоянной кривизны. Левоинвариантные векторные поля генерируют групповые преобразования справа, а правоинвариантные – слева. Групповые преобразования слева и справа сохраняют метрику, и, следовательно, лево- и правоинвариантные векторные поля являются полями Киллинга. Длина этих полей Киллинга равна  $\pm 1$ . Поэтому соответствующие траектории Киллинга являются экстремалами.  $\square$

Свертывая уравнения Киллинга (1.4) с метрикой, получаем, что дивергенция поля Киллинга равна нулю:

$$\nabla_\alpha K^\alpha = 0. \quad (1.11)$$

Ковариантная производная  $\nabla^\beta$  со связностью Леви–Чивита от уравнения Киллинга (1.4) с учетом уравнения (??) для перестановки ковариантных производных и уравнения (1.11) приводит к уравнению

$$\nabla^\beta (\nabla_\beta K_\alpha + \nabla_\alpha K_\beta) = \Delta K_\alpha + (\nabla^\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla^\beta) K_\beta = 0,$$

где  $\Delta := \nabla^\beta \nabla_\beta$  – оператор Лапласа–Бельтрами на многообразии  $\mathbb{M}$ , и учтено равенство (1.11). Отсюда вытекает уравнение на компоненты векторов Киллинга

$$\Delta K_\alpha = R_{\alpha\beta} K^\beta, \quad (1.12)$$

Для пространства постоянной кривизны тензор Риччи выражается через скалярную кривизну (1.23), и уравнение (1.12) принимает вид

$$\Delta K_\alpha = \frac{R}{n} K_\alpha, \quad R = \text{const.}$$

То есть каждая компонента формы Киллинга является собственным вектором оператора Лапласа–Бельтрами.

**Предложение 1.2.3.** *Пусть  $X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$  – два произвольных векторных поля на (псевдо-)римановом многообразии  $(\mathbb{M}, g)$  и  $K$  – векторное поле Киллинга. Тогда справедливо равенство*

$$g((\mathsf{L}_K - \nabla_K)X, Y) + g(X, (\mathsf{L}_K - \nabla_K)Y) = 0,$$

где  $\mathsf{L}_K X = [K, X]$  – производная Ли и  $\nabla_K X = K^\alpha (\partial_\alpha X^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta X^\gamma) \partial_\beta$  – ковариантная производная векторного поля  $X$  вдоль поля Киллинга  $K$ .

*Доказательство.* Прямая проверка с учетом явного выражения для символов Кристоффеля (??) и уравнения Киллинга (1.4).  $\square$

### 1.3 Однородные и изотропные многообразия

Уравнения Киллинга (1.4) накладывают сильные ограничения на векторные поля Киллинга, которые мы сейчас обсудим. Воспользовавшись тождеством для коммутатора ковариантных производных (??), получаем равенство

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha K_\gamma = -R_{\alpha\beta\gamma}^\delta K_\delta. \quad (1.13)$$

Теперь воспользуемся тождеством (??) для тензора кривизны и уравнениями Киллинга (1.4). В результате получим тождество для векторных полей Киллинга:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta K_\gamma + \nabla_\beta \nabla_\gamma K_\alpha + \nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta = 0,$$

где слагаемые отличаются циклической перестановкой индексов. Это равенство позволяет переписать уравнение (1.13) в виде

$$\nabla_\gamma \nabla_\alpha K_\beta = R_{\alpha\beta\gamma}^\delta K_\delta. \quad (1.14)$$

Если свернуть это уравнение по индексам  $\gamma, \alpha$ , то получим в точности уравнение (1.12) из предыдущего раздела.

Полученное равенство (1.12) является следствием уравнений Киллинга, но не эквивалентно им. Оно позволяет сделать важные выводы. Предположим, что в окрестности произвольной точки многообразия  $p \in \mathbb{M}$  компоненты векторного поля Киллинга разлагаются в ряд Тейлора, который сходится в некоторой окрестности  $\mathbb{U}_p$ . Допустим, что в точке  $p \in \mathbb{M}$  нам заданы компоненты формы Киллинга  $K_\alpha(p)$  и их первых производных  $\partial_\beta K_\alpha(p)$ . Тогда соотношения (1.14) позволяют вычислить все вторые производные от компонент формы Киллинга  $\partial_{\beta\gamma}^2 K_\alpha$ . Теперь возьмем ковариантную производную от равенства (1.14) и получим некоторое соотношение, линейное по третьим производным. Из него можно найти все трети производные от вектора Киллинга и т.д. до бесконечности. Важно отметить, что все соотношения линейны по компонентам формы Киллинга и их производным. Это значит, что в окрестности  $\mathbb{U}_p$  компоненты формы Киллинга имеют вид

$$K_\alpha(x, p) = A_\alpha^\beta(x, p)K_\beta(p) + B_\alpha^{\beta\gamma}(x, p)[\partial_\beta K_\gamma(p) - \partial_\gamma K_\beta(p)], \quad (1.15)$$

где  $A_\alpha^\beta(x, p)$  и  $B_\alpha^{\beta\gamma}(x, p)$  – некоторые функции. Антисимметрия последнего слагаемого по индексам  $\beta, \gamma$  связана с тем, что симметризованная частная производная выражается через компоненты формы Киллинга в силу уравнения Киллинга (1.4). Таким образом, компоненты формы Киллинга в окрестности  $\mathbb{U}_p$  являются линейными функциями от компонент формы Киллинга в точке  $p$  и ее внешней производной в той же точке.

У формы Киллинга  $K_\alpha(x, p)$  второй аргумент  $p$  означает, что эта форма имеет определенные свойства в точке  $p \in \mathbb{M}$ . По предположению, представление (1.15) справедливо для всех точек многообразия  $p \in \mathbb{M}$ , необходимо только задать значения  $K(p)$  и  $dK(p)$ . Мы предполагаем, что эти значения выбраны достаточно гладкими функциями от  $p$ . Тогда форма Киллинга будет достаточно гладкой функцией и от  $x$ , и от  $p$ .

Мы предположили, что компоненты формы Киллинга разлагаются в ряды Тейлора в окрестности каждой точки  $p \in \mathbb{M}$ . Обозначим через  $\mathbb{U}_p$  окрестность точки  $p$ , в которой разложение (1.15) справедливо и обратимо, т.е. аргументы  $x$  и  $p$  можно поменять местами для некоторых новых матриц  $A$  и  $B$ . Рассмотрим точку  $q$ , которая лежит вне  $\mathbb{U}_p$ . Для этой точки также справедливо обратимое разложение вида (1.15) в некоторой окрестности  $\mathbb{U}_q$ . Предположим, что точка  $q$  лежит достаточно близко к  $\mathbb{U}_p$  так, что окрестности пересекаются,  $\mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q \neq \emptyset$ . Тогда для всех точек из пересечения  $x \in \mathbb{U}_p \cap \mathbb{U}_q$  справедливо разложение (1.15) по компонентам форм Киллинга  $K(p)$  и  $K(q)$  и их внешним производным. Отсюда следует, что компоненты формы Киллинга и ее внешней производной в точке  $q$  линейно выражаются через компоненты формы Киллинга и ее внешней производной в точке  $p$ . Таким образом, разложение (1.15) справедливо также в объединении  $\mathbb{U}_p \cup \mathbb{U}_q$ . Это построение можно продолжить на все многообразие  $\mathbb{M}$ . Поэтому разложение (1.15) справедливо для всех точек  $x, p \in \mathbb{M}$ .

Теперь предположим, что (псевдо-)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  имеет несколько векторных полей Киллинга  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда для каждого векторного поля Киллинга справедливо разложение (1.15)

$$K_{ia}(x, p) = A_\alpha^\beta(x, p)K_{i\beta}(p) + B_\alpha^{\beta\gamma}(x, p)[\partial_\beta K_{i\gamma}(p) - \partial_\gamma K_{i\beta}(p)]. \quad (1.16)$$

Функции  $A_\alpha^\beta(x, p)$  и  $B_\alpha^{\beta\gamma}(x, p)$  одинаковы для всех форм Киллинга, потому что определяются соотношениями (1.14), которые линейны по компонентам форм Киллинга

и их производным. Они полностью определяются метрикой, тензором кривизны и их ковариантными производными. В полученном разложении точка  $p \in \mathbb{M}$  произвольна, но фиксирована, а точка  $x \in \mathbb{M}$  пробегает все многообразие.

Соотношение (1.14) представляет собой систему уравнений в частных производных на компоненты формы Киллинга, у которой есть нетривиальные условия разрешимости. Одно из этих условий в ковариантной форме имеет вид

$$[\nabla_\gamma \nabla_\delta] \nabla_\alpha K_\beta = -R_{\gamma\delta\alpha}^\epsilon \nabla_\epsilon K_\beta - R_{\gamma\delta\beta}^\epsilon \nabla_\alpha K_\epsilon,$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор ковариантных производных. Подстановка в левую часть этого уравнения исходного выражения для вторых производных от формы Киллинга (1.14) после несложных алгебраических преобразований приводит к равенству

$$\left( R_{\alpha\beta\gamma}^\epsilon \delta_\delta^\zeta - R_{\alpha\beta\delta}^\epsilon \delta_\gamma^\zeta + R_{\gamma\delta\alpha}^\epsilon \delta_\beta^\zeta - R_{\gamma\delta\beta}^\epsilon \delta_\alpha^\zeta \right) \nabla_\zeta K_\epsilon = (\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta}^\epsilon - \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}^\epsilon) K_\epsilon. \quad (1.17)$$

Если кривизна нетривиальна, то это уравнение дает некоторые линейные соотношения между компонентами формы Киллинга  $K_\alpha$  и их ковариантными производными  $\nabla_\beta K_\alpha$ . Наоборот, если существует некоторая информация в формах Киллинга, то полученное уравнение может определить структуру тензора кривизны. В теореме 1.3.1, которая сформулирована ниже, соотношение (1.17) использовано для доказательства того, что однородное и изотропное многообразие является пространством постоянной кривизны.

Перейдем к определениям.

**Определение.** (Псевдо-)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  размерности  $\dim \mathbb{M} = n$  называется *однородным в точке*  $p \in \mathbb{M}$ , если существуют инфинитезимальные изометрии, которые переводят эту точку в любую другую точку из некоторой окрестности  $\mathbb{U}_p$ . Другими словами, метрика должна допускать такие векторные поля Киллинга, которые в точке  $p$  имеют все возможные направления. Поскольку векторы Киллинга образуют линейное пространство, то в сопряженном пространстве достаточно существования такого набора из  $n$  форм Киллинга  $K^{(\gamma)} = dx^\alpha K_\alpha^{(\gamma)}(x, p)$ , где индекс  $\gamma$  в скобках нумерует формы Киллинга, что выполнены условия:

$$K_\alpha^{(\gamma)}(p, p) = \delta_\alpha^\gamma. \quad (1.18)$$

Если (псевдо-)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  однородно в каждой своей точке, то оно называется *однородным*. Другими словами, группа изометрий действует на  $\mathbb{M}$  транзитивно.

(Псевдо-)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  называется *изотропным в точке*  $p \in \mathbb{M}$ , если существуют такие инфинитезимальные изометрии с формами Киллинга  $K(x, p)$ , которые оставляют эту точку на месте, т.е.  $K(p, p) = 0$ , и для которых внешняя производная  $dK(p, p)$  в точке  $p$  принимает любое значение в пространстве 2-форм  $\Lambda_2(\mathbb{M})|_p$  в точке  $p$ . Для этого достаточно существования такого набора из  $\frac{1}{2}n(n-1)$  форм Киллинга  $K^{[\gamma\delta]} = -K^{[\delta\gamma]} = dx^\alpha K_\alpha^{[\gamma\delta]}(x, p)$ , где индексы  $\gamma, \delta$  нумеруют формы Киллинга, что выполнены условия:

$$\begin{aligned} K_\alpha^{[\gamma\delta]}(p, p) &= 0, \\ \frac{\partial K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial x^\alpha} \bigg|_{x=p} &= \delta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\beta}^{\delta\gamma}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Если (псевдо-)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  изотропно в каждой своей точке, то оно называется *изотропным*.  $\square$

**Замечание.** В разделе ?? было дано определение однородного пространства, как произвольной транзитивной группы преобразований  $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ . При этом наличие метрики на многообразии  $\mathbb{M}$  не предполагалось. Поскольку группа изометрий является группой преобразований, то данное выше определение согласуется с тем, что было дано в разделе ?. В обратную сторону утверждение следующее. Пусть дано однородное пространство  $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$  в смысле группы преобразований. Тогда многообразие  $\mathbb{M}$  нетрудно превратить в (псевдо-)риманово многообразие с метрикой, инвариантной относительно действия группы  $\mathbb{G}$ . Для этого достаточно в произвольной точке  $p \in \mathbb{M}$  выбрать симметричную невырожденную матрицу и “разнести” ее по всему многообразию при помощи действия группы  $\mathbb{G}$ . По построению группа  $\mathbb{G}$  будет группой изометрий для полученной метрики.  $\square$

В силу непрерывности, наборы форм  $K^{(\gamma)}$  и  $K^{[\gamma\delta]}$  линейно независимы в некоторой окрестности точки  $p$ .

**Предложение 1.3.1.** *Любое изотропное (псевдо-)риманово многообразие  $(\mathbb{M}, g)$  является также однородным.*

**Доказательство.** Если многообразие изотропно, то формы Киллинга  $K^{[\gamma\delta]}(x, p)$  и  $K^{[\gamma\delta]}(x, p + dp)$  удовлетворяют условиям (1.19) в близких точках  $p$  и  $p + dp$  соответственно. Любая их линейная комбинация будет формой Киллинга и, следовательно, произвольная линейная комбинация производных

$$c^\alpha \frac{\partial K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial p^\alpha} := c^\alpha \lim_{dp^\alpha \rightarrow 0} \frac{K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p + dp) - K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p)}{dp^\alpha}$$

также будет формой Киллинга для любого набора постоянных  $c^\alpha$ . Вычислим производную по  $x$  формы Киллинга  $K^{[\gamma\delta]}$  в точке  $p$ . Из первого условия в (1.19) следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial p^\alpha} K_\beta^{[\gamma\delta]}(p, p) = \frac{\partial K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial x^\alpha} \Big|_{x=p} + \frac{\partial K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial p^\alpha} \Big|_{x=p} = 0.$$

Откуда, с учетом второго условия в (1.19), получаем равенство

$$\frac{\partial K_\beta^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial p^\alpha} \Big|_{x=p} = -\delta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\beta}^{\delta\gamma}.$$

Отсюда следует, что из форм Киллинга  $K^{[\gamma\delta]}$  можно построить форму Киллинга, которая в точке  $p$  принимает любое заданное значение  $dx^\alpha a_\alpha$ , где  $a_\alpha \in \mathbb{R}$ . Для этого достаточно положить

$$K_\alpha = \frac{a_\gamma}{n-1} \frac{\partial K_\alpha^{[\gamma\delta]}(x, p)}{\partial p^\delta}.$$

Выбрав соответствующим образом постоянные  $a_\gamma$ , получим набор форм Киллинга, который удовлетворяет условиям (1.18).  $\square$

**Теорема 1.3.1.** *Алгебра Ли  $\mathfrak{i}(\mathbb{M})$  инфинитезимальных изометрий связного (псевдо-)риманова многообразия  $\mathbb{M}$  имеет размерность не более, чем  $\frac{1}{2}n(n+1)$ , где  $n = \dim \mathbb{M}$ . Если размерность максимальна,  $\dim \mathfrak{i}(\mathbb{M}) = \frac{1}{2}n(n+1)$ , то многообразие  $\mathbb{M}$  является однородным и изотропным и представляет собой пространство постоянной кривизны.*

*Доказательство.* Размерность алгебры Ли  $i(\mathbb{M})$  равна максимальному числу линейно независимых векторных полей Киллинга на многообразии  $\mathbb{M}$ . Из равенства (1.16) следует, что число независимых векторных полей Киллинга  $N$  не может превышать числа независимых компонент формы  $\{K_\alpha(p)\}$  и ее внешней производной  $\{\partial_\beta K_\alpha(p) - \partial_\alpha K_\beta(p)\}$  в фиксированной точке  $p \in \mathbb{M}$ . Число независимых компонент любой 1-формы в фиксированной точке не превосходит  $n$ , а число независимых компонент внешней производной не может превышать  $\frac{1}{2}n(n-1)$ . Поэтому справедливо следующее ограничение на размерность алгебры Ли векторных полей Киллинга:

$$\dim i(\mathbb{M}) \leq n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Это доказывает первое утверждение теоремы.

Однородные и изотропные многообразия имеют максимальное число  $\frac{1}{2}n(n+1)$  векторных полей Киллинга и, в силу разложения (1.16), определяют все возможные векторы Киллинга на многообразии  $\mathbb{M}$ . Следовательно, если некоторое многообразие имеет максимальное число независимых полей Киллинга, то оно с необходимостью должно быть однородным и изотропным.

Теперь докажем, что любое однородное и изотропное пространство является пространством постоянной кривизны. Если пространство однородно и изотропно, то для каждой точки  $x \in \mathbb{M}$  найдутся такие формы Киллинга, для которых  $K_\alpha(x) = 0$ , а  $\nabla_\beta K_\alpha(x)$  является произвольной антисимметричной матрицей. Отсюда следует, что антисимметризированный коэффициент при  $\nabla_\zeta K_\epsilon$  в уравнении (1.17) должен быть равен нулю, что приводит к равенству

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon\delta_\delta^\zeta - R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon\delta_\gamma^\zeta + R_{\gamma\delta\alpha}{}^\epsilon\delta_\beta^\zeta - R_{\gamma\delta\beta}{}^\epsilon\delta_\alpha^\zeta = R_{\alpha\beta\gamma}{}^\zeta\delta_\delta^\epsilon - R_{\alpha\beta\delta}{}^\zeta\delta_\gamma^\epsilon + R_{\gamma\delta\alpha}{}^\zeta\delta_\beta^\epsilon - R_{\gamma\delta\beta}{}^\zeta\delta_\alpha^\epsilon. \quad (1.20)$$

Если пространство однородно и изотропно, то для произвольной точки  $x \in \mathbb{M}$  существуют также такие формы Киллинга, которые принимают в этой точке произвольные значения. Следовательно, из уравнений (1.17) и (1.20) вытекает равенство

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta}{}^\epsilon = \nabla_\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\epsilon. \quad (1.21)$$

Теперь свернем уравнение (1.20) по индексам  $\delta, \zeta$  и опустим верхний индекс. В результате получим выражение тензора кривизны через тензор Риччи и метрику:

$$(n-1)R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}. \quad (1.22)$$

Правая часть этой формулы должна быть антисимметрична по индексам  $\delta, \gamma$ . Поэтому возникает дополнительное ограничение

$$R_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma} - R_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma} = -R_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} + R_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta}.$$

Свертка полученного равенства по индексам  $\beta, \gamma$  дает связь между тензором Риччи и скалярной кривизной:

$$R_{\alpha\delta} = \frac{1}{n}Rg_{\alpha\delta}. \quad (1.23)$$

Подстановка этого выражения в (1.22) приводит к следующему выражению для тензора кривизны

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}). \quad (1.24)$$

Теперь осталось доказать, что скалярная кривизна  $R$  однородного и изотропного пространства постоянна. Для этой цели используем свернутые тождества Бианки

$$2\nabla_\beta R_\alpha{}^\beta - \nabla_\alpha R = 0.$$

Подставляя в это тождество выражение для тензора Риччи (1.23), получаем условие

$$\left(\frac{2}{n} - 1\right) \partial_\alpha R = 0.$$

При  $n \geq 3$  отсюда следует  $R = \text{const}$ .

Случай  $n = 2$  требует особого рассмотрения. Свертка равенства (1.21) по индексам  $\beta, \epsilon$  приводит к равенству

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\delta} - \nabla_\delta R_{\alpha\gamma} = 0.$$

дальнейшая свертка с  $g^{\alpha\delta}$  с учетом уравнения (1.23) приводит к условию  $\partial_\gamma R = 0$ , т.е.  $R = \text{const}$  и при  $n = 2$ .

Таким образом, скалярная кривизна в выражении для полного тензора кривизны (1.24) равна константе,  $R = \text{const}$ , и максимально симметричное (псевдо-)риманово многообразие является пространством постоянной кривизны.  $\square$

**Замечание.** Если тензор кривизны имеет вид (1.24), где  $R = \text{const}$ , то соответствующее многообразие является пространством постоянной кривизны, т.к. ковариантная производная от метрики в римановой геометрии равна нулю,  $\nabla_\epsilon R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ . Обратное, вообще говоря, неверно. У пространства постоянной кривизны тензор кривизны не обязательно имеет вид (1.24). Примером является полупростая группа Ли (см. раздел ??). Отсюда следует, что не всякое пространство постоянной кривизны является максимально симметричным.  $\square$

**Пример 1.3.1.** Рассмотрим евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ , на котором задана метрика нулевой кривизны, т.е.  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ . Ясно, что это пространство постоянной нулевой кривизны. Тогда в  $\mathbb{R}^n$  существует такая система координат  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  в которой все компоненты метрики постоянны. В этой системе координат символы Кристоффеля равны нулю и уравнение для векторов Киллинга (1.14) принимает простой вид:

$$\partial_{\beta\gamma}^2 K_\alpha = 0.$$

Общее решение этого уравнения линейно по координатам

$$K_\alpha(x) = a_\alpha + b_{\alpha\beta} x^\beta,$$

где  $a_\alpha$  и  $b_{\alpha\beta}$  – некоторые постоянные. Из уравнения Киллинга (1.4) следует, что это выражение задает форму Киллинга тогда и только тогда, когда матрица  $b_{\alpha\beta}$  антисимметрична, т.е.  $b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$ . Следовательно, можно задать  $\frac{1}{2}n(n+1)$  линейно независимых форм Киллинга:

$$\begin{aligned} K_\alpha^{(\gamma)}(x) &= \delta_\alpha^\gamma, \\ K_\alpha^{[\gamma\delta]}(x) &= \delta_\alpha^\delta x^\gamma - \delta_\alpha^\gamma x^\delta. \end{aligned}$$

Тогда произвольная форма Киллинга выражается в виде линейной комбинации

$$K_\alpha = a_\gamma K_\alpha^{(\gamma)} + \frac{1}{2} b_{\delta\gamma} K_\alpha^{[\gamma\delta]}.$$

В полученном выражении  $n$  векторов Киллинга  $K^{(\gamma)}$  генерируют трансляции в  $\mathbb{R}^n$  вдоль осей координат, а  $\frac{1}{2}n(n-1)$  векторов  $K^{[\gamma\delta]}$  – вращения вокруг начала координат. Таким образом, метрика пространства нулевой кривизны допускает максимальное число  $\frac{1}{2}n(n+1)$  векторов Киллинга и поэтому является однородным и изотропным пространством.

Известно, что линейным преобразованием координат  $x^\alpha$  метрику можно преобразовать к диагональному виду, когда на диагонали будут стоять  $\pm 1$ , в зависимости от сигнатуры исходной метрики. Если метрика риманова, то после преобразования координат, она примет стандартный вид  $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ . Эта метрика инвариантна относительно неоднородной группы вращений  $\mathbb{SO}(n)$ .  $\square$

## 1.4 Симметричные тензоры на пространстве постоянной кривизны

В разделе 1.3 мы выяснили, что однородные и изотропные  $n$ -мерные многообразия с необходимостью являются пространствами постоянной кривизны, которое имеют максимальное число  $n(n+1)/2$  линейно независимых векторных полей Киллинга. Более того, если под пространством постоянной кривизны понимать (псевдо-)риманово многообразие с метрикой, удовлетворяющей условию (1.24), где скалярная кривизна  $R$  постоянна, то пространство постоянной кривизны определяется, по-существу, единственным образом сигнатурой метрики и знаком скалярной кривизны. Такие пространства часто встречаются в приложениях, причем помимо метрики на таких многообразиях, как правило, задаются дополнительные тензорные поля, например, поля материи. Для того, чтобы вся модель была максимально симметричной необходимо потребовать симметрию не только от метрики, но и от всех остальных полей. В настоящем разделе мы получим условия, которые налагают требования однородности и изотропии на простейшие тензорные поля, заданные на пространстве постоянной кривизны.

Пусть на  $n$ -мерном пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$  помимо метрики  $g_{\alpha\beta}$  задано произвольное тензорное поле

$$T = dx^\alpha \otimes \dots \otimes dx^\beta T_{\alpha\dots\beta}.$$

Для определенности мы рассмотрим ковариантные тензорные поля. Пусть задана изометрия  $\iota : x \mapsto x'$ . Тогда условие симметрии тензорного поля относительно действия данной изометрии имеет тот же вид, что и для метрики (1.1):

$$T(x) = \iota^* T(x'),$$

где  $\iota^*$  – возврат отображения. В компонентах это условие принимает вид

$$T_{\alpha\dots\beta}(x) = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\alpha} \dots \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\beta} T_{\gamma\dots\delta}(x'). \quad (1.25)$$

Пусть инфинитезимальные изометрии генерируются векторными полями Киллинга  $K = K^\alpha \partial_\alpha$ . Тогда условие симметрии (1.25) запишется в виде равенства нулю производной Ли:

$$\mathcal{L}_K T = 0. \quad (1.26)$$

Такое же условие инвариантности должно выполняться и для произвольных тензорных полей, содержащих как ковариантные, так и контравариантные индексы.

Теперь рассмотрим простейшие случаи, которые часто встречаются в приложениях.

**Пример 1.4.1.** Пусть на пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$  задано дифференцируемое скалярное поле  $\varphi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$ . Тогда равенство нулю производной Ли примет вид

$$K^\alpha(x)\partial_\alpha\varphi(x).$$

Поскольку для пространства постоянной кривизны векторное поле Киллинга можно выбрать таким образом, что компоненты  $K^\alpha(x)$  будут принимать произвольные значения в любой точке  $x \in \mathbb{S}$ , то отсюда вытекает условие постоянства скалярного поля  $\varphi = \text{const}$  на всем  $\mathbb{S}$ . Таким образом, однородное и изотропное скалярное поле (функция) на пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$  – это постоянная:  $\varphi(x) = \text{const}$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}$ .  $\square$

**Пример 1.4.2.** В качестве второго примера выберем дифференцируемое ковекторное поле  $A = dx^\alpha A_\alpha$ . Производная Ли для него была вычислена в разделе ??, и условие инвариантности (1.26) принимает вид

$$K^\beta\partial_\beta A_\alpha + \partial_\alpha K^\beta A_\beta = 0.$$

Выберем векторное поле Киллинга таким образом, что  $K^\beta(x) = 0$  в произвольной, но фиксированной точке  $x \in \mathbb{S}$ . Кроме этого, векторное поле Киллинга можно выбрать так, что частная производная  $\partial_\beta K_\alpha$  будет антисимметрична и произвольна. Поскольку в выбранной точке  $\partial_\alpha K^\beta = \nabla_\alpha K^\beta$ , то справедливо равенство

$$\partial_\alpha K^\beta A_\beta = \partial_\alpha K_\beta A^\beta = \partial_\gamma K_\beta (\delta_\alpha^\gamma A^\beta),$$

и данное построение можно провести в произвольной точке многообразия  $\mathbb{S}$ , то отсюда вытекает равенство

$$\delta_\alpha^\gamma A^\beta = \delta_\alpha^\beta A^\gamma.$$

После свертки по индексам  $\alpha$  и  $\gamma$  возникает соотношение

$$nA^\beta = A^\beta.$$

Поэтому, исключая тривиальный случай  $n = 1$ , после опускания индекса получаем равенство  $A_\alpha = 0$ . Следовательно, если ковекторное поле однородно и изотропно, то оно тождественно равно нулю.

Это же относится и к векторному полю  $X = X^\alpha\partial_\alpha$ : однородное и изотропное векторное поле на пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$  тождественно равно нулю.  $\square$

**Пример 1.4.3.** В качестве третьего примера рассмотрим дифференцируемый ковариантный тензор второго ранга с компонентами  $T_{\alpha\beta}$ . Мы не предполагаем наличия какой либо симметрии по индексам  $\alpha, \beta$ . Производная Ли от тензора второго ранга имеет вид

$$\mathcal{L}_K T_{\alpha\beta} = K^\gamma\partial_\gamma T_{\alpha\beta} + \partial_\alpha K^\gamma T_{\gamma\beta} + \partial_\beta K^\gamma T_{\alpha\gamma}.$$

Как и в предыдущем примере выберем векторное поле Киллинга таким образом, чтобы в точке  $x \in \mathbb{S}$  было выполнено равенство  $K^\gamma(x) = 0$  и частная производная  $\partial_\alpha K_\beta$  была антисимметрична и произвольна. Тогда из равенства нулю производной Ли вытекает равенство

$$\delta_\alpha^\delta T^\gamma_\beta + \delta_\beta^\delta T^\gamma_\alpha = \delta_\alpha^\gamma T^\delta_\beta + \delta_\beta^\gamma T^\delta_\alpha.$$

После свертки по индексам  $\alpha, \delta$  и опускания  $\gamma$  получаем соотношение

$$(n-1)T_{\gamma\beta} + T_{\beta\gamma} = g_{\beta\gamma}T, \quad T := T_\alpha{}^\alpha.$$

Теперь поменяем индексы  $\beta$  и  $\gamma$  и вычтем полученное равенство:

$$(n-2)(T_{\gamma\beta} - T_{\beta\gamma}) = 0.$$

Отсюда следует, что при  $n \neq 2$  инвариантный тензор второго ранга должен быть симметричен. С учетом симметрии получаем выражение для инвариантного тензора второго ранга:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{T}{n}g_{\alpha\beta}.$$

Поскольку след тензора  $T$  – скаляр, то из его инвариантности вытекает, что он должен быть равен постоянной, как в первом примере. Таким образом, однородное и изотропное ковариантное тензорное поле второго ранга на пространстве постоянной кривизны имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = Cg_{\alpha\beta}, \quad C = \text{const.} \quad (1.27)$$

Эта формула справедлива для  $n \geq 3$  и для симметричной части тензора при  $n = 2$ .

В двумерном случае инвариантный тензор может иметь антисимметричную часть, пропорциональную  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  – полностью антисимметричному тензору второго ранга:

$$T_{\alpha\beta} = -T_{\beta\alpha} = C\varepsilon_{\alpha\beta},$$

если мы не учитываем пространственные отражения. При пространственных отражениях полностью антисимметричный тензор второго ранга меняет знак  $\varepsilon_{\alpha\beta} \mapsto -\varepsilon_{\alpha\beta}$ . Поэтому с учетом пространственных отражений наиболее общий вид симметричного тензора второго ранга при  $n = 2$  такой же, как и в более высоких размерностях (1.27).

Аналогичное построение можно провести для инвариантного контравариантного тензора второго ранга и тензора со смешанными индексами:

$$T^{\alpha\beta} = Cg^{\alpha\beta}, \quad T^\alpha{}_\beta = C\delta^\alpha_\beta.$$

Полученные формулы для симметричных тензоров будут использованы при построении космологических моделей, где роль  $T_{\alpha\beta}$  будет играть тензор энергии-импульса полей материи.  $\square$

## 1.5 Пространства с максимально симметричными подпространствами

Во многих важных с физической точки зрения случаях, например, в космологии, (псевдо-)риманово многообразие  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , представляет собой топологическое произведение двух многообразий,  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ , где  $\mathbb{R}$  – вещественная прямая, которую мы в дальнейшем отождествим со временем, и  $\mathbb{S}$  – пространство постоянной кривизны. При этом каждой точке  $t \in \mathbb{R}$  соответствует подмногообразие  $\mathbb{S} \subset \mathbb{M}$ . Поскольку  $\mathbb{S}$  – пространство постоянной кривизны, то оно однородно и изотропно. Соответствующая группа изометрий на  $\mathbb{S}$  генерируется  $n(n-1)/2$  векторными полями Киллинга. В настоящем разделе мы найдем наиболее общий вид метрики на

$\mathbb{M}$ , инвариантной относительно группы симметрий, которая порождается действием группы симметрии на  $\mathbb{S}$ .

Обозначим координаты на пространстве постоянной кривизны  $\mathbb{S}$  через  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, \dots, n - 1$ . Тогда метрика на  $\mathbb{S}$  будет иметь компоненты  $g_{\mu\nu}(x)$ . По построению, она инвариантна относительно группы изометрий, генерируемых векторными полями Киллинга  $K_i = K_i^\mu(x)\partial_\mu$ ,  $i = 1, \dots, n(n - 1)/2$ .

Предположим, что на  $\mathbb{M}$  задана метрика лоренцевой сигнатуры такая, что координата  $t$  является временем, т.е.  $g_{00} > 0$ , и все сечения постоянного времени  $t = \text{const}$  пространственноподобны. Кроме этого, предположим, что сужение этой метрики на  $\mathbb{S}$  при каждом значении  $t \in \mathbb{R}$  совпадает с  $g_{\mu\nu}$ . Ясно, что такая метрика имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00}(t, x) & g_{0\nu}(t, x) \\ g_{\mu 0}(t, x) & \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(t, x) \end{pmatrix},$$

где  $g_{00}$  и  $g_{0\mu} = g_{\mu 0}$  – произвольные функции от  $t$  и  $x$ , а  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  – метрика постоянной кривизны, которая зависит от  $t$  как от параметра. Все компоненты метрики предполагаются достаточно гладкими и по  $t$ , и по  $x$ . Поскольку метрика имеет лоренцеву сигнатуру, то согласно предложению ?? матрица

$$\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} - \frac{g_{0\mu}g_{0\nu}}{g_{00}}$$

отрицательно определена. Кроме этого, по-предположению, матрица  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  также отрицательно определена.

Продолжим действие группы изометрий на все  $\mathbb{M}$  следующим образом. Будем считать, что компоненты векторных полей Киллинга  $K_i^\mu(t, x)$  зависят от  $t$  как от параметра. Определим действие группы инфинитезимальных изометрий на  $\mathbb{M}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} t &\mapsto t' = t, \\ x^\mu &\mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon K^\mu, \quad \epsilon \ll 1, \end{aligned} \tag{1.28}$$

где  $K$  – произвольный вектор Киллинга из алгебры Ли, порожденной векторами  $K_i$ . То есть преобразования не сдвигают точки вещественной прямой  $\mathbb{R} \subset \mathbb{M}$ . Это означает, что векторные поля Киллинга продолжаются на все  $\mathbb{M}$  таким образом, что у них не возникает дополнительных компонент:  $K^0\partial_t = 0$ . Нетривиальность продолжения сводится лишь к тому, что пространственные компоненты векторов Киллинга теперь могут зависеть от  $t$  как от параметра. Следовательно, алгебра Ли продолженных на  $\mathbb{M}$  векторов Киллинга остается прежней.

**Пример 1.5.1.** В четырехмерном случае векторные поля Киллинга, продолженные на  $\mathbb{M}$ , порождают группу преобразований  $(\mathbb{M}, \mathbb{G})$ , где

$$\mathbb{G} = \begin{cases} \mathbb{SO}(4), & \mathbb{S} = \mathbb{S}^3 \text{ – сфера,} \\ \mathbb{ISO}(3), & \mathbb{S} = \mathbb{R}^3 \text{ – евклидово пространство,} \\ \mathbb{SO}(3, 1), & \mathbb{S} = \mathbb{H}^3 \text{ – двуполостный гиперболоид.} \end{cases}$$

Этот случай важен в космологии. □

**Теорема 1.5.1.** *Если метрика на  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$  вещественно аналитична и инвариантна относительно преобразований (1.28), то существует такая система координат, в которой метрика имеет блочно диагональный вид*

$$ds^2 = dt^2 + \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.29)$$

где  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(t, x)$  – метрика постоянной кривизны на  $\mathbb{S}$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ . В этой системе координат компоненты векторных полей Киллинга не зависят от времени:  $K^\mu = K^\mu(x)$ .

*Доказательство.* Пусть  $x^\mu$  – координаты на  $\mathbb{S}$ . Зафиксируем одну из гиперповерхностей  $t = \text{const}$ . Касательный к ней вектор имеет только пространственные компоненты:  $X = X^\mu \partial_\mu$ . Ортогональный к ней вектор  $n^\alpha \partial_\alpha$  должен удовлетворять равенству

$$n^0 X^\nu N_\nu + n^\mu X^\nu g_{\mu\nu} = 0,$$

где использована АДМ параметризация метрики, см. раздел ???. Поскольку данное равенство должно быть выполнено для всех  $X$ , то оно определяет пространственные компоненты нормальных векторов,

$$n^\mu = -n^0 N^\mu.$$

Следовательно, квадрат ортогонального вектора положителен:

$$(n, n) = (N^2 + N^\rho N_\rho)(n^0)^2 - 2(n^0)^2 N^\mu N_\mu + (n^0)^2 N^\mu N^\nu g_{\mu\nu} = N^2(n^0)^2 > 0.$$

Поэтому вектор, ортогональный к пространственноподобной гиперповерхности, является времениподобным.

Выпустим из каждой точки гиперповерхности геодезическую (экстремаль), которая является времениподобной по построению. Выберем в качестве временной координаты длину геодезической  $s$ . Не ограничивая общности, можно считать, что фиксированная гиперповерхность соответствует значению  $s = 0$ . Тогда в некоторой окрестности поверхности  $\mathbb{S}$  можно выбрать систему координат  $\{x^0 := s, x^\mu\}$ . Согласно предложению ?? в построенной таким образом системе координат метрика имеет блочно диагональный вид в некоторой окрестности фиксированной поверхности:

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\mu} = g_{\mu 0} = 0, \quad \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(s, x).$$

На поверхности, по-построению, нулевая компонента вектора Киллинга равна нулю,  $K^0(0, x) = 0$ . Из  $(0, 0)$  компоненты уравнения Киллинга, которое удобнее использовать в форме (1.7), следует равенство  $\partial_s K^0(s, x)$ . Для вещественно аналитических функций это дифференциальное уравнение с начальным условием  $K^0(0, x) = 0$  имеет единственное решение  $K^0(s, x) = 0$  для всех значений координаты  $s$ , где определена система координат. Следовательно, все гиперповерхности, определяемые уравнением  $s = \text{const}$ , будут инвариантными многообразиями, т.е. пространствами постоянной кривизны по крайней мере в некоторой окрестности исходной гиперповерхности.

Если метрика является диагональной (1.29), то  $(0, \mu)$  компонента уравнения Киллинга (1.7) принимает вид  $\partial_s K^\mu = 0$ . Отсюда следует, что компоненты векторных полей Киллинга не зависят от времени.

Пространственные  $(\mu, \nu)$  компоненты уравнения Киллинга удовлетворяются, поскольку  $K$  – векторы Киллинга на  $\mathbb{S}$ .

Возвращаясь к обозначению  $s \mapsto t$ , получаем метрику (1.29).  $\square$

Если система координат выбрана таким образом, что инвариантная метрика на  $\mathbb{M}$  имеет вид (1.29), то координатные линии  $t$ , проходящие через каждую точку  $x \in \mathbb{S}$  являются геодезическими. Это следует из построения данной системы координат. Данное утверждение уже было доказано с помощью прямой проверки, предложение ??.

## 1.6 Лоренц-инвариантные вакуумные решения уравнений Эйнштейна

Нахождение точных решений уравнений Эйнштейна является одной из основных задач общей теории относительности. Поскольку уравнения Эйнштейна очень сложны, то решения ищутся, как правило, в предположении наличия какой либо симметрии. Это упрощает систему уравнений и дает возможность отыскания решений.

Среди точных решений вакуумных уравнений с космологической постоянной решение де Ситтера [?, ?] и анти-де Ситтера были одними из первых космологических решений. Решение де Ситтера описывает пространство-время постоянной кривизны и инвариантно относительно относительно действия группы Лоренца  $\text{SO}(1, 4)$  (см. раздел 2.4). Решение анти-де Ситтера также соответствует пространству постоянной кривизны и инвариантно относительно группы  $\text{SO}(2, 3)$ . Обе группы симметрии содержат подгруппу Лоренца меньшей размерности  $\text{SO}(1, 3)$ . В настоящем разделе доказано, что все решения вакуумных уравнений Эйнштейна, инвариантные относительно действия группы Лоренца  $\text{SO}(1, 3)$ , описывают пространство-время постоянной кривизны и, следовательно, сводятся или к решению де Ситтера, или к решению анти-де Ситтера в зависимости от знака космологической постоянной.

Рассмотрим пространство-время Минковского  $\mathbb{R}^{1, n-1}$  произвольной размерности  $n$ . В нем задана метрика Лоренца  $\eta_{\alpha\beta} := \text{diag}(+ - \dots -)$  в декартовой системе координат  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$ . Эта метрика инвариантна относительно преобразований из группы Пуанкаре, в частности, относительно преобразований Лоренца. Соответствующие векторные поля Киллинга имеют вид

$$K_{\epsilon\delta} = \frac{1}{2} (x_\delta \partial_\epsilon - x_\epsilon \partial_\delta) = \frac{1}{2} (x_\delta \delta_\epsilon^\gamma - x_\epsilon \delta_\delta^\gamma) \partial_\gamma, \quad (1.30)$$

где индексы  $\epsilon, \delta$  нумеруют  $n(n-1)/2$  векторов Киллинга и  $x_\alpha := x^\beta \eta_{\beta\alpha}$ . Пусть в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1, n-1}$  задана вторая метрика  $g_{\alpha\beta}(x)$ . Поставим следующую задачу: найти все метрики  $g_{\alpha\beta}$ , инвариантные относительно действия группы Лоренца  $\text{SO}(1, n-1)$ .

Уравнения

$$\nabla_\alpha K_\beta + \nabla_\beta K_\alpha = 0$$

для векторных полей Киллинга (1.30) принимают вид

$$g_{\alpha\epsilon} \eta_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} \eta_{\beta\epsilon} + g_{\beta\epsilon} \eta_{\alpha\delta} - g_{\beta\delta} \eta_{\alpha\epsilon} + x_\delta \partial_\epsilon g_{\alpha\beta} - x_\epsilon \partial_\delta g_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.31)$$

При преобразованиях Лоренца компоненты метрики  $g_{\alpha\beta}$  ведут себя как компоненты ковариантного тензора второго ранга. Их необходимо построить из метрики Лоренца  $\eta_{\alpha\beta}$  и координат точек  $x = \{x^\alpha\}$ . Единственная возможность для инвариантной метрики – это метрика вида

$$g_{\alpha\beta} = A \eta_{\alpha\beta} + B x_\alpha x_\beta,$$

где  $A(x)$  и  $B(x)$  – некоторые функции на  $\mathbb{R}^{1,n-1}$ . Мы не требуем инвариантности метрики  $g_{\alpha\beta}$  относительно трансляций. Поэтому функция  $B$  в общем случае отлична от нуля. Подстановка этой метрики в уравнение Киллинга (1.31) ограничивает вид функций  $A$  и  $B$ . Можно доказать, что они могут быть произвольными функциями от одной переменной

$$s := x^\alpha x^\beta \eta_{\alpha\beta},$$

которая инвариантна относительно преобразований Лоренца. Таким образом, метрика, инвариантная относительно преобразований Лоренца, параметризуется двумя произвольными функциями  $A(s)$  и  $B(s)$ . Ее удобно записать в несколько другом виде

$$g_{\alpha\beta} = f(s)\Pi_{\alpha\beta}^T + g(s)\Pi_{\alpha\beta}^L = f\eta_{\alpha\beta} + (g - f)\frac{x_\alpha x_\beta}{s}, \quad (1.32)$$

где  $\Pi^T$  и  $\Pi^L$  – проекционные операторы:

$$\Pi_{\alpha\beta}^T := \eta_{\alpha\beta} - \frac{x_\alpha x_\beta}{s}, \quad \Pi_{\alpha\beta}^L := \frac{x_\alpha x_\beta}{s},$$

а  $f(s) := A(s)$  и  $g(s) := A(s) + B(s)s$  – произвольные функции.

Нетрудно вычислить определитель метрики (1.32):

$$\det g_{\alpha\beta} = (-f)^{n-1}g. \quad (1.33)$$

Таким образом, лоренц инвариантная метрика вырождена тогда и только тогда, когда  $fg = 0$ . Мы будем предполагать, что функции  $f$  и  $g$  являются достаточно гладкими,  $f > 0$  и  $g \neq 0$ . Кроме этого, предположим также существование предела

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s) - g(s)}{s},$$

которое необходимо, чтобы метрика была определена при  $s = 0$ .

Если не оговорено противное, для подъема и опускания индексов будет использоваться метрика Лоренца  $\eta_{\alpha\beta}$ .

Лоренц инвариантная метрика вида (1.32) при  $f = g$  рассматривалась В. А. Фоком [?].

Метрике (1.32) соответствует инвариантный интервал

$$ds^2 = f dx_\alpha dx^\alpha + (g - f) \frac{(x_\alpha dx^\alpha)^2}{s}.$$

Метрический тензор (1.32) имеет одинаковый вид во всех системах координат, связанных между собой преобразованиями Лоренца. Однако его вид меняется при сдвигах  $x^\alpha \mapsto x^\alpha + a^\alpha$ , поскольку метрика явно зависит от координат, и начало системы отсчета выделено.

Запись метрики (1.32) с помощью проекционных операторов удобна, так как обратная метрика имеет простой вид

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{f} \Pi^{T\alpha\beta} + \frac{1}{g} \Pi^{L\alpha\beta}. \quad (1.34)$$

При  $g > 0$  метрике (1.32) можно поставить в соответствие репер

$$e_\alpha{}^a = \sqrt{f} \delta_\alpha^a + (\sqrt{g} - \sqrt{f}) \frac{x_\alpha x^a}{s}. \quad (1.35)$$

Нетрудно проверить следующие свойства проекционных операторов:

$$\begin{aligned}\Pi^{\alpha\beta}x_\beta &= 0, & \Pi_\alpha^{\alpha\beta} &= n-1, & \partial_\alpha\Pi_{\beta\gamma}^{\alpha\beta} &= -\frac{\Pi_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}x_\gamma + \Pi_{\alpha\gamma}^{\alpha\beta}x_\beta}{s}, \\ \Pi^{\alpha\beta}x_\beta &= x^\alpha, & \Pi_\alpha^{\alpha\beta} &= 1, & \partial_\alpha\Pi_{\beta\gamma}^{\alpha\beta} &= \frac{\Pi_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}x_\gamma + \Pi_{\alpha\gamma}^{\alpha\beta}x_\beta}{s},\end{aligned}$$

которые будут использоваться при проведении вычислений.

Несложные вычисления приводят к следующему выражению для символов Кристоффеля, соответствующих метрике (1.32),

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{f'}{f}(x_\alpha\Pi_\beta^{\alpha\gamma} + x_\beta\Pi_\alpha^{\alpha\gamma}) + \frac{g'}{g}(x_\alpha\Pi_\beta^{\alpha\gamma} + x_\beta\Pi_\alpha^{\alpha\gamma} - x^\gamma\Pi_{\alpha\beta}^{\alpha\gamma}) + \frac{g-f-f's}{sg}x^\gamma\Pi_{\alpha\beta}^{\alpha\gamma}, \quad (1.36)$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу  $s$ . Тензор кривизны для метрики (1.32) имеет вид

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta\gamma}^\delta &= \Pi_{\alpha\gamma}^{\alpha\delta}\Pi_\beta^{\beta\delta} \left[ \frac{(f+f's)^2}{sfg} - \frac{1}{s} \right] + \\ &+ \Pi_{\alpha\gamma}^{\alpha\delta}\Pi_\beta^{\beta\delta} \left[ 2\left(\frac{f+f's}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right)\frac{f+f's}{f} \right] + \\ &+ \Pi_\alpha^{\alpha\delta}\Pi_{\beta\gamma}^{\beta\delta} \left[ -2\left(\frac{f+f's}{g}\right)' + \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right)\frac{f+f's}{g} \right] - (\alpha \leftrightarrow \beta).\end{aligned} \quad (1.37)$$

Свернув это выражение по индексам  $\beta$  и  $\delta$ , получим тензор Риччи

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta} &= \Pi_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} \left[ \frac{n-2}{s} \left( \frac{(f+f's)^2}{fg} - 1 \right) + 2\frac{(f+f's)'}{g} - \left( \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) \frac{f+f's}{g} \right] + \\ &+ \Pi_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}(n-1) \left[ 2\frac{(f+f's)'}{f} - \left( \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) \frac{f+f's}{f} \right].\end{aligned} \quad (1.38)$$

Дальнейшая свертка с обратной метрикой (1.34) дает скалярную кривизну

$$R = (n-1) \left[ \frac{n-2}{fs} \left( \frac{(f+f's)^2}{fg} - 1 \right) + 4\frac{(f+f's)'}{fg} - 2\left( \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) \frac{f+f's}{fg} \right]. \quad (1.39)$$

Пространства постоянной кривизны, определяемые уравнением

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{2K}{n(n-1)}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}), \quad (1.40)$$

с некоторой постоянной  $K$ , автоматически удовлетворяют вакуумным уравнениям Эйнштейна с космологической постоянной. Решим уравнение (1.40) для лоренц-инвариантной метрики (1.32). Для этого опустим последний индекс у тензора кривизны (1.37) с помощью метрики (1.32)

$$\begin{aligned}R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \Pi_{\alpha\gamma}^{\alpha\beta}\Pi_{\beta\delta}^{\beta\delta} \frac{1}{s} \left[ \frac{(f+f's)^2}{g} - f \right] + \\ &+ (\Pi_{\alpha\gamma}^{\alpha\beta}\Pi_{\beta\delta}^{\beta\delta} - \Pi_{\alpha\delta}^{\alpha\beta}\Pi_{\beta\gamma}^{\beta\gamma}) \left[ 2(f+f's)' - \left( \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) (f+f's) \right] - (\alpha \leftrightarrow \beta)\end{aligned} \quad (1.41)$$

и подставим в уравнение (1.40). В результате получим систему дифференциальных уравнений на функции  $f$  и  $g$ :

$$\frac{(f + f's)^2}{sg} - \frac{f}{s} = -\frac{2K}{n(n-1)}f^2, \quad (1.42)$$

$$2(f + f's)' - \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right)(f + f's) = -\frac{2K}{n(n-1)}fg. \quad (1.43)$$

Из первого уравнения получаем решение для функции  $g$ :

$$g = \frac{(f + f's)^2}{f \left(1 - \frac{2K}{n(n-1)}fs\right)}. \quad (1.44)$$

Поскольку для невырожденности метрики необходимо, чтобы  $g \neq 0$ , то при  $s \neq 0$  функция  $f$  должна удовлетворять неравенству

$$f \neq \frac{n(n-1)}{2Ks}, \quad s \neq 0. \quad (1.45)$$

Подстановка выражения (1.44) во второе уравнение (1.43) приводит к тождеству. Таким образом мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 1.6.1.** *Лоренц инвариантная метрика*

$$g_{\alpha\beta} = f\Pi_{\alpha\beta}^T + \frac{(f + f's)^2}{f \left(1 - \frac{2K}{n(n-1)}fs\right)}\Pi_{\alpha\beta}^L, \quad (1.46)$$

где  $f(s)$  – произвольная положительная функция, удовлетворяющая условию (1.45), является метрикой пространства постоянной кривизны. Обратно. Метрику пространства постоянной кривизны можно записать в лоренц инвариантном виде (1.46) для некоторой функции  $f(s)$ .

*Доказательство.* Нам осталось доказать, что произвольную метрику пространства постоянной кривизны можно привести к лоренц инвариантному виду (1.32). Чтобы ответить на этот вопрос, запишем метрику (1.46) в более известной форме. С этой целью зафиксируем функцию  $f$ , положив  $f = g$ . Это равенство с учетом (1.44) сводится к уравнению

$$f'^2s + 2f'f + \frac{2K}{n(n-1)}f^3 = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$f = \frac{C}{(C + \frac{K}{2n(n-1)}s)^2}, \quad C = \text{const.}$$

Постоянная интегрирования убирается растяжкой координат. Поэтому без ограничения общности положим  $C = 1$ . В результате получим метрику постоянной кривизны

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\eta_{\alpha\beta}}{(1 + \frac{K}{2n(n-1)}s)^2}. \quad (1.47)$$

То, что метрику пространства постоянной кривизны можно привести к такому виду – хорошо известный факт. Доказательство этого утверждения нетривиально (см., например, [?]).  $\square$

Проведенные вычисления просто переносятся на случай метрики в евклидовом пространстве, которая инвариантна относительно  $\mathbb{SO}(n)$  вращений. Для этого во всех формулах метрику Лоренца  $\eta_{\alpha\beta}$  нужно заменить на евклидову метрику  $\delta_{\alpha\beta}$ .

Поскольку предел функции  $(g - f)/s$  равен

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g - f}{s} = 2f' + \frac{2K}{n(n-1)}f^2,$$

то выражение для метрики (1.46) определено и при  $s = 0$ .

Теперь решим вакуумные уравнения Эйнштейна с космологической постоянной  $\Lambda$

$$R_{\alpha\beta} = \Lambda g_{\alpha\beta}$$

для лоренц инвариантной метрики. Поскольку число этих уравнений меньше, чем число уравнений в условии постоянства кривизны (1.40), то можно было бы ожидать, что они допускают решения не только с постоянной кривизной. Однако для лоренц инвариантных метрик классы решений совпадают. Действительно, подстановка тензора Риччи (1.38) в уравнения Эйнштейна приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{n-2}{s} \left[ \frac{(f + f's)^2}{fg} - 1 \right] + 2 \frac{(f + f's)'}{g} - \left( \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) \frac{f + f's}{g} = \Lambda f, \quad (1.48)$$

$$(n-1) \left[ 2 \frac{(f + f's)'}{f} - \left( \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) \frac{f + f's}{f} \right] = \Lambda g. \quad (1.49)$$

Второе уравнение при

$$\Lambda = -\frac{2K}{n}$$

совпадает с уравнением (1.43). Линейная комбинация уравнений (1.48)/ $f$  – (1.49)/ $g$  эквивалентна уравнению (1.42).

Таким образом, мы доказали, что все лоренц инвариантные решения вакуумных уравнений Эйнштейна с космологической постоянной исчерпываются пространствами постоянной кривизны. При  $\Lambda > 0$  мы получаем пространство-время де Ситтера, а при  $\Lambda < 0$  – анти-де Ситтера. Эти пространства-времена будут рассмотрены соответственно в разделах 2.4.2 и 2.4.3.

# Глава 2

## Космология

В настоящей главе мы рассмотрим простейшие космологические модели однородной и изотропной вселенной в рамках общей теории относительности. Это направление исследований составляет классический раздел теории гравитации и в настоящее время стало очень актуальным в связи с накоплением большого количества наблюдательных данных.

Модели вселенной, которые рассматриваются в настоящей главе, предполагают, что вселенная заполнена сплошной средой (жидкостью или газом). В начале главы мы рассмотрим кинематические свойства сплошной среды в общей теории относительности. Будет получено, в частности, уравнение Райчаудхури, из которого следует, что при достаточно общих предположениях космологические решения уравнений Эйнштейна должны содержать особенности: большой взрыв или большое сжатие.

Кроме того, мы предполагаем, что вселенная однородна и изотропна (вселенная Фридмана). Для математической формулировки требований к таким моделям необходимо довольно подробное знание свойств трехмерных пространств постоянной кривизны с положительно определенной метрикой. Одно из этих пространств – это евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  нулевой кривизны, которое было рассмотрено в разделе ???. Поэтому в разделах 2.2.1 и 2.2.2 мы рассмотрим трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3$  (пространство положительной кривизны) и двуполостный гиперболоид  $\mathbb{H}^3$ , который иногда называют псевдосферой, (пространство отрицательной кривизны). Эти сведения необходимы для построения моделей, которые рассмотрены в последующих разделах.

### 2.1 Сплошная среда в космологии

При построении космологических моделей в рамках общей теории относительности материя рассматривается как сплошная среда. В настоящем разделе мы рассмотрим кинематику сплошной среды и получим уравнение Райчаудхури. Из этого уравнения вытекает, в частности, что если движение материи безвихревое, а плотность энергии и давление среды положительны, то в космологических моделях неизбежно имеет место либо большой взрыв, либо большое сжатие. Этот вывод важен и является довольно общим, т.к. не использует явный вид решений уравнений Эйнштейна.

#### 2.1.1 Сплошная среда в классической механике

Напомним некоторые сведения из кинематики сплошной среды в классической механике.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  с декартовой системой координат  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ . Основной переменной в механике сплошной среды (жидкости или газа) является достаточно гладкое векторное поле скорости  $u^\mu(t, \mathbf{x})$ , зависящее от времени  $t \in \mathbb{R}$  и точки пространства  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ . Мы предполагаем, что система уравнений

$$\frac{dx^\mu(t, \mathbf{y})}{dt} = u^\mu(t, \mathbf{x}), \quad (2.1)$$

с начальным условием  $x^\mu(t = 0, \mathbf{y}) = y^\mu$  имеет единственное решение при всех временах  $t$  и при всех  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ . Каждое решение данной системы уравнений определяет линию тока  $x^\mu(t, \mathbf{y})$ , вдоль которой движется частица среды, которая проходит через каждую точку пространства  $\mathbf{y}$  в начальный момент времени  $t = 0$ . Линии тока не могут пересекаться, т.к. это противоречит единственности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.181). Другими словами, линии тока заполняют все пространство  $\mathbb{R}^3$ , не имеют лакун и нигде не пересекаются.

Рассмотрим две близкие точки среды

$$p = \{x_p^\mu\}, \quad q = \{x_q^\mu := x_p^\mu + dx_q^\mu\}.$$

Скорости в этих точках в момент времени  $t$  равны

$$u_p = \{u_p^\mu\}, \quad u_q = \{u_q^\mu = u_p^\mu + \partial_\nu u^\mu|_p dx_q^\nu + \mathcal{O}(dx^2)\}.$$

Если эти точки движутся вдоль линий тока, то через время  $dt$  они будут иметь новые координаты

$$\begin{aligned} p &\mapsto \{x_p^\mu + u_p^\mu dt + \mathcal{O}(dt^2, dx^2)\}, \\ q &\mapsto \{x_p^\mu + dx_q^\mu + u_p^\mu dt + \partial_\nu u^\mu|_p dx_q^\nu dt + \mathcal{O}(dt^2, dx^2)\}. \end{aligned}$$

Разность декартовых координат конечных точек имеет вид

$$dx_q^\mu(t + dt) := x_q^\mu(t + dt) - x_p^\mu(t + dt) = \left( \delta_\nu^\mu + \partial_\nu u^\mu|_p dt \right) dx_q^\nu + \mathcal{O}(dt^2, dx^2).$$

Таким образом, частные производные от поля скоростей  $\partial_\nu u^\mu$  имеют смысл относительной скорости двух соседних частиц среды.

Разложим тензор второго ранга  $\partial_\mu u_\nu$ , где  $u_\nu := u^\mu \delta_{\nu\mu}$ , на неприводимые компоненты, выделив из него след  $\theta$  и антисимметричную часть  $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ :

$$\partial_\mu u_\nu = \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \theta, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &:= \partial_\mu u^\mu && - \text{скаляр расширения}, \\ \sigma_{\mu\nu} &:= \frac{1}{2} (\partial_\mu u_\nu + \partial_\nu u_\mu) - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \theta && - \text{тензор сдвига}, \\ \omega_{\mu\nu} &:= \frac{1}{2} (\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu) && - \text{тензор вращения}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Каждая неприводимая компонента имеет физический смысл и название по следующим причинам.

- Пусть  $\sigma_{\mu\nu} = 0$  и  $\omega_{\mu\nu} = 0$ . Тогда смещение точки  $q$  относительно точки  $p$  в первом порядке имеет вид

$$dx_q^\mu(t + dt) = \left(1 + \frac{1}{3}\theta dt\right) dx_q^\mu(t).$$

То есть вектор  $dx_q^\mu(t + dt)$  имеет то же направление, что и  $dx_q^\mu(t)$ , но другую длину. Такое движение среды является изотропным расширением ( $\theta > 0$ ) или сжатием ( $\theta < 0$ ).

- Пусть  $\sigma_{\mu\nu} = 0$  и  $\theta = 0$ . Тогда

$$dx_q^\mu(t + dt) = dx_q^\mu(t) + \omega_\nu^\mu dt dx_q^\nu(t).$$

Ввиду антисимметрии компоненты  $\omega_{\mu\nu}$ , при таком движении вектор  $dx_q^\mu(t)$  поворачивается, не изменяя своей длины. Такое движение соответствует вращению линий тока.

- Пусть  $\omega_{\mu\nu} = 0$  и  $\theta = 0$ . Рассмотрим три точки  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , которые близки к точке  $p$ :

$$q_1 = p + dx_1, \quad q_2 = p + dx_2, \quad q_3 = p + dx_3.$$

Объем параллелепипеда со сторонами  $dx_1$ ,  $dx_2$  и  $dx_3$  равен

$$dV = \varepsilon_{\mu\nu\rho} dx_1^\mu dx_2^\nu dx_3^\rho,$$

где  $\varepsilon_{\mu\nu\rho}$  – полностью антисимметричный тензор третьего ранга (см. приложение ??). Через время  $dt$  вершины параллелепипеда смещаются, и его объем в первом приближении станет равным

$$dV' = dV + Ddt,$$

где

$$D = (\varepsilon_{\mu\nu\sigma} \sigma^\sigma_\rho + \varepsilon_{\mu\sigma\rho} \sigma^\sigma_\nu + \varepsilon_{\sigma\nu\rho} \sigma^\sigma_\mu) dx_1^\mu dx_2^\nu dx_3^\rho.$$

Выражение в скобках антисимметрично по индексам  $\nu, \rho$ . Поэтому его можно свернуть с  $\varepsilon^{\lambda\nu\rho}$ . В результате получим нуль, что следует из свойств тензора деформаций:  $\sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\nu\mu}$  и  $\sigma^\mu_\mu = 0$ . Следовательно,  $D = 0$ . Это означает, что объем параллелепипеда в первом приближении не меняется. Может измениться только его форма. Такое движение называется сдвигом.

Заметим, что при вращении линий тока длина сторон параллелепипеда сохраняется, и поэтому сохраняется его объем. Более того, при вращении сохраняется не только объем, но и форма параллелепипеда, поскольку сохраняются также углы между векторами.

Тензор вращений  $\omega_{\mu\nu}$  взаимно однозначно параметризуется вектором вращений

$$\boldsymbol{\omega} = \left\{ \omega^\mu := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \omega_{\nu\rho} \right\}. \quad (2.4)$$

Из свойств полностью антисимметричного тензора третьего ранга следует равенство

$$\boldsymbol{\omega}^2 := \omega^\mu \omega_\mu = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \geq 0.$$

Вектор вращений направлен вдоль оси поворота, и его длина равна углу поворота.

### 2.1.2 Сплошная среда в релятивистской механике

В релятивистской механике мы поступаем по аналогии с тем, что было проделано в предыдущем разделе для сплошной среды в классической механике.

Рассмотрим топологически тривиальное псевдориманово многообразие  $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^4$ , которое покрыто одной картой  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ . На нем задана метрика  $g_{\alpha\beta}$  лоренцевой сигнатуры. Будем считать, что координата  $x^0$  является временем, и все сечения  $x^0 = \text{const}$  пространственноподобны.

Основной переменной в релятивистской механике сплошной среды является времеподобное векторное поле скорости  $u^\alpha(x)$ . Как и в классической механике, будем считать векторное поле скорости достаточно гладким, и что система уравнений для линий тока

$$\frac{dx^\alpha(s, y)}{ds} = u^\alpha(x)$$

с начальными условиями  $x^\alpha(s = 0, y) = y^\alpha$  имеет единственное решение при всех  $y \in \mathbb{M}$ , определенное для всех значений параметра  $s \in \mathbb{R}$ . Решение данной системы уравнений  $x^\alpha(s, y)$  называется *линией тока* частицы жидкости, проходящей через точку  $y \in \mathbb{M}$ . Как и в случае нерелятивистской среды линии тока заполняют все многообразие  $\mathbb{M}$  без каких либо лакун и самопересечений. Предположим также, что в качестве параметра  $s$  вдоль линий тока выбрана ее длина:

$$ds^2 = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta}.$$

Тогда векторное поле скорости будет иметь единичную длину

$$u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = 1. \quad (2.5)$$

Дифференцирование этого равенства приводит к тождеству

$$u^\beta \nabla_\alpha u_\beta = 0, \quad (2.6)$$

где  $\nabla_\alpha$  – ковариантная производная, построенная по символам Кристоффеля для метрики  $g_{\alpha\beta}$ . Если уравнение (2.6) продифференцировать еще раз, то получим равенство

$$u^\gamma \nabla_\alpha \nabla_\beta u_\gamma + \nabla_\alpha u^\gamma \nabla_\beta u_\gamma = 0, \quad (2.7)$$

которое позволяет выразить вторые производные от вектора скорости через первые (при суммировании по индексу  $\gamma$ ).

Наличие векторного поля скорости позволяет построить проекционные операторы:

$$\Pi_\alpha^{\text{T}\beta} := \delta_\alpha^\beta - u_\alpha u^\beta, \quad \Pi_\alpha^{\text{L}\beta} := u_\alpha u^\beta, \quad (2.8)$$

где  $u_\alpha := u^\beta g_{\beta\alpha}$ . Операторы  $\Pi^{\text{T}}$  и  $\Pi^{\text{L}}$  проектируют тензоры на направления, перпендикулярные и параллельные вектору скорости поскольку справедливы следующие равенства:

$$\Pi_\alpha^{\text{T}\beta} u_\beta = 0, \quad \Pi_\alpha^{\text{L}\beta} u_\beta = u_\beta.$$

Отметим также формулы

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\text{T}} \Pi^{\text{T}\alpha\beta} = 3, \quad \Pi_{\alpha\beta}^{\text{L}} \Pi^{\text{L}\alpha\beta} = 1,$$

которые будут использованы в дальнейшем.

Последующие построения аналогичны тем, которые были проделаны в предыдущем разделе, но с заменой частных производных на ковариантные,  $\partial_\alpha \mapsto \nabla_\alpha$ .

Рассмотрим тензор второго ранга  $\nabla_\alpha u_\beta$ . Если метрика  $g_{\alpha\beta}$  близка к метрике Лоренца, и система координат мало отличается от декартовой, то этот тензор имеет тот же физический смысл, что и в классической механике, как было описано в предыдущем разделе.

Спроектируем ковариантные производные векторного поля скорости на перпендикулярную гиперповерхность:

$$\Pi_\alpha^{\Gamma\gamma} \Pi_\beta^{\Gamma\delta} \nabla_\gamma u_\delta = \Pi_\alpha^{\Gamma\gamma} \nabla_\gamma u_\beta = \nabla_\alpha u_\beta - u_\alpha \dot{u}_\beta, \quad (2.9)$$

где мы воспользовались равенством (2.6), и точка обозначает дифференцирование вдоль поля скорости:

$$\dot{u}_\beta := u^\gamma \nabla_\gamma u_\beta. \quad (2.10)$$

Это – компоненты ускорения мировых линий частиц непрерывной среды. Если  $\dot{u} = 0$ , то частицы непрерывной среды движутся вдоль экстремалей, которые в данном случае совпадают с геодезическими (см. раздел ??).

Напомним, что если градиент давления  $\mathcal{P}$  в жидкости направлен вдоль линий тока, т.е.

$$\Pi_\alpha^{\Gamma\beta} \partial_\beta \mathcal{P} = 0,$$

то, согласно уравнениям релятивистской гидродинамики (??), (??), частицы жидкости движутся вдоль экстремалей.

Как и ранее, выделим из тензора (2.9) след и антисимметричную часть:

$$\Pi_\alpha^{\Gamma\gamma} \Pi_\beta^{\Gamma\delta} \nabla_\gamma u_\delta = \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \Pi_{\alpha\beta}^{\Gamma\Gamma} \theta, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \theta &:= \Pi^{\Gamma\alpha\beta} \nabla_\alpha u_\beta = \nabla_\alpha u^\alpha && - \text{ скаляр расширения,} \\ \sigma_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} (\Pi_\alpha^{\Gamma\gamma} \nabla_\gamma u_\beta + \Pi_\beta^{\Gamma\gamma} \nabla_\gamma u_\alpha) - \frac{1}{3} \Pi_{\alpha\beta}^{\Gamma\Gamma} \theta && - \text{ тензор сдвига,} \\ \omega_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} (\Pi_\alpha^{\Gamma\gamma} \nabla_\gamma u_\beta - \Pi_\beta^{\Gamma\gamma} \nabla_\gamma u_\alpha) && - \text{ тензор вращения.} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Используя производную вдоль векторного поля скорости (2.10), выражения для тензоров сдвига и вращения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} (\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha - u_\alpha \dot{u}_\beta - u_\beta \dot{u}_\alpha) - \frac{1}{3} \Pi_{\alpha\beta}^{\Gamma\Gamma} \theta, \\ \omega_{\alpha\beta} &:= \frac{1}{2} (\nabla_\alpha u_\beta - \nabla_\beta u_\alpha - u_\alpha \dot{u}_\beta + u_\beta \dot{u}_\alpha). \end{aligned}$$

В дальнейшем нам понадобится выражение для полной ковариантной производной ковекторного поля скорости

$$\nabla_\alpha u_\beta = \Pi_\alpha^{\Gamma\gamma} \nabla_\gamma u_\beta + \Pi_\alpha^{\Gamma\gamma} \nabla_\gamma u_\beta = \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \Pi_{\alpha\beta}^{\Gamma\Gamma} \theta + u_\alpha \dot{u}_\beta. \quad (2.13)$$

Отметим также полезные для вычислений формулы

$$\sigma_{\alpha\beta} u^\beta = 0, \quad \omega_{\alpha\beta} u^\beta = 0,$$

которые просто проверяются.

Тензор вращения можно параметризовать псевдовекторным полем

$$\omega^\alpha := \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\beta \omega_{\gamma\delta}, \quad (2.14)$$

где  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  – полностью антисимметричный тензор четвертого ранга (см. приложение ??). Квадрат этого псевдовектора имеет вид

$$\omega^2 := \omega^\alpha \omega_\alpha = \frac{1}{2} \omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}.$$

Псевдовектор вращения времениподобен или нулевой, т.к. правая часть неотрицательна. Это проще всего увидеть в системе координат, сопутствующей векторному полю скорости  $u = (1, 0, 0, 0)$ , в которой

$$\Pi^{t00} = \Pi^{t0\mu} = \Pi^{t\mu0} = 0, \quad \Pi^{t\mu\nu} = g^{\mu\nu}.$$

Из равенства

$$\omega^{\alpha\beta} = \Pi^{\alpha\gamma} \Pi^{\beta\delta} \omega_{\gamma\delta}$$

следует, что в сопутствующей системе координат

$$\omega^{00} = \omega^{0\mu} = \omega^{\mu 0} = 0.$$

Поэтому

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \geq 0$$

в силу отрицательной определенности пространственной части метрики  $g_{\mu\nu}$ .

Кроме этого введем скаляр деформации  $\sigma > 0$  с помощью равенства

$$\sigma^2 := \frac{1}{2} \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \geq 0. \quad (2.15)$$

Он неотрицателен по той же причине, что и скаляр вращения.

Для того, чтобы оправдать предложенные выше построения, рассмотрим нерелятивистский предел. Для этого заменим метрику  $g_{\alpha\beta}$  на метрику Лоренца  $\eta_{\alpha\beta}$  и введем наблюдаемое время  $x^0 = ct$ , где  $c$  – скорость света. В этом случае ковариантные производные совпадают с частными. В первом приближении можно считать, что длина линии тока совпадает с  $x^0$ . Тогда

$$u^0 = u_0 = 1, \quad v^\mu := \frac{dx^\mu}{dt} = cu^\mu.$$

Для отличия трехмерную скорость частицы среды мы обозначили новой буквой  $v^\mu$  (в предыдущем разделе она была обозначена через  $u^\mu$ ). Кроме того, в нерелятивистском пределе  $v^2/c^2 \rightarrow 0$  имеют место формулы:

$$\partial_\mu u_0 \rightarrow 0, \quad \partial_0 u_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{dv_\mu}{dt} \rightarrow 0.$$

Поэтому определение расширения, сдвига и вращения (2.12) в релятивистском случае сводится к соответствующим нерелятивистским компонентам:

$$c\theta \rightarrow \theta_N, \quad c\sigma_{\alpha\beta} \rightarrow \sigma_{N\mu\nu}, \quad c\omega_{\mu\nu} \rightarrow \omega_{N\mu\nu},$$

$$\sigma_{00}, \sigma_{0\mu} \rightarrow 0, \quad \omega_{00}, \omega_{0\mu} \rightarrow 0,$$

где неприводимые компоненты в нерелятивистском случае помечены индексом N.

### 2.1.3 Уравнение Райчаудхури

Получим эволюционные уравнения вдоль линий тока для скаляра расширения и тензоров сдвига и вращения. С этой целью два раза продифференцируем вектор скорости и антисимметризуем:

$$\nabla_\epsilon \nabla_\delta u_\gamma - \nabla_\delta \nabla_\epsilon u_\gamma = -R_{\epsilon\delta\gamma\zeta} u^\zeta, \quad (2.16)$$

где мы воспользовались формулой для коммутатора ковариантных производных (??). Умножим это уравнение на  $u^\epsilon$ . Тогда первое и второе слагаемые примут вид

$$\begin{aligned} u^\epsilon \nabla_\epsilon \nabla_\delta u_\gamma &:= (\nabla_\delta u_\gamma)^\cdot, \\ -u^\epsilon \nabla_\delta \nabla_\epsilon u_\gamma &= -\nabla_\delta \dot{u}_\gamma + \nabla_\delta u^\epsilon \nabla_\epsilon u_\gamma, \end{aligned}$$

где  $\dot{u}_\gamma$  – компоненты ускорения линий тока (2.10). Теперь спроектируем полученное уравнение на перпендикулярные направления:

$$\Pi_\alpha^{\text{t}\gamma} \Pi_\beta^{\text{t}\delta} (\nabla_\delta u_\gamma)^\cdot - \Pi_\alpha^{\text{t}\gamma} \Pi_\beta^{\text{t}\delta} \nabla_\delta \dot{u}_\gamma + \Pi_\alpha^{\text{t}\gamma} \Pi_\beta^{\text{t}\delta} \nabla_\delta u^\epsilon \nabla_\epsilon u_\gamma - R_{\alpha\epsilon\beta\zeta} u^\epsilon u^\zeta = 0, \quad (2.17)$$

где мы воспользовались антисимметрией тензора кривизны:

$$\Pi_\alpha^{\text{t}\gamma} \Pi_\beta^{\text{t}\delta} R_{\gamma\epsilon\delta\zeta} u^\epsilon u^\zeta = R_{\alpha\epsilon\beta\zeta} u^\epsilon u^\zeta.$$

Эволюционное уравнение (2.17) является кинематическим в том смысле, что при его получении мы не использовали уравнений Эйнштейна.

Чтобы получить эволюционные уравнения, разложим уравнение (2.17) на неприводимые компоненты. Оно представляет собой тензор второго ранга с индексами  $\alpha$  и  $\beta$ . Сначала выделим след, свернув его с обратной метрикой  $g^{\alpha\beta}$ . Тогда первое, второе и третье слагаемые примут вид:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \Pi_\alpha^{\text{t}\gamma} \Pi_\beta^{\text{t}\delta} (\nabla_\delta u_\gamma)^\cdot &= \dot{\theta} + \dot{u}^\gamma \dot{u}_\gamma, \\ -g^{\alpha\beta} \Pi_\alpha^{\text{t}\gamma} \Pi_\beta^{\text{t}\delta} \nabla_\delta \dot{u}_\gamma &= -\nabla_\gamma \dot{u}^\gamma - \dot{u}^\gamma \dot{u}_\gamma, \\ g^{\alpha\beta} \Pi_\alpha^{\text{t}\gamma} \Pi_\beta^{\text{t}\delta} \nabla_\delta u^\epsilon \nabla_\epsilon u_\gamma &= 2\sigma^2 - 2\omega^2 + \frac{1}{3}\theta^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для преобразования четвертого слагаемого используем уравнения Эйнштейна, которые запишем в виде

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\kappa} \left[ (\mathcal{E} + \mathcal{P}) u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} (\mathcal{E} - \mathcal{P}) g_{\alpha\beta} \right].$$

Тогда четвертое слагаемое примет вид

$$R_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -\frac{1}{4\kappa} (\mathcal{E} + 3\mathcal{P}).$$

Суммируя все вместе, получаем *уравнение Райчаудхури*

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 - \nabla_\gamma \dot{u}^\gamma + 2(\sigma^2 - \omega^2) + \frac{1}{4\kappa} (\mathcal{E} + 3\mathcal{P}) = 0. \quad (2.19)$$

Это уравнение было получено Райчаудхури [?, ?] для пыли,  $\mathcal{P} = 0$ , без определения тензоров сдвига и вращений. В форме (2.19) оно было получено позже [?].

Теперь выделим из уравнения (2.17) антисимметричную часть. Простые вычисления дают следующие выражения для первого, второго и третьего слагаемого:

$$\begin{aligned}\Pi_{[\alpha}^{\text{T}} \Pi_{\beta]}^{\text{T}} \delta (\nabla_{\delta} u_{\gamma})^{\cdot} &= \Pi_{\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta}^{\text{T}} \delta \dot{\omega}_{\delta \gamma}, \\ -\Pi_{[\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta]}^{\text{T}} \delta \nabla_{\delta} \dot{u}_{\gamma} &= -\Pi_{\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta}^{\text{T}} \delta \nabla_{[\delta} \dot{u}_{\gamma]}, \\ \Pi_{[\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta]}^{\text{T}} \delta \nabla_{\delta} u^{\epsilon} \nabla_{\epsilon} u_{\gamma} &= 2\omega_{[\beta}^{\gamma} \sigma_{\alpha]\gamma} + \frac{2}{3} \theta \omega_{\beta \alpha},\end{aligned}$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию по паре индексов. Четвертое слагаемое при антисимметризации дает нуль, поскольку тензор кривизны симметричен относительно перестановки первой и второй пар индексов. В результате получаем эволюционное уравнение для тензора вращений:

$$\Pi_{\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta}^{\text{T}} \delta \dot{\omega}_{\delta \gamma} - \Pi_{\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta}^{\text{T}} \delta \nabla_{[\delta} \dot{u}_{\gamma]} + 2\omega_{[\beta}^{\gamma} \sigma_{\alpha]\gamma} + \frac{2}{3} \theta \omega_{\beta \alpha} = 0. \quad (2.20)$$

Сейчас построим бесследовую симметричную часть уравнения (2.17). Первые три слагаемых имеют вид

$$\begin{aligned}\Pi_{(\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta)}^{\text{T}} \delta (\nabla_{\delta} u_{\gamma})^{\cdot} - \frac{1}{3} (\dot{\theta} + \dot{u}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma}) \Pi_{\alpha \beta}^{\text{T}} &= \Pi_{\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta}^{\text{T}} \delta \dot{\sigma}_{\delta \gamma} - \frac{1}{3} \dot{u}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma} \Pi_{\alpha \beta}^{\text{T}}, \\ -\Pi_{(\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta)}^{\text{T}} \delta \nabla_{\delta} \dot{u}_{\gamma} + \frac{1}{3} (\nabla_{\gamma} \dot{u}^{\gamma} + \dot{u}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma}) \Pi_{\alpha \beta}^{\text{T}} &= -\Pi_{\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta}^{\text{T}} \delta \nabla_{(\delta} \dot{u}_{\gamma)} + \frac{1}{3} (\nabla_{\gamma} \dot{u}^{\gamma} + \dot{u}^{\gamma} \dot{u}_{\gamma}) \Pi_{\alpha \beta}^{\text{T}}, \\ \Pi_{(\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta)}^{\text{T}} \delta \nabla_{\delta} u^{\epsilon} \nabla_{\epsilon} u_{\gamma} - \frac{1}{3} \left( 2\sigma^2 - 2\omega^2 + \frac{1}{3} \theta^2 \right) \Pi_{\alpha \beta}^{\text{T}} &= \sigma_{\beta}^{\epsilon} \sigma_{\epsilon \alpha} + \omega_{\beta}^{\epsilon} \omega_{\epsilon \alpha} + \\ &+ \frac{2}{3} \theta \sigma_{\beta \alpha} - \frac{1}{3} (2\sigma^2 - 2\omega^2) \Pi_{\alpha \beta}^{\text{T}},\end{aligned}$$

где скобки обозначают симметризацию по паре индексов, и использованы формулы для следов (2.18). Четвертое слагаемое равно

$$\begin{aligned}R_{\alpha \gamma \beta \delta} u^{\gamma} u^{\delta} - \frac{1}{3} R_{\gamma \delta} u^{\gamma} u^{\delta} \Pi_{\alpha \beta}^{\text{T}} &= \\ = C_{\alpha \gamma \beta \delta} u^{\gamma} u^{\delta} + \frac{1}{2} (R_{\alpha \beta} - R_{\alpha \gamma} u^{\gamma} u_{\beta} - R_{\beta \gamma} u^{\gamma} u_{\alpha}) &+ \\ + \frac{1}{6} R_{\gamma \delta} u^{\gamma} u^{\delta} g_{\alpha \beta} - \frac{1}{6} R (g_{\alpha \beta} - u_{\alpha} u_{\beta}) + \frac{1}{3} R_{\gamma \delta} u^{\gamma} u^{\delta} u_{\alpha} u_{\beta}, &\end{aligned} \quad (2.21)$$

где мы разложили тензор кривизны на неприводимые компоненты, выделив тензор Вейля  $C_{\alpha \beta \gamma \delta}$ , тензор Риччи  $R_{\alpha \beta}$  и скалярную кривизну  $R$  (см. раздел ??). Из уравнений Эйнштейна следует, что тензор Риччи имеет следующую структуру

$$R_{\alpha \beta} = A g_{\alpha \beta} + B u_{\alpha} u_{\beta} \quad \Rightarrow \quad R = 4A + B, \quad (2.22)$$

где  $A$  и  $B$  – некоторые функции. Если подставить это выражение в правую часть равенства (2.21), то все слагаемые сократятся за исключением тензора Вейля. Следовательно, эволюционное уравнение для тензора сдвига принимает вид

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta}^{\text{T}} \delta \dot{\sigma}_{\delta \gamma} - \Pi_{\alpha}^{\text{T}} \gamma \Pi_{\beta}^{\text{T}} \delta \nabla_{(\delta} \dot{u}_{\gamma)} + \sigma_{\alpha \gamma} \sigma_{\gamma \beta} + \omega_{\alpha \gamma} \omega_{\gamma \beta} + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha \beta} + \\ + \frac{1}{3} [\nabla_{\gamma} \dot{u}^{\gamma} - 2(\sigma^2 - \omega^2)] \Pi_{\alpha \beta}^{\text{T}} - E_{\alpha \beta} = 0, \quad (2.23)\end{aligned}$$

где

$$E_{\alpha\beta} := C_{\alpha\gamma\beta\delta} u^\gamma u^\delta \quad (2.24)$$

– электрическая компонента тензора Вейля.

Таким образом получены эволюционные уравнения (2.19), (2.20) и (2.222) для всех трех неприводимых компонент тензора  $\nabla_\alpha u_\beta$ . Эти уравнения эквивалентны системе уравнений (2.17).

Из исходных уравнений (2.16) можно получить дополнительные независимые уравнения. Получим еще три (но не все) алгебраически независимых уравнений. Поскольку антисимметризация тензора кривизны по любым трем индексам дает нуль, то полная антисимметризация исходного уравнения (2.16) приводит к равенству

$$\nabla_{[\alpha} \omega_{\beta\gamma]} + \omega_{[\alpha\beta} \dot{u}_{\gamma]} + u_{[\alpha} \nabla_{\beta} \dot{u}_{\gamma]} = 0, \quad (2.25)$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию по трем индексам. Полученное уравнение не зависит от тензора кривизны и, следовательно, от полей материи. Поэтому оно имеет кинематический характер.

Теперь свернем уравнение (2.16) с  $g^{\gamma\delta}$ :

$$\nabla_\epsilon \nabla_\gamma u^\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\epsilon u^\gamma - R_{\epsilon\zeta} u^\zeta = 0.$$

Если тензор Риччи имеет структуру (2.22), то последнее слагаемое обращается в нуль. После проектирования на перпендикулярное направление, т.е. умножения на  $\Pi^{\alpha\epsilon}$ , возникает второе уравнение

$$\Pi^{\alpha\epsilon} \left( \frac{2}{3} \nabla_\epsilon \theta - \nabla_\gamma \sigma_\epsilon^\gamma - \nabla_\gamma \omega_\epsilon^\gamma \right) - (\sigma_\gamma^\alpha + \omega_\gamma^\alpha) \dot{u}^\gamma = 0. \quad (2.26)$$

Хотя оно не зависит от тензора кривизны, полученное уравнение нельзя назвать кинематическим, т.к. при его получении использована структура тензора Риччи (2.22).

Еще одно уравнение возникает после поднятия индексов  $\epsilon, \delta$  в уравнении (2.16) и умножения его на тензор

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\eta\zeta\epsilon\delta} u^\zeta \Pi_\alpha^\eta \Pi_\beta^\gamma.$$

После несложных преобразований получим уравнение

$$2\omega_{(\alpha} \dot{u}_{\beta)} - \Pi_\alpha^\gamma \Pi_\beta^\delta u^\epsilon \varepsilon_{\epsilon\eta\zeta(\gamma} \nabla^\eta [\sigma^\zeta_{\delta)} + \omega^\zeta_{\delta)}] = -H_{\alpha\beta}, \quad (2.27)$$

где

$$H_{\alpha\beta} := \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\gamma\delta\epsilon} C^{\delta\epsilon}_{\beta\zeta} u^\gamma u^\zeta \quad (2.28)$$

– магнитная составляющая тензора Вейля.

Значение полученных эволюционных уравнений (2.19), (2.20), (2.222), (2.25)–(3.181) заключается в том, что они приводят к важным следствиям, если на кинематические характеристики среды наложены ограничения.

**Пример 2.1.1.** Пусть  $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ ,  $\omega_{\alpha\beta} = 0$  и  $\dot{u}^\alpha = 0$ . Тогда уравнения (2.20) и (2.25) тождественно удовлетворяются. Из уравнения (2.26) следует, что скаляр расширения может меняться только вдоль линий тока. Уравнения (2.222) и (3.181) приводят к равенству нулю тензора Вейля.  $\square$

### 2.1.4 Большой взрыв и большое сжатие

Рассмотрим вселенную, которая заполнена непрерывной средой. Допустим, что частицы среды движутся по экстремалям пространства-времени, т.е. ускорение линий тока равно нулю,  $\dot{u} = 0$ . Предположим также, что тензор вращения при движении равен нулю,  $\omega = 0$ .

Теперь введем функцию  $l(s)$  как решение обыкновенного дифференциального уравнения вдоль линий тока

$$\frac{\ddot{l}}{l} := \frac{1}{3}\theta,$$

где  $\dot{l} := u^\alpha \partial_\alpha l$ . Тогда уравнение Райчаудхури (2.19) примет вид

$$3\frac{\ddot{l}}{l} + 2\sigma^2 + \frac{1}{4\kappa}(\mathcal{E} + 3\mathcal{P}) = 0. \quad (2.29)$$

Для всех известных в настоящее время видов материи  $\mathcal{E} > 0$  и  $\mathcal{P} > 0$ . Поэтому из полученного уравнения следует, что  $\ddot{l}/l < 0$ .

Рассмотрим случай, когда  $l > 0$ . Тогда из уравнения (2.29) вытекает, что функция  $l$  является вогнутой, т.е.  $\ddot{l} < 0$ . Это означает, что если к кривой  $l(s)$  провести касательную, то вся кривая будет лежать ниже этой касательной. Зафиксируем некоторую точку  $s = p$ . Тогда в этой точке возможны три случая  $\dot{l} < 0$ ,  $\dot{l} = 0$  и  $\dot{l} > 0$ , которые качественно показаны на рис. 2.1. Если в точке  $p$  производная больше нуля,

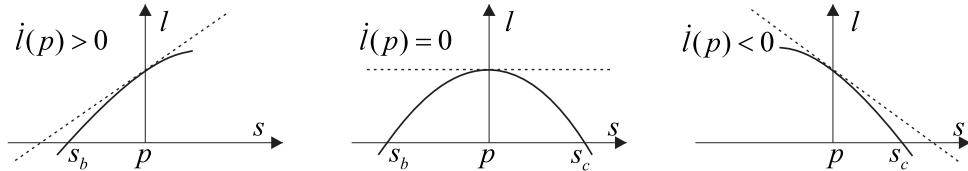


Рис. 2.1: Качественное поведение кривой  $l(s)$  в трех случаях:  $\dot{l}(p) > 0$ ,  $\dot{l}(p) = 0$  и  $\dot{l}(p) < 0$ . В любом случае функция  $l(s)$  обратится в нуль при конечном значении  $s$ .

$\dot{l}(p) > 0$ , то функция  $l(s)$  должна обратиться в нуль при конечном значении  $s < p$ , которое мы обозначим через  $s_b$ . Если  $\dot{l}(p) < 0$ , то функция  $l(s)$  обратится в нуль при некотором значении  $s_c > p$ . При  $\dot{l}(p) = 0$  функция  $l(s)$  обязательно обратится в нуль при некоторых  $s_b < p$  и  $s_c > p$ .

Пусть теперь  $l < 0$ . В этом случае функция  $l$  является выпуклой, т.к.  $\ddot{l} > 0$ . Как и предыдущем случае функция  $l$  обратится в нуль при конечных значениях параметра  $s$ . Нужно просто отразить графики, показанные на рис. 2.1, относительно оси абсцисс  $s$ .

При переходе через точку  $l(s) = 0$  вторая производная  $\ddot{l}$  меняет знак. Это значит, что  $\ddot{l}(s_{b,c}) = 0$ , и точки  $s_b$  и  $s_c$  являются точками перегиба. Допустим, что функция  $l(s)$  при переходе через нуль ведет себя степенным образом. Поскольку она меняет знак, то главный член разложения будет нечетной степени:

$$l \approx C(s - s_{b,c})^{2k+1}, \quad C = \text{const} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\lim_{s \rightarrow s_{b,c}} \frac{\ddot{l}}{l} = \lim_{s \rightarrow s_{b,c}} \frac{2k(2k+1)}{(s - s_{b,c})^2} = \infty.$$

Поэтому из уравнения (2.29) вытекает, что в точках  $s_b$  и  $s_c$  либо  $\mathcal{E} + 3\mathcal{P} \rightarrow \infty$ , либо  $\sigma^2 \rightarrow \infty$ . Это означает, что решения уравнений Эйнштейна будут иметь особенность либо в прошлом, либо в будущем. Поскольку параметр вдоль линий тока выбран каноническим, то эта особенность будет лежать при конечном значении собственного времени. Особенность, лежащая в прошлом, называется *большим взрывом*, а лежащая в будущем – *большим сжатием*.

В англоязычной литературе употребляются термины *big bang* и *big crunch*. Дословный перевод второго термина *большой хруст*. Его также иногда употребляют вместо “большого сжатия”.

Таким образом, при достаточно общих предположениях мы доказали наличие особенности в космологических решениях уравнений Эйнштейна либо в прошлом, либо в будущем. Подчеркнем, что при этом не были использованы какие либо решения уравнений Эйнштейна. Большинство рассмотренных в настоящей главе космологических решений действительно имеет особенности. В то же время существуют отдельные решения без особенностей. В настоящее время принято считать, что окружающая нас вселенная родилась из большого взрыва, что неплохо согласуется с наблюдательными данными.

## 2.2 Трехмерные пространства постоянной кривизны

В настоящем разделе мы рассмотрим трехмерные римановы пространства положительной и отрицательной постоянной кривизны, которые являются однородными и изотропными пространствами. Эти пространства важны, поскольку играют роль пространственных сечений постоянного времени в космологических моделях Фридмана.

### 2.2.1 Трехмерная сфера $\mathbb{S}^3$

Рассмотрим четырехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^4$  с декартовой системой координат  $w, x, y, z$ . Это значит, что метрика в  $\mathbb{R}^4$  имеет вид

$$ds^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.30)$$

Трехмерная сфера  $\mathbb{S}^3$  радиуса  $a$  с центром в начале координат задается уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad a > 0. \quad (2.31)$$

Это уравнение задает множество точек в  $\mathbb{R}^4$ , равноудаленных от начала координат. Мы предполагаем, что топология и дифференцируемая структура на  $\mathbb{S}^3$  заданы вложением  $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ . Тем самым множество точек  $\mathbb{S}^3$  становится компактным трехмерным гладким многообразием. Кроме этого мы предполагаем, что на  $\mathbb{S}^3$  задана метрика, также индуцированная вложением  $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ . Тогда сфера  $\mathbb{S}^3$  превращается в риманово многообразие, как мы увидим, постоянной положительной кривизны.

Чтобы определить индуцированную метрику, решим уравнение (2.31) относительно  $w$ :

$$w = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2},$$

где знаки  $\pm$  соответствуют верхней и нижней полусфере. Тогда

$$dw = \mp \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

Подстановка полученного выражения в евклидов интервал (2.30) приводит к следующему выражению

$$ds^2 = \frac{(a^2 - y^2 - z^2)dx^2 + (a^2 - x^2 - z^2)dy^2 + (a^2 - x^2 - y^2)dz^2}{a^2 - x^2 - y^2 - z^2} + 2\frac{xydxdy + xzdxz + yzdydz}{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}. \quad (2.32)$$

Это и есть метрика на сфере, индуцированная вложением  $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ . Координаты  $x, y, z$  и на нижней, и на верхней полусфере определены внутри трехмерного шара  $\mathbb{B}_a^3$  радиуса  $a$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 < a^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что сфера  $\mathbb{S}^3$  трехмерна.

Индуцированная метрика на  $\mathbb{S}^3$  принимает более простой диагональный вид, если ввести сферические координаты  $r, \theta, \varphi$  в трехмерном евклидовом подпространстве  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$  с координатами  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} x &:= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= r \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Тогда уравнение сферы (2.31) примет вид

$$w^2 + r^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad w = \pm \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Отсюда следует равенство дифференциалов

$$dw = \mp \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Подстановка  $dw$  в интервал (2.30) приводит к диагональной индуцированной метрике

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/a^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.34)$$

Полученная метрика определена при

$$0 < r < a, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Эти значения координат покрывают либо верхнюю полусферу,  $w > 0$ , либо нижнюю,  $w < 0$ . По аналогии с двумерной сферой, мы считаем, что значение  $r = 0$  соответствует либо северному, либо южному полюсу. Экватору сферы  $\mathbb{S}^3$  соответствует максимальное значение  $r = a$ .

Теперь сделаем замену радиальной координаты  $r \mapsto \chi$ :

$$r := a \sin \chi \quad \Rightarrow \quad dr = a \cos \chi d\chi,$$

где  $\chi$  – новая безразмерная радиальная координата. Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (2.35)$$

Новая координата меняется в интервале  $\chi \in (0, \pi/2)$  для каждой из полусфер. Однако метрика (2.35) определена в более широком интервале  $\chi \in (0, \pi)$ . Поэтому можно

считать, что индуцированная метрика в виде (2.35) покрывает всю сферу, за исключением двумерного сечения  $\varphi = 0$ , которое включает северный и южный полюса. При этом две полусфера гладко спиты по экватору  $\chi = \pi/2$ . Таким образом, безразмерные сферические координаты определены при

$$0 < \chi < \pi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Фактически, безразмерные сферические координаты  $\chi, \theta, \varphi$  – это сферические координаты на сфере  $\mathbb{S}^3$  единичного радиуса,  $a = 1$ .

Метрика трехмерной сферы  $\mathbb{S}^3$  в безразмерных сферических координатах диагональна. Следовательно, диагональна также обратная метрика. Поэтому координатные векторные поля  $\partial_\chi, \partial_\theta$  и  $\partial_\varphi$  ортогональны.

Каждое двумерное сечение  $r := a \sin \chi = \text{const}$  трехмерной сферы  $\mathbb{S}^3$ , которое соответствует постоянному радиусу, представляет двумерную сферу  $\mathbb{S}^2_r \subset \mathbb{S}^3$  с обычной индуцированной метрикой

$$dl^2 = a^2 \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad \chi = \text{const.}$$

Площадь поверхности этой сферы максимальна на экваторе  $\chi = \pi/2$  и равна  $4\pi a^2$ . На полюсах,  $\chi = 0, 2\pi$ , площадь поверхности двумерной сферы равна нулю. Для сравнения напомним, что сечения двумерной сферы  $\mathbb{S}^2$  плоскостями  $z = \text{const}$  представляют собой окружности  $\mathbb{S}^1$ , длина которых убывает от экватора к полюсам.

Объем трехмерной сферы просто вычисляется в безразмерных сферических координатах:

$$V = \int_0^\pi d\chi \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi a^3 \sin^2 \chi \sin \theta = 2\pi^2 a^3. \quad (2.36)$$

Метрику (2.34), индуцированную на сфере, можно записать в конформно плоском виде. Действительно, совершим преобразование радиальной координаты  $r \mapsto \rho(r)$  такое, чтобы было выполнено уравнение

$$\frac{1}{1 - r^2/a^2} \left( \frac{dr}{d\rho} \right)^2 = \frac{r^2}{\rho^2}.$$

Это уравнение легко решается. С точностью до несущественной постоянной интегрирования решение имеет вид

$$r = \frac{\rho}{1 + \frac{\rho^2}{4a^2}}. \quad (2.37)$$

После такого преобразования радиальной координаты метрика становится конформно плоской:

$$ds^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{\left(1 + \frac{\rho^2}{4a^2}\right)^2}. \quad (2.38)$$

Эта метрика определена при  $0 < \rho < \infty$ . Северному и южному полюсам ставятся в соответствие точки  $\rho = \infty$  и  $\rho = 0$ . Экватору сферы  $\mathbb{S}^3$  соответствует значение  $\rho = 2a$ . Заметим, что на экваторе метрика сферы невырождена. По аналогии с двумерной сферой будем называть систему координат  $\rho, \theta, \varphi$  *стереографической*.

Рассмотрим координаты  $\rho, \theta, \varphi$  в качестве сферических координат в  $\mathbb{R}^3$  и перейдем к декартовым координатам:

$$\begin{aligned} x^1 &:= \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ x^2 &:= \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ x^3 &:= \rho \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Введем обозначение  $\{x^\mu\} = \{x^1, x^2, x^3\}$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ . Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{dx^2}{\left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)^2}, \quad (2.40)$$

где

$$dx^2 := \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad x^2 := \rho^2 = \delta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu.$$

Индуцированная метрика на сфере  $\mathbb{S}^3$  с стереографических координатах (2.40) определена во всем евклидовом пространстве  $\{x^\mu\} \in \mathbb{R}^3$  и является гладкой. Эти координаты покрывают всю сферу за исключением северного полюса, которому соответствует бесконечно удаленная точка  $\rho = \infty$ . Северная и южная полусфера гладко спиваются по экватору, которому соответствует двумерная сфера  $\rho = 2a$ .

Теперь вычислим геометрические характеристики трехмерной сферы  $\mathbb{S}^3$  для индуцированной метрики (2.40) в стереографических координатах. Начнем с символов Кристоффеля. Несложные вычисления дают следующее выражение

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = -\frac{1}{2a^2 \left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)} (x_\mu \delta_\nu^\rho + x_\nu \delta_\mu^\rho - x^\rho \delta_{\mu\nu}), \quad (2.41)$$

где  $x_\mu := \delta_{\mu\nu} x^\nu$ . Ему соответствует тензор кривизны

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\rho} \delta_{\mu\sigma}}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)^4} = -\frac{g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma}}{a^2}. \quad (2.42)$$

Отсюда следует, что трехмерная сфера  $\mathbb{S}^3$  с индуцированной метрикой является римановым пространством постоянной кривизны. Тензор Риччи и скалярная кривизна имеют вид

$$\begin{aligned} R_{\mu\rho} &= -\frac{2\delta_{\mu\rho}}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{4a^2}\right)^2} = -\frac{2g_{\mu\rho}}{a^2}, \\ R &= -\frac{6}{a^2}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Гауссова кривизна при этом положительна

$$K := -\frac{1}{2}R = \frac{3}{a^2}.$$

Поэтому трехмерная сфера  $\mathbb{S}^3$  с индуцированной метрикой является пространством постоянной положительной кривизны.

Евклидова метрика (2.30) и уравнение (2.31), определяющее вложение  $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ , инвариантны относительно группы вращений  $\mathbb{O}(4)$ , которая действует в исходном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^4$  обычным образом. Группа Ли вращений  $\mathbb{O}(4)$  шестипараметрическая, и поэтому в  $\mathbb{R}^4$  существует шесть линейно независимых векторов Киллинга:

$$\begin{aligned} K_{12} &:= w\partial_x - x\partial_w, & K_{23} &:= x\partial_y - y\partial_x, \\ K_{13} &:= w\partial_y - y\partial_w, & K_{24} &:= x\partial_z - z\partial_x, \\ K_{14} &:= w\partial_z - z\partial_w, & K_{34} &:= y\partial_z - z\partial_y. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Если пронумеровать координаты,  $\{x^i\} := \{w, x, y, z\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , то векторы Киллинга можно записать в компактной форме

$$K_{ij} := x_i \partial_j - x_j \partial_i,$$

где  $x_i := x^j \delta_{ji}$ . Векторы Киллинга удовлетворяют алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$ :

$$[K_{ij}, K_{kl}] = -\delta_{ik}K_{jl} + \delta_{il}K_{jk} + \delta_{jk}K_{il} - \delta_{jl}K_{ik}, \quad (2.45)$$

в чем нетрудно убедиться с помощью прямых вычислений.

Поскольку алгебра Ли векторных полей Киллинга замкнута, то они находятся в инволюции, и, согласно теореме Фробениуса, у распределения векторных полей Киллинга существуют интегральные подмногообразия, которыми, как мы увидим, являются сферы  $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ .

Для того, чтобы получить явные выражения для векторных полей Киллинга на сфере  $\mathbb{S}^3$  проделаем следующее. Переменные  $r, \chi, \theta, \varphi$  можно рассматривать, как локальные координаты в  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned} w &:= r \cos \chi, & x &:= r \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \\ z &:= r \sin \chi \cos \theta, & y &:= r \sin \chi \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что значения  $\chi = 0, \pi$  соответствуют северному и южному полюсу, а  $\chi = \pi/2$  – экватору.

В дальнейшем нам понадобятся следующие формулы:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \sin^2 \chi, \\ w^2 + x^2 + y^2 + z^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Обратные преобразования координат имеют вид:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}, \\ \chi &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{w}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Для нахождения явного вида векторов Киллинга будут использованы частные производные, определяющие дифференциал отображения  $(w, x, y, z) \mapsto (r, \chi, \theta, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial w} &= \cos \chi, & \frac{\partial \theta}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r \sin \chi}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r \sin \chi}, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \sin \chi \cos \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial z} &= -\frac{\sin \theta}{r \sin \chi}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial w} &= -\frac{\sin \chi}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial x} &= \frac{\cos \chi \sin \theta \cos \varphi}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{\sin \varphi}{r \sin \chi \sin \theta}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} &= \frac{\cos \chi \sin \theta \sin \varphi}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\cos \varphi}{r \sin \chi \sin \theta}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial z} &= \frac{\cos \chi \cos \theta}{r}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Тогда несложные вычисления приводят к следующим выражениям для векторов Киллинга в новых координатах:

$$\begin{aligned}
 K_{12} &= \sin \theta \cos \varphi \partial_x + \operatorname{ctg} \chi \cos \theta \cos \varphi \partial_\theta - \frac{\operatorname{ctg} \chi \sin \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi, \\
 K_{13} &= \sin \theta \sin \varphi \partial_x + \operatorname{ctg} \chi \cos \theta \sin \varphi \partial_\theta + \frac{\operatorname{ctg} \chi \cos \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi, \\
 K_{14} &= \cos \theta \partial_x - \operatorname{ctg} \chi \sin \theta \partial_\theta, \\
 K_{23} &= \partial_\varphi, \\
 K_{24} &= -\cos \varphi \partial_\theta + \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \partial_\varphi, \\
 K_{34} &= -\sin \varphi \partial_\theta - \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \partial_\varphi.
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Мы видим, что все шесть векторов Киллинга направлены вдоль касательных векторов  $\partial_x$ ,  $\partial_\theta$  и  $\partial_\varphi$ . Следовательно, гиперповерхности, выделяемые равенством  $r = \text{const}$ , являются интегральными гиперповерхностями распределения векторных полей Киллинга. Это в точности трехмерные сферы  $\mathbb{S}^3$ , и векторные поля Киллинга касательны к ним. Векторных поля Киллинга линейно независимы. Поскольку сфера трехмерна, то между векторными полями Киллинга можно написать линейную зависимость, коэффициентами которой будут не числа, а функции. Ситуация здесь аналогична вложению двумерной сферы  $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ , которое было рассмотрено в разделе ??.

Таким образом, векторные поля (2.47) являются векторными полями Киллинга на сфере  $\mathbb{S}^3$ , вложенной в четырехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ . Они удовлетворяют алгебре Ли (2.45), т.к. коммутатор векторных полей не зависит от выбора системы координат. При желании векторы Киллинга (2.47) можно записать в любой другой системе координат на сфере  $\mathbb{S}^3$ .

Согласно теореме 1.3.1 шесть – это максимально возможное число линейно независимых векторов Киллинга на трехмерном многообразии, и сфера  $\mathbb{S}^3$  является пространством постоянной кривизны. Последнее утверждение уже было проверено с помощью прямых вычислений.

Рассмотрим южный полюс сферы  $x = y = z = 0, w = -a$ . Подгруппа группы изометрий сферы, оставляющей южный полюс неподвижным, является группа Ли трехмерных вращений  $\mathbb{SO}(3)$ . Это – группа изотропии южного полюса. Ее генераторами являются векторные поля Киллинга  $K_{23}$ ,  $K_{24}$  и  $K_{34}$ , которые мы рассмотрим в декартовой системе координат (2.47), т.к. она невырождена в южном полюсе. Они обращаются в нуль в южном полюсе, и поэтому эта точка является неподвижной относительно действия подгруппы  $\mathbb{SO}(3) \subset \mathbb{SO}(4)$ . В южном полюсе остальные векторные поля Киллинга принимают вид

$$K_{12}^\circ = -a\partial_x, \quad K_{13}^\circ = -a\partial_y, \quad K_{14}^\circ = -a\partial_z,$$

т.е. имеют тот же вид, что и трансляции в трехмерном евклидовом пространстве. Мы видим, что эти векторные поля играют роль трансляций для южного полюса. Поэтому многообразие  $\mathbb{S}^3$  однородно и изотропно в окрестности южного полюса. Из явного вида коммутатора векторных полей Киллинга (2.45) следует, что векторы Киллинга  $K_{12}$ ,  $K_{13}$  и  $K_{14}$  не образуют подалгебры в алгебре Ли  $\mathfrak{so}(4)$  и, следовательно, не генерируют никакой подгруппы в группе Ли  $\mathbb{SO}(4)$ . Это отличает “трансляции” в группе  $\mathbb{SO}(4)$  от трансляций в группе Пуанкаре, где они образуют подгруппу. Одно и то же векторное поле Киллинга может генерировать для одной точки сферы вращение, а для другой – трансляцию.

Поскольку группа Ли изометрий  $\mathbb{SO}(4)$  действует на сфере  $\mathbb{S}^3$  транзитивно, то все, сказанное выше о южном полюсе, справедливо для любой точки сферы. Поэтому сфера  $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$  является однородным и изотропным пространством в смысле определения, данного в разделе 1.3.

Трехмерная сфера  $\mathbb{S}^3$  естественным образом вкладывается в четырехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^4$ , как было описано в настоящем разделе. Группа вращений  $\mathbb{SO}(4)$  действует на сфере транзитивно, т.е. для любых двух точек найдется такое вращение, которое переводит одну точку в другую (см. главу ??). Следовательно, она является однородным пространством согласно определению, данному в конце раздела ???. Подгруппа изотропии каждой точки сферы изоморфна группе трехмерных вращений  $\mathbb{SO}(3)$ . Поэтому согласно теореме ?? между точками сферы и точками факторпространства  $\mathbb{SO}(4)/\mathbb{SO}(3)$  существует взаимно однозначное соответствие. Более того, из теоремы ?? следует, что на факторпространстве существует единственная структура существенно аналитического многообразия. Поэтому сфера, как многообразие, диффеоморфна факторпространству

$$\mathbb{S}^3 \approx \frac{\mathbb{SO}(4)}{\mathbb{SO}(3)}. \quad (2.48)$$

С другой стороны, на трехмерной сфере была определена групповая структура ??

$$\mathbb{S}^3 \approx \mathbb{SU}(2). \quad (2.49)$$

Группа унитарных матриц  $\mathbb{SU}(2)$  действует на сфере транзитивно и свободно, т.е. любой элемент группы, отличный от единичного, сдвигает все точки многообразия. Поэтому сфера  $\mathbb{S}^3$  является главным однородным пространством, которое можно просто отождествить с  $\mathbb{SU}(2)$ .

## 2.2.2 Двуполостный гиперболоид $\mathbb{H}^3$

Рассмотрим четырехмерное пространство Минковского  $\mathbb{R}^{3,1}$  с декартовой системой координат  $x, y, z, w$  и метрикой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dw^2. \quad (2.50)$$

Двуполостный гиперболоид  $\mathbb{H}^3$  “радиуса”  $a$  с центром в начале координат задается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -a^2, \quad a > 0. \quad (2.51)$$

При работе с трехмерным гиперболоидом  $\mathbb{H}^3$  полезно иметь перед глазами картинку ??, где показано вложение двумерного двуполостного гиперболоида  $\mathbb{H}^2$  в трехмерное пространство Минковского  $\mathbb{R}^{1,2}$ .

Будем считать, что топология, дифференцируемая структура и метрика на  $\mathbb{H}^3$  индуцированы вложением  $\mathbb{H}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^{3,1}$ .

Из уравнения (2.51), определяющего вложение, можно исключить координату  $w$ :

$$w = \pm \sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + z^2},$$

где знак  $\pm$  соответствует северной и южной полам гиперболоида. Отсюда следует, что двуполостный гиперболоид состоит из двух компонент связности: северной и южной. Для дифференциалов справедлива формула

$$dw = \pm \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Подстановка полученного выражения в евклидов интервал (2.50) приводит к индуцированной метрике

$$ds^2 = \frac{(a^2 + y^2 + z^2)dx^2 + (a^2 + x^2 + z^2)dy^2 + (a^2 + x^2 + y^2)dz^2}{a^2 + x^2 + y^2 + z^2} + \\ - 2 \frac{xydxdy + xzdxz + yzdydz}{a^2 + x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.52)$$

Координаты  $x, y, z$  можно выбрать в качестве координат на двуполостном гиперболоиде  $\mathbb{H}^3$ . На каждой поле гиперболоида они пробегают все евклидово пространство  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ .

Для определенности выберем северную полу гиперболоида. Она диффеоморфна  $\mathbb{R}^3$ , некомпактна, и система координат  $x, y, z$  является глобальной, т.е. покрывает всю полу гиперболоида. Для нее сохраним прежнее обозначение  $\mathbb{H}^3$ .

Индуцированная метрика на гиперболоиде  $\mathbb{H}^3$  принимает более простой диагональный вид, если ввести сферические координаты  $r, \theta, \varphi$  в подпространстве  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{3,1}$  с координатами  $x, y, z$  (2.33). Тогда уравнение гиперболоида примет вид

$$r^2 - w^2 = -a^2 \quad \Leftrightarrow \quad w = \pm \sqrt{a^2 + r^2}.$$

Отсюда следует равенство дифференциалов

$$dw = \pm \frac{rdr}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Подстановка  $dw$  в исходный интервал (2.50) приводит к диагональной индуцированной метрике

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/a^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (2.53)$$

Сферические координаты определены на всей верхней поле гиперболоида:

$$0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Теперь сделаем замену радиальной координаты  $r \mapsto \chi$ :

$$r := a \operatorname{sh} \chi \quad \Rightarrow \quad dr = a \operatorname{ch} \chi d\chi,$$

где  $\chi \in (0, \infty)$  – новая безразмерная радиальная координата. Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = a^2 [d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (2.54)$$

Каждое двумерное сечение  $r = a \operatorname{sh} \chi = \text{const}$  трехмерного гиперболоида  $\mathbb{H}^3$  представляет собой двумерную сферу  $\mathbb{S}_r^2 \subset \mathbb{H}^3$  с обычной индуцированной метрикой. Площадь этой сферы равна нулю в вершине  $\chi = 0$  и бесконечно возрастает при  $\chi \rightarrow \infty$ .

Легко проверить, что объем каждой полы двуполостного гиперболоида бесконечен.

Теперь запишем метрику двуполостного гиперболоида  $\mathbb{H}^3$  в стереографических координатах, которые часто встречаются в приложениях. Как и в случае трехмерной сферы  $\mathbb{S}^3$  совершим преобразование радиальной координаты  $r \mapsto \rho(r)$  такое, чтобы было выполнено уравнение

$$\frac{1}{1 + r^2/a^2} \left( \frac{dr}{d\rho} \right)^2 = \frac{r^2}{\rho^2}.$$

С точностью до несущественной постоянной интегрирования решение имеет вид

$$r = \frac{\rho}{1 - \frac{\rho^2}{4a^2}}.$$

После этого преобразования радиальной координаты метрика становится конформно плоской:

$$ds^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{\left(1 - \frac{\rho^2}{4a^2}\right)^2}. \quad (2.55)$$

Метрика двуполостного гиперболоида  $\mathbb{H}^3$  определена внутри шара  $\rho < \frac{1}{2a}$ . Значение  $\rho = 0$  соответствует вершине гиперболоида  $r = 0$ , а  $\rho = 2a$  – бесконечно удаленной точке  $r = \infty$ .

В евклидовом пространстве  $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$  можно ввести декартовы координаты (2.39). Тогда метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{dx^2}{\left(1 - \frac{x^2}{4a^2}\right)^2}. \quad (2.56)$$

Она отличается от метрики трехмерной сферы (2.40) только формальной заменой  $a^2 \mapsto -a^2$ .

Геометрические характеристики двуполостного гиперболоида получаются из формул (2.42)–(2.43) заменой  $a^2 \mapsto -a^2$ :

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}}{a^2}, \\ R_{\mu\rho} &= \frac{2g_{\mu\rho}}{a^2}, \\ R &= \frac{6}{a^2}, \quad K = -\frac{3}{a^2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Отсюда следует, что двуполостный гиперболоид  $\mathbb{H}^3$  с индуцированной метрикой является пространством постоянной отрицательной кривизны.

Лоренцева метрика (2.50) и уравнение (2.51), определяющее вложение, инвариантны относительно группы Лоренца  $\mathbb{O}(3, 1)$ , которая действует в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{3,1}$  обычным образом. Группа Ли  $\mathbb{O}(3, 1)$  шестипараметрическая, и поэтому в  $\mathbb{R}^{3,1}$  существует шесть векторов Киллинга:

$$K_{ij} := x_i \partial_j - x_j \partial_i, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.58)$$

где  $\{x^i\} := \{x, y, z, w\}$ , и  $x_i := x^j \eta_{ji}$ ,  $\eta_{ij} := \text{diag}(+++-)$ . Нетрудно проверить, что векторные поля Киллинга удовлетворяют алгебре Ли  $\mathfrak{so}(3, 1)$ :

$$[K_{ij}, K_{kl}] = -\eta_{ik}K_{jl} + \eta_{il}K_{jk} + \eta_{jk}K_{il} - \eta_{jl}K_{ik}. \quad (2.59)$$

Чтобы получить явные выражения для векторов Киллинга на  $\mathbb{H}^3$  поступим так же, как и в случае сферы  $\mathbb{S}^3$ . А именно, будем рассматривать переменные  $r, \chi, \theta, \varphi$  в качестве координат в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{3,1}$ :

$$\begin{aligned} x &:= r \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi, & w &:= r \cosh \chi, \\ y &:= r \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi, & z &:= r \sinh \chi \cos \theta. \end{aligned}$$

При этом вершине гиперболоида соответствует значение  $\chi = 0$ .

Нетрудно проверить следующие формулы:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \operatorname{sh}^2 \chi \sin^2 \theta, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \operatorname{sh}^2 \chi, \\ -x^2 - y^2 - z^2 + w^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Обратные преобразования координат имеют вид

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{w^2 - x^2 - y^2 - z^2} \\ \chi &= \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{w}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Частные производные координат  $r, \chi, \theta, \varphi$  по координатам  $x, y, z, w$  легко вычисляются и имеют вид (2.46) с заменой

$$\sin \chi \mapsto \operatorname{sh} \chi, \quad \cos \chi \mapsto \operatorname{ch} \chi.$$

Поскольку мы находимся в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{3,1}$ , то декартовы координаты с опущенным индексом имеют вид  $\{x_i\} = \{x, y, z, -w\}$ . Теперь нетрудно вычислить векторы Киллинга:

$$\begin{aligned} K_{12} &= \partial_\varphi, \\ K_{13} &= -\cos \varphi \partial_\theta + \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \partial_\varphi, \\ K_{14} &= \sin \theta \cos \varphi + \operatorname{cth} \chi \cos \theta \cos \varphi \partial_\theta - \frac{\operatorname{cth} \chi \sin \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi, \\ K_{23} &= -\sin \varphi \partial_\theta - \operatorname{cth} \theta \cos \varphi \partial_\varphi, \\ K_{24} &= \sin \theta \sin \varphi \partial_\chi + \operatorname{cth} \chi \cos \theta \sin \varphi \partial_\theta + \frac{\operatorname{cth} \chi \cos \varphi}{\sin \theta} \partial_\varphi, \\ K_{34} &= \cos \theta \partial_\chi - \operatorname{cth} \chi \sin \theta \partial_\theta. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Как и для сферы  $\mathbb{S}^3$  распределение векторных полей Киллинга находится в инволюции и, согласно теореме Фробениуса, определяет интегральные подмногообразия в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{3,1}$ . Этими интегральными подмногообразиями являются двуполостные гиперболоиды  $\mathbb{H}^3$ , определяемые равенством  $r = a$ . Таким образом, на двуполостном гиперболоиде определено максимальное число (шесть) линейно независимых векторных полей Киллинга (2.60). Следовательно, согласно теореме 1.3.1, двуполостный гиперболоид  $\mathbb{H}^3$  является пространством постоянной кривизны, что уже было проверено нами с помощью прямых вычислений.

Рассмотрим вершину северной полы гиперболоида  $x = y = z = 0, w = a$ . Группа изометрий этой точки является группа Ли трехмерных вращений  $\mathbb{SO}(3)$ . Ее генераторами являются векторные поля Киллинга  $K_{12}, K_{13}$  и  $K_{23}$ , которые мы рассмотрим в декартовой системе координат (2.58). Они обращаются в нуль в вершине, и поэтому эта точка является неподвижной относительно действия подгруппы  $\mathbb{SO}(3) \subset \mathbb{SO}(3, 1)$ . В вершине северной полы гиперболоида остальные векторные поля Киллинга принимают вид

$$K_{14}^\circ = a \partial_x, \quad K_{24}^\circ = a \partial_y, \quad K_{34}^\circ = a \partial_z,$$

т.е. имеют тот же вид, что и трансляции в трехмерном евклидовом пространстве. Поэтому эти векторные поля играют роль трансляций для вершины северной полы гиперболоида. Следовательно, многообразие  $\mathbb{H}^3$  однородно и изотропно в окрестности вершины северной полы гиперболоида. Из явного вида коммутатора векторных полей Киллинга (2.59) вытекает, что векторы Киллинга  $K_{14}$ ,  $K_{24}$  и  $K_{34}$  не образуют подалгебры в алгебре Ли  $\mathfrak{so}(3, 1)$  и, следовательно, не генерируют никакой подгруппы в группе Ли  $\mathbb{SO}(3, 1)$ . Это отличает “трансляции” в группе  $\mathbb{SO}(3, 1)$  от трансляций в группе Пуанкаре, где они образуют подгруппу.

Поскольку группа Ли изометрий  $\mathbb{O}(3, 1)$  действует на двуполостном гиперболоиде  $\mathbb{H}^3$  транзитивно, то все, сказанное выше о вершине северной полы гиперболоида, справедливо для любой точки  $\mathbb{H}^3$ . Поэтому двуполостный гиперболоид  $\mathbb{H}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^{3,1}$  является однородным и изотропным пространством в смысле определения, данного в разделе 1.3.

Группа Лоренца  $\mathbb{SO}(3, 1)$  действует на верхней поле гиперболоида  $\mathbb{H}^3$  транзитивно. Поэтому верхняя пола гиперболоида является однородным пространством. Группа изотропии произвольной точки из  $\mathbb{H}^3$  изоморфна группе трехмерных вращений  $\mathbb{SO}(3)$ . Поэтому, как многообразие, верхняя пола гиперболоида  $\mathbb{H}^3$  изоморфна фактор пространству

$$\mathbb{H}^3 \approx \frac{\mathbb{SO}(3, 1)}{\mathbb{SO}(3)}. \quad (2.61)$$

## 2.3 Вселенная Фридмана

Во вселенной очень много объектов, типичными представителями которых являются звезды, вокруг которых вращаются планеты. Звезды объединены в галактики, которые, в свою очередь, образуют скопления галактик. Кроме этого во вселенной присутствует электромагнитное излучение, метеориты, кометы и множество других объектов, о многих из которых мы в настоящее время, вполне возможно, и не догадываемся. К настоящему времени человечество накопило довольно много данных, полученных в результате наблюдений за звездным небом.

Согласно современным наблюдательным данным трехмерное пространство, которое нас окружает, в каждый момент времени  $t := x^0$  в крупном масштабе является однородным и изотропным. Правильнее сказать, что современные данные не противоречат предположению об однородности и изотропии вселенной, которые являются естественными с физической точки зрения. Физически однородность пространства означает, что свойства вселенной не зависят от того, какая точка выбрана в качестве начала системы координат, а изотропия – что свойства вселенной не зависят от направления, выбранного в каждой точке пространства. Однородность и изотропию вселенной часто называют *космологическим принципом*. Слова “в крупном масштабе” следует понимать по аналогии с однородностью газа: нельзя говорить об однородности в малых областях вселенной; она однородна только после усреднения по достаточно большим областям пространства, включающим много скоплений галактик.

Об изотропии вселенной говорит изотропия реликтового микроволнового излучения, которое было открыто А. Пензиасом и Р. Вилсоном в 1965 году [?]. За это открытие они получили нобелевскую премию. Впоследствии реликтовое излучение было измерено в широком диапазоне частот. С высокой степенью точности оно является изотропным и неполяризованным, а его спектр соответствует излучению абсолютно черного тела с температурой около  $2,7^\circ K$ .

Для построения модели вселенной в рамках общей теории относительности слов однородная и изотропная вселенная недостаточно. Определение и математический смысл этим словам был дан в разделе 1.3. Там было доказано, что однородное и изотропное многообразие является пространством постоянной кривизны. Верно также обратное утверждение: если (псевдо-)риманово многообразие является пространством постоянной кривизны в смысле определения (??), то оно является однородным и изотропным. Для построения космологической модели мы требуем, чтобы все сечения пространства-времени, соответствующие постоянному времени, и которые мы предполагаем пространственноподобными, были однородными и изотропными, т.е. пространствами постоянной кривизны, которые имеют максимально возможное число (шесть) векторов Киллинга. При этом в каждой точке пространства три векторных поля Киллинга генерируют группу вращений  $\mathbb{O}(3)$  (изотропия вселенной) и три векторных поля Киллинга – симметрию относительно “трансляций” (однородность вселенной), как было показано в разделах 2.2.1 и 2.2.2.

**Замечание.** Согласно предложению 1.3.1 требование однородности многообразия является излишним, поскольку любое многообразие, изотропное в каждой своей точке, является однородным. Тем не менее мы будем говорить об однородной и изотропной вселенной, как это принято в современной литературе.  $\square$

### 2.3.1 Метрика однородной и изотропной вселенной

При рассмотрении моделей вселенных Фридмана мы предполагаем, что пространственные сечения постоянного времени  $t = \text{const}$  являются пространствами постоянной кривизны. В рассматриваемом случае под пространством постоянной кривизны мы понимаем пару  $(\mathbb{S}, \overset{\circ}{g})$ , где  $\mathbb{S}$  – трехмерное многообразие, и  $\overset{\circ}{g}$  – заданная на нем метрика, которая удовлетворяет равенству

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\overset{\circ}{K}}{3} \left( \overset{\circ}{g}_{\mu\rho} \overset{\circ}{g}_{\nu\sigma} - \overset{\circ}{g}_{\mu\sigma} \overset{\circ}{g}_{\nu\rho} \right), \quad (2.62)$$

где  $\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$  – тензор кривизны для метрики  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  и  $\overset{\circ}{K} \in \mathbb{R}$  – некоторая постоянная (гауссова кривизна). Напомним, что на пространственных сечениях мы выбираем отрицательно определенную метрику. Поэтому в правой части равенства (2.62) стоит знак плюс. Соответствующий тензор Риччи и скалярная кривизна имеют вид

$$\overset{\circ}{R}_{\mu\nu} = \frac{2\overset{\circ}{K}}{3} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \quad \overset{\circ}{R} = 2\overset{\circ}{K}. \quad (2.63)$$

Тензор кривизны определяет тензор Вейля

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\sigma} := R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2} (R_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - R_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - R_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} + R_{\nu\sigma}g_{\mu\rho}) + \\ + \frac{1}{6} R (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}). \end{aligned}$$

Прямая подстановка в это выражение тензора кривизны (2.62) показывает, что тензор Вейля для пространства постоянной кривизны равен нулю

$$\overset{\circ}{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0.$$

Это значит, что пространство постоянной кривизны является конформно плоским. Действительно, хорошо известно, что метрика пространства постоянной кривизны в стереографических координатах является конформно евклидовой (или лоренцевой, если сигнатура метрики лоренцева).

Координаты на  $\mathbb{S}$  можно масштабировать таким образом, что постоянная  $\overset{\circ}{K}$  будет принимать только три значения:  $\overset{\circ}{K} = 1, 0, -1$ . Поэтому возможны три случая:  $\overset{\circ}{K} = 1$ ,  $\mathbb{S} \approx \overset{\circ}{\mathbb{S}^3}$  – трехмерная сфера (пространство положительной кривизны, замкнутая вселенная);  $\overset{\circ}{K} = 0$ ,  $\mathbb{S} \approx \overset{\circ}{\mathbb{R}^3}$  – трехмерное евклидово пространство (пространство нулевой кривизны, открытая вселенная) и  $\overset{\circ}{K} = -1$ ,  $\mathbb{S} \approx \overset{\circ}{\mathbb{H}^3}$  – трехмерное гиперболическое пространство или псевдосфера (пространство отрицательной кривизны, открытая вселенная). В последних двух случаях вселенная также может быть замкнута, если евклидово  $\mathbb{R}^3$  или гиперболическое  $\mathbb{H}^3$  пространства факторизовать по группе преобразований, действующей свободно и собственно разрывно. Например, для евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  после факторизации мы получим трехмерный цилиндр или тор.

**Определение.** Вселенная  $(\mathbb{M}, g)$  называется однородной и изотропной, если она представляет собой сплетенное произведение прямой  $t \in \mathbb{R}$  на трехмерное пространство постоянной кривизны:  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ .  $\square$

Определение сплетенного произведения было дано в разделе [??](#). В рассматриваемом случае это означает, что как многообразие пространство-время представляет собой топологическое произведение оси времени на пространство постоянной кривизны,  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ , а метрика в естественной системе координат имеет вид

$$ds^2 = dt^2 + a^2(t) \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.64)$$

где  $x^\mu$  и  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  – координаты и отрицательно определенная метрика на  $\mathbb{S}$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ . Функция  $a(t) > 0$  предполагается достаточно гладкой и называется *масштабным множителем*.

Метрика (2.64) имеет тот же вид, что и метрика (1.29) для многообразий с максимально симметричными подпространствами. Следовательно, метрика (2.64) описывает однородную и изотропную вселенную.

Метрика (2.64) имеет блочно диагональный вид, и, в соответствии с результатами раздела [??](#), часы во всей вселенной можно синхронизировать. Поэтому система координат  $\{t, x^\mu\}$  является синхронной, и координата  $t$  называется *космологическим временем*. Ситуация здесь аналогична тому, что имеет место в механике Ньютона: наблюдаемое время  $t$  едино для всех точек вселенной. Сравнение наблюдательных космологических данных с теорией проводится, как правило, с использованием метрики в виде (2.64). К сожалению, эта процедура не является инвариантной, т.к. вид метрики зависит от выбора системы отсчета.

Впервые метрику вида (2.64) для космологических моделей вселенных рассмотрел А. Фридман [\[?, ?\]](#), и она называется *метрикой Фридмана*. Позже эта метрика несколько раз переоткрывалась [\[?, ?, ?\]](#).

Вычислим геометрические характеристики метрики (2.64), не фиксируя координат на пространствах постоянной кривизны. Простые вычисления показывают, что

только четыре символа Кристоффеля отличны от нуля:

$$\begin{aligned}\Gamma_{0\mu}^{\nu} &= \Gamma_{\mu 0}^{\nu} = \frac{\dot{a}}{a} \delta_{\mu}^{\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu}^0 &= -a \dot{a} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho},\end{aligned}\tag{2.65}$$

где  $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}$  – символы Кристоффеля для метрики  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ . Тензор кривизны имеет только две отличные от нуля независимые компоненты:

$$\begin{aligned}R_{0\mu 0\nu} &= a \ddot{a} \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= a^2 \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + a^2 \dot{a}^2 (\overset{\circ}{g}_{\mu\rho} \overset{\circ}{g}_{\nu\sigma} - \overset{\circ}{g}_{\mu\sigma} \overset{\circ}{g}_{\nu\rho}),\end{aligned}\tag{2.66}$$

где  $\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$  – тензор кривизны для метрики  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ . Теперь вычислим тензор Риччи и скалярную кривизну:

$$\begin{aligned}R_{00} &= 3 \frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{\mu\nu} &= \left( a \ddot{a} + 2 \dot{a}^2 + \frac{2}{3} \overset{\circ}{K} \right) \overset{\circ}{g}_{\mu\nu}, \\ R &= \frac{2}{a^2} (3a \ddot{a} + 3\dot{a}^2 + \overset{\circ}{K}),\end{aligned}\tag{2.67}$$

где мы воспользовались выражением для тензора Риччи пространства постоянной кривизны (2.63).

Зная тензор кривизны (2.66), нетрудно вычислить тензор Вейля

$$\begin{aligned}C_{0\mu 0\nu} &= 0, \quad C_{0\mu\nu\rho} = 0, \\ C_{\mu\nu\rho\sigma} &= -\frac{2}{3} a^2 \overset{\circ}{K} (\overset{\circ}{g}_{\mu\rho} \overset{\circ}{g}_{\nu\sigma} - \overset{\circ}{g}_{\mu\sigma} \overset{\circ}{g}_{\nu\rho}).\end{aligned}\tag{2.68}$$

Заметим, что скалярная кривизна (2.67), которая является геометрическим инвариантом, не зависит от пространственных координат. Это находится в согласии с требованием симметрии скалярных полей относительно действия транзитивных групп преобразований.

Конкретный вид метрики пространства постоянной кривизны  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  зависит от системы координат, выбранной на  $\mathbb{S}$ . Часто используются безразмерные полярные координаты  $\chi, \theta, \varphi$ , в которых метрика (положительно определенная) имеет вид

$$\overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \begin{cases} d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), & \overset{\circ}{K} = 1, \\ d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), & \overset{\circ}{K} = 0, \\ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), & \overset{\circ}{K} = -1. \end{cases}\tag{2.69}$$

Безразмерные полярные координаты для сферы  $\mathbb{S}^3$  и двуполостного гиперболоида  $\mathbb{H}^3$  были рассмотрены в разделах 2.2.1 и 2.2.2 соответственно. В этом случае масштабный множитель имеет размерность длины,  $[a] = l$ .

Метрика Фридмана (2.64) допускает по крайней мере шести параметрическую группу симметрии, которая действует на пространственных сечениях  $t = \text{const.}$

Это группа вращений  $\mathbb{SO}(4)$ , группа Пуанкаре  $\mathbb{ISO}(3)$  или группа псевдовращений  $\mathbb{SO}(3, 1)$  соответственно для  $\overset{\circ}{K} = 1$ ,  $\overset{\circ}{K} = 0$  или  $\overset{\circ}{K} = -1$ . Масштабный множитель находится из уравнений Эйнштейна, и в некоторых случаях группа симметрии пространства-времени может быть шире.

В стереографических координатах на сечениях  $t = \text{const}$  метрика Фридмана примет вид

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 \eta_{\mu\nu}}{(1 + b_0 x^2)^2} \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

где  $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(-, -, -, +)$ , и постоянная  $b_0$  связана с гауссовой кривизной простым соотношением  $\overset{\circ}{K} = -12b_0$  (напомним, что, поскольку метрика  $\eta_{\mu\nu}$  на пространственных сечениях отрицательно определена, то  $x^2 := x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} \leq 0$ ). Метрике (2.70) соответствует интервал

$$ds^2 = dt^2 + a^2 \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}{(1 + b_0 x^2)^2}.$$

В такой записи размерности следующие:

$$[t] = [x^\mu] = l, \quad [a] = 1, \quad [b_0] = l^{-2}. \quad (2.71)$$

Стереографические координаты удобны для проведения вычислений. Поэтому вычислим геометрические характеристики для метрики Фридмана в виде (2.70). Отличные от нуля символы Кристоффеля равны

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\mu}{}^\nu &= \Gamma_{\mu 0}{}^\nu = \frac{\dot{a}}{a} \delta_\mu^\nu, \\ \Gamma_{\mu\nu}{}^0 &= -\frac{\dot{a}a}{(1 + b_0 x^2)^2} \eta_{\mu\nu}, \\ \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho, \end{aligned} \quad (2.72)$$

где  $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}{}^\rho$  – символы Кристоффеля для метрики постоянной кривизны  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ , и точка обозначает дифференцирование по  $t$ .

Прямые вычисления показывают, что только две независимые компоненты тензора кривизны отличны от нуля:

$$\begin{aligned} R_{0\mu 0\nu} &= \frac{\ddot{a}a}{(1 + b_0 x^2)^2} \eta_{\mu\nu}, \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= a^2 \overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{\dot{a}^2 a^2}{(1 + b_0 x^2)^2} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}), \end{aligned} \quad (2.73)$$

где  $\overset{\circ}{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$  – тензор кривизны, построенный по метрике  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ .

Выпишем отличные от нуля компоненты тензора Риччи и скалярную кривизну в стереографических координатах:

$$\begin{aligned} R_{00} &= 3 \frac{\ddot{a}}{a}, \\ R_{\mu\nu} &= \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 - 8b_0}{(1 + b_0 x^2)^2} \eta_{\mu\nu}, \\ R &= \frac{6\ddot{a}a + 6\dot{a}^2 - 24b_0}{a^2}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

В дальнейшем метрика Фридмана будет использоваться в общем виде (2.64) без использования координат на пространственных сечениях. Этого оказывается достаточно для анализа уравнений Эйнштейна.

Для исследования свойств метрики Фридмана часто используется другая система координат в пространстве-времени, в которой метрика Фридмана конформно эквивалентна некоторой статической метрике. А именно, совершим преобразование временной координаты  $t \mapsto \eta$ , где монотонная функция  $t = t(\eta)$  определяется дифференциальным уравнением

$$dt = a(t)d\eta. \quad (2.75)$$

Это уравнение при достаточно общих предположениях имеет решение. Постоянная интегрирования соответствует сдвигу новой временной координаты,  $\eta \mapsto \eta + \text{const}$ , и является несущественной. После преобразования временной координаты интервал принимает вид

$$ds^2 = a^2 \left( d\eta^2 + \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right), \quad (2.76)$$

где  $a = a(t(\eta))$  – функция нового времени  $\eta$ . Метрика, стоящая в скобках, статична, и вся зависимость от времени вынесена в общий конформный множитель. В таком виде удобно исследовать причинную структуру пространства-времени, т.к. световые конусы для метрики  $g_{\alpha\beta}$  те же, что и для статической метрики, стоящей в скобках.

### 2.3.2 Космологическое красное смещение

Если масштабный множитель меняется со временем,  $\dot{a} \neq 0$ , то расстояние между двумя наблюдателями, имеющими фиксированные пространственные координаты, скажем,  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ , также меняется со временем. Это приводит к смещению частот световых сигналов. Если вселенная расширяется,  $\dot{a} > 0$ , то, как мы увидим, возникает красное смещение спектральных линий.

Свет распространяется вдоль нулевых экстремалей  $\{t(\tau), x^\mu(\tau)\}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , при этом 4-вектор скорости  $\{t', x^\mu'\}$ , где штрих обозначает дифференцирование по каноническому параметру  $\tau$  (точка зарезервирована для дальнейших обозначений), представляет собой 4-импульс фотона. Нулевая компонента импульса является энергией фотона и, следовательно, пропорциональна частоте фотона  $\omega$ :

$$t' = \hbar\omega,$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка. При этом длина волны  $\lambda$  связана с частотой равенством

$$\lambda\omega = 2\pi c,$$

где  $c$  – скорость света.

Допустим, что мы находимся в точке  $x_0$  и наблюдаем световой сигнал, испущенный наблюдателем в точке  $x_1$ . Тогда величина красного смещения  $z$  определяется относительным смещением длин волн

$$z := \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1},$$

что можно выразить через нулевую компоненту скорости:

$$z = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{t'_1 - t'_0}{t'_0}. \quad (2.77)$$

Фотоны распространяются в пространстве-времени вдоль экстремалей  $t(\tau), x^\mu(\tau)$ . Уравнения для экстремалей определяются символами Кристоффеля (2.65) и имеют вид

$$\begin{aligned} t'' &= a\dot{a}\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}x^{\mu'}x^{\nu'}, \\ x^{\mu''} &= -2\frac{\dot{a}}{a}x^{\mu'}t' - \overset{\circ}{\Gamma}_{\nu\rho}^{\mu}x^{\nu'}x^{\rho'}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Поскольку фотоны распространяются вдоль нулевых экстремалей, то для них выполнено равенство

$$t'^2 + a^2\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}x^{\mu'}x^{\nu'} = 0.$$

Подстановка этого выражения в правую часть первого уравнения (2.78) приводит к равенству

$$t'' + \frac{\dot{a}}{a}t'^2 = 0.$$

Разделим это равенство на  $t'$  и проинтегрируем. В результате получим условие на нулевую компоненту 4-скорости фотона:

$$at' = \text{const.}$$

Отсюда следует, что красное смещение можно выразить через масштабный множитель:

$$z = \frac{a_0 - a_1}{a_1}. \quad (2.79)$$

Это – универсальная и точная формула для красного смещения. Она определяется масштабным множителем  $a_1$  в момент испускания света и  $a_0$  в момент наблюдения, и не зависит от истории сигнала в промежуточные моменты времени. Из полученной формулы вытекает, что относительное смещение длин волн положительно, если вселенная расширяется, и отрицательно – если сжимается.

Другое важное следствие из вида метрики Фридмана – это связь красного смещения с расстоянием до объекта. Для света, испущенного и полученного в близких пространственно временных точках, справедливо равенство

$$dt^2 = dl^2,$$

где  $dl$  – пространственное расстояние между событиями:

$$dl^2 := -a^2\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu.$$

Поэтому из формулы (2.79) следуют равенства:

$$z := \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{da}{a} = \frac{\dot{a}dt}{a} = \frac{\dot{a}}{a}dl.$$

Введем *постоянную Хаббла*

$$H := \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0}. \quad (2.80)$$

Тогда красное смещение спектральных линий в настоящее время  $t_0$  определяется законом Хаббла

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = Hdl. \quad (2.81)$$

Содержание этого закона состоит в том, что относительное красное смещение спектральных линий прямо пропорционально расстоянию до объекта. Этот закон получен для бесконечно близких событий. На практике он приближенно справедлив для конечных расстояний,  $dl \mapsto \Delta l$ . Современные наблюдательные данные показывают, что закон Хаббла справедлив с высокой степенью точности, но все же “постоянная Хаббла” не является постоянной. Поэтому постоянную Хаббла называют также *параметром Хаббла*.

Если параметр Хаббла является постоянным, то из уравнения (2.80) следует экспоненциальное поведение масштабного множителя

$$a = C e^{Ht}, \quad C > 0.$$

Если  $H > 0$ , то происходит экспоненциальный рост. Для решения некоторых космологических проблем, которые мы обсуждать не будем, предполагают, что масштабный множитель, по крайней мере на ранних этапах эволюции вселенной, экспоненциально растет. Такой экспоненциальный рост масштабного множителя называется *инфляцией*. Предположение об инфляционной стадии развития вселенной в настоящее время широко распространено. Моделей, приводящих к инфляции, не так много. Позже мы увидим, что это происходит, например, в решении де Ситтера (2.122).

Наша интуиция основана на механике Ньютона. Поэтому посмотрим на наблюдаемое красное смещение спектральных линий с другой точки зрения. Пусть галактики движутся в плоском пространстве-времени Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Если галактика удаляется, то наблюдаемая длина волны светового сигнала будет увеличиваться, а частота – уменьшаться (красное смещение). Это явление известно как эффект Доплера и описывается формулой (??). В рассматриваемом случае

$$\omega_1 = \omega', \quad \omega_0 = \omega \quad \text{и} \quad \alpha = 0.$$

Тогда в нерелятивистском пределе  $V/c \ll 1$  частота в первом порядке меняется по правилу

$$\omega_1 = \omega_0 \left( 1 + \frac{V}{c} \right),$$

где  $V$  – скорость галактики, и  $c$  – скорость света. Подстановка этого выражения в формулу для красного смещения (2.77) приводит к равенству

$$z = \frac{V}{c}. \quad (2.82)$$

Дальнейшее сравнение с законом Хаббла позволяет найти скорость галактики

$$V = cH\Delta l,$$

где  $\Delta l$  – расстояние между галактиками. Мы видим, что скорость разбегания галактик прямо пропорциональна расстоянию.

В заключение вычислим наблюдаемую скорость разбегания галактик. Согласно предложению 2.3.1, которое будет доказано в следующем разделе, в однородной и изотропной вселенной частицы среды (галактики) движутся вдоль экстремалей, совпадающих с координатными линиями времени. То есть пространственные координаты галактик  $x^\mu$  остаются неизменными. Поэтому наблюдаемое расстояние до галактики равно

$$\Delta l = a(t) \sqrt{-\mathring{g}_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu}.$$

Это расстояние меняется только благодаря наличию масштабного множителя. Вычислим наблюдаемую скорость

$$V := \frac{d}{dt} \Delta l = c \frac{\dot{a}}{a} \Delta l = cH \Delta l, \quad (2.83)$$

где мы восстановили скорость света,  $x^0 = ct$ , и  $\dot{a} := da/dx^0$ . Как видим, полученная формула совпадает с тем, что было получено из закона Хаббла.

### 2.3.3 Уравнения движения

Масштабный множитель, входящий в метрику Фридмана, находится из уравнений Эйнштейна и зависит от выбора модели для полей материи. В дальнейшем мы рассмотрим несколько моделей вселенной, для которых масштабный множитель имеет явное аналитическое выражение.

Прежде всего получим уравнения Эйнштейна. Из компонент тензора Риччи и скалярной кривизны (2.67) составляем тензор Эйнштейна. Он имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} G_0^0 &= -3 \frac{\epsilon + \dot{a}^2}{a^2}, \\ G_0^\mu &= 0, \quad G_\mu^0 = 0, \\ G_\mu^\nu &= -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} \delta_\mu^\nu, \end{aligned} \quad (2.84)$$

где постоянная  $\epsilon$ , которая введена для удобства, пропорциональна гауссовой кривизне,

$$\epsilon := \overset{\circ}{K}/3. \quad (2.85)$$

Пространственные сечения  $t = \text{const}$  при этом являются сферой  $\mathbb{S}^3$  ( $\epsilon > 0$ ), евклидовым пространством  $\mathbb{R}^3$  ( $\epsilon = 0$ ) или двуполостным гиперболоидом  $\mathbb{H}^3$  ( $\epsilon < 0$ ).

Мы записываем компоненты тензора Эйнштейна (2.84) с одним ковариантным и одним контравариантным индексом. Это удобно, т.к. в этом случае тензор энергии-импульса, как мы увидим, является диагональным.

Следующий шаг состоит в выборе тензора энергии-импульса материи. При построении моделей вселенной мы используем космологический принцип, который состоит из двух независимых требований:

- Метрика пространства-времени должна быть однородна и изотропна.
- Тензор энергии-импульса материи должен быть однороден и изотропен.

Первому требованию мы уже удовлетворили, выбрав метрику Фридмана (2.64).

Наиболее общий вид симметричного тензора второго ранга был установлен в разделе 1.4. В общей теории относительности тензор энергии-импульса  $T_{\alpha\beta}$  является четырехмерным симметричным тензором второго ранга. Группа симметрии действует только на пространственных сечениях, и по отношению к ее действию тензор энергии-импульса разлагается на три неприводимые компоненты:

$$\begin{aligned} T_{00} & \quad \text{— скаляр,} \\ T_{0\mu} & \quad \text{— вектор,} \\ T_{\mu\nu} & \quad \text{— симметричный тензор второго ранга.} \end{aligned} \quad (2.86)$$

Из результатов, полученных в разделе 1.4, следует, что наиболее общий вид этих симметричных компонент следующий

$$T_{00} = \mathcal{E}(t), \quad T_{0\mu} = T_{\mu 0} = 0, \quad T_{\mu\nu} = -\mathcal{P}(t) \overset{\circ}{g}_{\mu\nu},$$

где  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{P}$  – некоторые функции (скалярные поля). Сравнение этих компонент с тензором энергии-импульса сплошной среды

$$T^{\alpha\beta} = (\mathcal{E} + \mathcal{P})u^\alpha u^\beta - \mathcal{P}g^{\alpha\beta}, \quad (2.87)$$

показывает, что  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{P}$  есть ни что иное как плотность энергии и давление материи соответственно, и тензор энергии-импульса записан в сопутствующей системе координат  $u = (1, 0, 0, 0)$ .

**Предложение 2.3.1.** *Если и метрика, и тензор энергии-импульса среды однородны и изотропны, то линии тока непрерывной среды являются геодезическими (экстремалами).*

**Доказательство.** Зафиксируем систему координат так, чтобы метрика была метрикой Фридмана (2.64) и тензор энергии-импульса имел вид (2.86). Символы Кристоффеля были вычислены ранее (2.65), и уравнения для экстремалей имеют вид (2.78). Ясно, что координатные линии  $x^0 = \tau, x^\mu = \text{const}, \tau \in \mathbb{R}$ , являются экстремалями. С другой стороны, эти координатные линии представляют собой линии тока для векторного поля скорости  $u = (1, 0, 0, 0)$ .  $\square$

Таким образом, в рассматриваемой космологической модели выбрана синхронная система координат, в которой метрика имеет вид (2.64), и каждая точка сплошной среды движется вдоль экстремали, которая совпадает с координатной линией  $x^0 := t$ . Точки среды покоятся в том смысле, что пространственные координаты имеют постоянные значения  $x^\mu = \text{const}$ . При этом наблюдаемое расстояние между частицами среды может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от поведения масштабного множителя.

Здесь возникает вопрос. Если присутствует давление, то в общем случае частицы среды не будут двигаться по экстремалиям, т.к. присутствуют не только гравитационные силы. Тем не менее рассматриваемая модель является самосогласованной. Действительно, поскольку давление зависит только от времени, то градиент давления параллелен вектору скорости. Следовательно, согласно уравнениям релятивистской гидродинамики (??), (??), движение частиц происходит вдоль экстремалей. Причиной этого является требование однородности и изотропии тензора энергии-импульса полей материи.

Приведенные выше аргументы однозначно фиксируют однородный и изотропный тензор энергии-импульса материи. С одним контра- и одним ковариантным индексом он всегда диагонален:

$$T_\alpha{}^\beta = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathcal{P} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{P} \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Уравнения релятивистской гидродинамики  $\nabla_\beta T_\alpha{}^\beta = 0$ , выполнение которых необходимо для разрешимости уравнений Эйнштейна, для метрики Фридмана (2.70) принимают вид

$$\dot{\mathcal{E}} + \frac{3\dot{a}}{a}(\mathcal{E} + \mathcal{P}) = 0. \quad (2.89)$$

Если подставить выражение для тензора энергии-импульса (2.88) в уравнения Эйнштейна с космологической постоянной  $\Lambda$

$$\Phi_\alpha^\beta := G_\alpha^\beta + \delta_\alpha^\beta \Lambda + \frac{1}{2} T_\alpha^\beta = 0,$$

где мы для простоты положили гравитационную постоянную равной единице,  $\kappa = 1$ , и учесть явный вид тензора Эйнштейна (2.84), то получим два уравнения:

$$-3 \frac{\dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} + \Lambda + \frac{1}{2} \mathcal{E} = 0, \quad (2.90)$$

$$- \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \epsilon}{a^2} + \Lambda - \frac{1}{2} \mathcal{P} = 0. \quad (2.91)$$

Продифференцируем уравнение (2.90) по времени  $t$  и учтем уравнение совместности (2.89). В результате получим, что уравнение (2.91) тождественно удовлетворяетя. Можно проверить, что это свойство является следствием линейной зависимости уравнений Эйнштейна

$$\nabla_\beta \Phi_\alpha^\beta = 0,$$

вытекающей из ковариантности (см. раздел ??).

Таким образом, у нас есть два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения (2.90) и (2.89) на три неизвестные функции  $a(t)$ ,  $\mathcal{E}(t)$  и  $\mathcal{P}(t)$ . Чтобы закрыть систему уравнений будем считать, что давление среды связано с плотностью энергии уравнением состояния. Для баротропной жидкости уравнение состояния имеет вид

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E}), \quad (2.92)$$

где  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  – некоторая достаточно гладкая функция. Это равенство корректно, т.к. плотность энергии и давление – скалярные поля (функции).

Таким образом, для вселенной Фридмана мы имеем два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения на две независимые функции: масштабный множитель  $a$  и плотность энергии  $\mathcal{E}$ , которые мы запишем в следующем виде

$$\dot{a}^2 = \frac{a^2}{3} \left( \frac{1}{2} \mathcal{E} + \Lambda \right) - \epsilon, \quad (2.93)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E} + \mathcal{P}(\mathcal{E})} = -3 \frac{da}{a}. \quad (2.94)$$

Это и есть полная система уравнений для космологических моделей Фридмана.

Таким образом, при заданном уравнении состояния (2.92), решая уравнение (2.94), мы находим зависимость плотности энергии от масштабного множителя:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(a)$ . Подставляя эту функцию в уравнение (2.93), мы получаем одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка на масштабный множитель. Это и есть основное уравнение в стандартных моделях однородной и изотропной вселенной.

Для интегрирования уравнения (2.93) удобно ввести временную координату  $\eta = \eta(t)$ , определенную равенством (2.75). Тогда уравнение (2.93) можно формально проинтегрировать

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{1}{6} \mathcal{E} a^2 + \frac{1}{3} \Lambda a^2 - \epsilon}}. \quad (2.95)$$

Постоянная интегрирования соответствует сдвигу временной координаты  $\eta \mapsto \eta + \text{const}$  и является несущественной. Знак  $\pm$  соответствует выбору направления течения

времени: если функция  $a(t)$  является решением уравнений Фридмана, то  $a(-t)$  – также решение. Зависимость плотности энергии от масштабного множителя,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(a)$ , находится из уравнения (2.94). Это решает поставленную задачу в общем виде. На практике уравнения (2.94) и (2.95) решаются в явном виде далеко не всегда.

Не смотря на то, что одно из уравнений Эйнштейна (2.91) было отброшено как следствие остальных, из него можно сделать важные выводы. Перепишем уравнение (2.91) в виде

$$\ddot{a} = -\frac{a}{12}(\mathcal{E} + 3\mathcal{P}) + \frac{a\Lambda}{3}, \quad (2.96)$$

где мы использовали уравнение (2.90) для исключения  $\dot{a}^2 + \epsilon$ . Пусть  $\Lambda = 0$  и  $\mathcal{E} > 0$  и  $\mathcal{P} \geq 0$ , что соответствует обычной материи. По предположению, масштабный множитель положителен,  $a > 0$ , и, следовательно,  $\ddot{a} < 0$ . Это означает, что функция  $a(t)$  вогнутая. Допустим, что в настоящее время вселенная расширяется,  $\dot{a} > 0$ , что соответствует современным наблюдательным данным. Качественное поведение масштабного множителя в этом случае показано на рис. 2.2. Мы видим, что при конечном

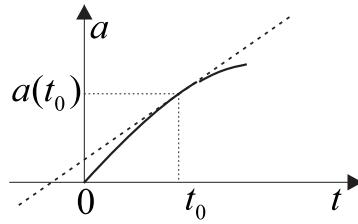


Рис. 2.2: Качественное поведение масштабного множителя  $a(t)$  в предположении, что вселенная в настоящее время расширяется,  $\dot{a}(t_0) > 0$ .

значении времени  $t$  масштабный множитель должен обратиться в нуль, что соответствует большому взрыву. Этот вывод является довольно общим, т.к. не зависит от уравнения состояния материи и не использует какое либо из решений уравнений Эйнштейна. В космологии принято отсчитывать наблюдаемое время  $t$  от большого взрыва при  $t = 0$ .

Из уравнений Эйнштейна (2.90), (2.91) следует, что наличие космологической постоянной можно трактовать как поля материи с диагональным тензором энергии-импульса

$$T_{\Lambda\alpha}^{\beta} := 2\Lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта материя необычна, т.к. при  $\Lambda > 0$  плотность энергии положительна, а давление отрицательно. Материя, обладающая таким свойством, называется *темной энергией*.

Понятие темной энергии играет важную роль в космологии. В 1998 году Сол Перлмуттер [?], Брайан П. Шмидт и Адам Рисс [?] открыли, что в настоящее время вселенная не просто расширяется, а расширяется с ускорением. За это открытие они получили Нобелевскую премию в 2011 году. Если принять модель вселенной Фридмана за основу, то из уравнения (2.96) вытекает, что обычная материя,  $\mathcal{E} > 0$  и  $\mathcal{P} > 0$ , приводит к замедлению, а положительная космологическая постоянная – к ускорению. Таким образом, к ускорению приводит либо положительная космологическая постоянная, либо какая то другая материя с отрицательным давлением (плотность

энергии всегда считается положительной), которая была названа темной. В настоящее время к темной материи относят положительную космологическую постоянную и (или) другие модели материи, обсуждение которых выходит за рамки тех ограничений, которые поставил перед собой автор этих строк. Наличие темной энергии приводит к антигравитации: отталкиванию вместо притяжения. Это отталкивание и приводит к ускоренному расширению вселенной.

Существующие в настоящее время наблюдательные данные не противоречат представлению о темной энергии, как о положительной космологической постоянной. Поэтому данная точка зрения считается стандартной в современной космологии.

**Замечание.** Помимо темной энергии в космологии используется понятие *темной материи*. Это – гипотетическая материя, которая не взаимодействует с электромагнитным полем и, следовательно, не видна, т.к. не излучает фотонов. Понятие темной материи стало обсуждаться с 1922 года, когда Джеймс Джинс [?] и Якобус Каптейн [?] пришли к выводу, что большая часть вещества в нашей галактике невидима, т.к. гравитационного поля всех видимых звезд явно недостаточно для удержания звезд, находящихся на периферии. Впоследствии нехватка видимого вещества была подтверждена для многих других галактик. Кандидатов на роль темной материи много, и мы их обсуждать не будем.

В настоящее время наблюдательные данные указывают на то, что темная энергия составляет более 70% всего вещества вселенной, а темная материя – более 20%. Если учесть еще межгалактический газ, то на нашу долю (звезды, планеты и др.) остается меньше половины процента всего вещества вселенной.  $\square$

### 2.3.4 Вселенная Эйнштейна

Одну из первых космологических моделей в рамках общей теории относительности предложил А. Эйнштейн [?] в 1917 году задолго до статей А. Фридмана. Он нашел точное статическое решение для однородной и изотропной замкнутой вселенной. Это решение укладывается в общую схему однородной и изотропной вселенной с метрикой Фридмана.

Космологические уравнения Фридмана (2.90), (2.91) допускают статические решения. Положим

$$a = \text{const}, \quad \mathcal{E} = \text{const}, \quad \mathcal{P} = \text{const}.$$

Тогда уравнения (2.90) и (2.91) определяют равновесное значение плотности энергии и давления

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 2 \left( 3 \frac{\epsilon}{a^2} - \Lambda \right), \\ \mathcal{P} &= 2 \left( -\frac{\epsilon}{a^2} + \Lambda \right). \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют много решений в зависимости от значений постоянных  $\epsilon$  и  $\Lambda$ . Для обычной материи  $\mathcal{P} \leq \mathcal{E}/3$ . Отсюда вытекает ограничение сверху на космологическую постоянную

$$\Lambda \leq \frac{3}{2} \frac{\epsilon}{a^2}.$$

С другой стороны, давление обычной среды положительно,  $\mathcal{P} \geq 0$ . Это дает оценку снизу

$$\frac{\epsilon}{a^2} \leq \Lambda.$$

Вместе получаем получаем ограничение на значение космологической постоянной при заданных кривизне и радиусе вселенной

$$\frac{\epsilon}{a^2} \leq \Lambda \leq \frac{3}{2} \frac{\epsilon}{a^2}. \quad (2.97)$$

Как видим, для обычной материи это неравенство имеет нетривиальные решения только при  $\epsilon > 0$  (замкнутая вселенная) и положительной космологической постоянной,  $\Lambda$ .

Метрику вселенной Эйнштейна после можно записать в виде

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]. \quad (2.98)$$

Из формул (2.66) и (2.62) вытекает, что у полного тензора кривизны для модели Эйнштейна отличны от нуля только пространственные компоненты

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = a^2 \mathring{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = a^2 \epsilon \left( \mathring{g}_{\mu\rho} \mathring{g}_{\nu\sigma} - \mathring{g}_{\mu\sigma} \mathring{g}_{\nu\rho} \right).$$

В своей статье [?] А. Эйнштейн нашел решение для пыли,  $\mathcal{P} = 0$ , в замкнутой вселенной,  $\epsilon > 0$ . В этом случае  $\epsilon = a^2 \Lambda$ , и была отмечена необходимость введения положительной космологической постоянной.

Наблюдательные данные последних лет говорят о том, что вселенная расширяется. Это не укладывается в статическую модель, которая рассмотрена выше. Поэтому статическая модель вселенной Эйнштейна в настоящее время носит теоретический характер. Необходимо знать, что уравнения общей теории относительности допускают такие решения.

### 2.3.5 Линейное уравнение состояния

Согласно современным наблюдательным данным вселенная расширяется. Это приводит к необходимости построения нестационарных моделей вселенных.

Для того, чтобы построить конкретную космологическую модель и решить уравнения Фридмана (2.93), (2.94), необходимо задать уравнение состояния  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$ . Важный класс космологических моделей описывается линейным уравнением состояния. Например, когда вселенная заполнена идеальным газом с уравнением состояния (??), пылью или излучением (??). Для упрощения некоторых последующих формул запишем линейное уравнение состояния в виде

$$\mathcal{P} = (\gamma - 1)\mathcal{E}, \quad \gamma = \text{const.} \quad (2.99)$$

Для обычной материи  $1 \leq \gamma \leq 4/3$ . Границное значение  $\gamma = 1$  соответствует пыли ( $\mathcal{P} = 0$ ), а  $\gamma = 4/3$  – излучению ( $\mathcal{P} = \mathcal{E}/3$ ).

Часто говорят, что в случае пыли вселенная заполнена *холодной материеей*. Это значит, что вселенная состоит из массивных частиц, которые движутся с нерелятивистскими скоростями, а безмассовыми частицами (излучением) можно пренебречь. В противоположном случае излучения,  $\gamma = 4/3$ , мы говорим, что вселенная заполнена *горячей материеей*. Частицы горячей материи движутся с около световыми скоростями и ведут себя так же, как и безмассовые. В настоящее время в качестве стандартной космологической модели рассматривается так называемая  $\Lambda$ CDM-модель.

Эта модель содержит космологическую постоянную и холодную материю (от английского сокращения CDM = Cold Dark Matter).  $\Lambda$ CDM-модель экономна, и ее следствия хорошо согласуются с современными наблюдательными данными.

Можно доказать, что скорость звука в непрерывной среде превышает скорость света при  $\mathcal{P} > \mathcal{E}$ . Поэтому на давление накладывают ограничение сверху  $\mathcal{P} < \mathcal{E}$ , что немножко увеличивает интервал значений постоянной  $\gamma$  в уравнении состояния (2.99).

Для линейного уравнения состояния (2.99) уравнение (2.94) легко интегрируется

$$\mathcal{E} = \frac{C}{a^{3\gamma}}, \quad (2.100)$$

где  $C > 0$  – постоянная интегрирования. Полученное решение имеет простой физический смысл: плотность энергии обратно пропорциональна объему вселенной в данный момент времени  $a^3$  в степени  $\gamma$ . Для пыли ( $\mathcal{P} = 0$ ,  $\gamma = 1$ ) плотность энергии просто пропорциональна плотности числа частиц.

Для сопоставления предсказаний теории с наблюдательными данными, необходимо фиксировать постоянные интегрирования в решениях уравнений Фридмана. Обычно полагают, что в настоящее время  $t = t_0$  масштабный множитель равен единице,  $a(t_0) = 1$ . Тогда постоянная интегрирования в (2.100) равна плотности энергии (плотности числа частиц) в настоящий момент времени,  $C = \mathcal{E}_0$ .

Теперь запишем уравнение Фридмана (2.93) в виде

$$\dot{a}^2 + V(a) = -\epsilon, \quad (2.101)$$

где

$$V(a) := -Ma^{-3\gamma+2} - La, \quad (2.102)$$

и

$$M := \frac{\mathcal{E}_0}{6} = \text{const}, \quad L := \frac{\Lambda}{3} = \text{const}. \quad (2.103)$$

Напомним, что  $\epsilon := \overset{\circ}{K}/3$ , где  $\overset{\circ}{K}$  – гауссова кривизна пространственных сечений  $t = \text{const}$ . Уравнение (2.101) имеет тот же вид, что и закон сохранения энергии в механике Ньютона при движении точечной частицы с полной энергией  $-\epsilon$  в потенциале  $V(a)$ . Поэтому, нарисовав потенциал для фиксированных значений постоянных  $M$ ,  $L$  и  $\gamma$ , можно определить точки поворота и понять качественное поведение решений.

Продемонстрируем интегрирование уравнений модели Фридмана в простейшем случае пыли, когда давление равно нулю,  $\mathcal{P} = 0$ . В этом случае плотность энергии пропорциональна плотности частиц

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{a^3}. \quad (2.104)$$

Положим для простоты космологическую постоянную равной нулю,  $\Lambda = 0$ . Тогда подстановка решения (2.104) в уравнение (2.101) дает простое уравнение на масштабный множитель

$$\dot{a}^2 - \frac{M}{a} = -\epsilon. \quad (2.105)$$

Решение данного уравнения удобно записать, используя вместо времени  $t$  координату  $\eta$ , определенную уравнением (2.75). Это уравнение имеет различные решения

в зависимости от знака  $\epsilon$ , т.е. в зависимости от знака кривизны пространственных сечений:

$$a = \begin{cases} \frac{M}{2\epsilon} [1 - \cos(\sqrt{\epsilon} \eta)], & \epsilon > 0, \\ \frac{M\eta^2}{4}, & \epsilon = 0, \\ \frac{M}{2|\epsilon|} [\operatorname{ch}(\sqrt{|\epsilon|} \eta) - 1], & \epsilon < 0. \end{cases} \quad (2.106)$$

Постоянная интегрирования соответствует сдвигу  $\eta \mapsto \eta + \operatorname{const}$  и положена равной нулю. Параметр  $\eta$  связан с временем следующими соотношениями:

$$t = \begin{cases} \frac{M}{2\epsilon^{3/2}} [\sqrt{\epsilon} \eta - \sin(\sqrt{\epsilon} \eta)], & \epsilon > 0, \\ \frac{M\eta^3}{12}, & \epsilon = 0, \\ \frac{M}{2|\epsilon|^{3/2}} [\operatorname{sh}(\sqrt{|\epsilon|} \eta) - \sqrt{|\epsilon|} \eta], & \epsilon < 0, \end{cases} \quad (2.107)$$

где постоянная интегрирования, соответствующая сдвигу времени, положена равной нулю. Поскольку уравнение (3.84) инвариантно относительно инверсии времени,  $t \mapsto -t$ , то каждому решению  $a(t)$  соответствует также решение  $a(-t)$ . Таким образом, равенства (2.106) и (2.107) определяют масштабный множитель  $a(t)$  в параметрическом виде. Качественное поведение масштабного множителя для пространственных сечений положительной, нулевой и отрицательной кривизны для пыли показано на рис. 2.3. Во всех случаях масштабный множитель равен нулю в момент большого

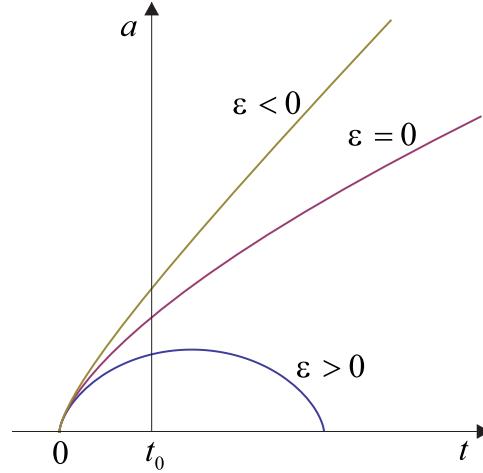


Рис. 2.3: Качественное поведение масштабного множителя для пространственных сечений положительной, нулевой и отрицательной кривизны для пыли и излучения.

взрыва при  $t = 0$ . В настоящее время при  $t = t_0$  он положителен. Дальнейшая эволюция масштабного множителя зависит от кривизны пространственных сечений. Для открытых моделей вселенных  $\epsilon \leq 0$  и масштабный множитель монотонно возрастает. Для замкнутых моделей вселенных  $\epsilon > 0$ , масштабный множитель возрастает, достигает своего максимального значения и затем начинает убывать до нулевого значения, которое соответствует большому сжатию.

Для излучения  $\gamma = 4/3$  при нулевой космологической постоянной уравнение Фридмана (2.101) принимает вид

$$\dot{a}^2 - \frac{M}{a^2} = -\epsilon.$$

Это уравнение легко решается

$$a = \sqrt{t \left( 2\sqrt{M} - \epsilon t \right)}. \quad (2.108)$$

Качественное поведение масштабного множителя для излучения такое же, как и для пыли, и показано на рис. 2.3 для трех случаев:  $\epsilon < 0$ ,  $\epsilon = 0$  и  $\epsilon > 0$ . Если вселенная замкнута,  $\epsilon > 0$ , то большой взрыв заканчивается большим сжатием. При этом время меняется в конечном интервале  $0 < t < 2\sqrt{M}/\epsilon$ . Для открытой вселенной,  $\epsilon < 0$  или  $\epsilon = 0$ , после большого взрыва происходит бесконечное расширение вселенной.

Как уже упоминалось, качественное поведение решений можно понять, анализируя “потенциал” (2.102). При нулевой космологической постоянной,  $L = 0$ , для пыли,  $\gamma = 1$ , и излучения,  $\gamma = 4/3$ , он изображен на рис. 2.4. Если “энергия”  $-\epsilon$  отрицатель-

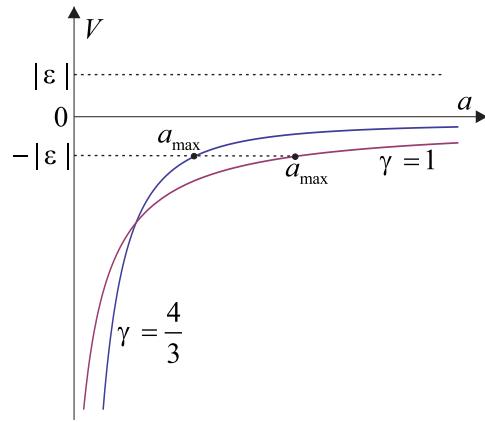


Рис. 2.4: Качественное поведение “потенциала” для пыли,  $\gamma = 1$ , и излучения,  $\gamma = 4/3$ .

на, т.е.  $\epsilon > 0$ , масштабный множитель меняется в конечных интервалах  $0 < a < a_{\max}$ . Максимальное значение масштабного множителя определяется из условия

$$\dot{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V(a) = \epsilon.$$

Для пыли и излучения получаем следующие значения

$$a_{\max} = \begin{cases} M/\epsilon, & \gamma = 1, \\ \sqrt{M/\epsilon}, & \gamma = 4/3. \end{cases}$$

Для открытой вселенной  $\epsilon \leq 0$ , и масштабный множитель меняется в бесконечном полуинтервале  $0 < a < \infty$ , что соответствует бесконечному расширению.

Для уравнения Фридмана (2.101) аналитические решения известны 1) при  $\epsilon = 0$  для всех  $\gamma$ ; 2) при  $L = 0$  для  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 4/3$  и 3) при  $\gamma = 4/3$  для всех  $L$  и  $\epsilon$ . Детальный анализ приведен в [?]. Некоторые решения не имеют космологических особенностей, но они не приемлемы с других точек зрения.

В заключение проанализируем более детально космологическую особенность для пыли и излучения. Уравнение Фридмана для пыли в общем случае имеет вид

$$\dot{a}^2 = \frac{M}{a} + La^2 - \epsilon. \quad (2.109)$$

Космологическая особенность возникает в решениях этого уравнения при  $a \rightarrow 0$ . Вблизи особенности уравнение принимает вид

$$\dot{a}^2 = \frac{M}{a},$$

не зависимо от значений космологической постоянной  $\Lambda$  и  $\epsilon$ . Поэтому асимптотика масштабного множителя вблизи космологической особенности следующая

$$a \approx \left( \frac{9M}{4} \right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}, \quad (2.110)$$

где мы положили постоянную интегрирования равной нулю. Подстановка полученной асимптотики в выражение для скалярной кривизны (2.74) приводит к следующей асимптотике при  $t \rightarrow 0$

$$R \approx \frac{2}{t^{\frac{4}{3}}} \left( \frac{2}{3} t^{-\frac{2}{3}} + K_0 \right) \approx \frac{4}{3t^2}.$$

Мы видим, что при конечном значении наблюдаемого времени  $t = 0$  масштабный множитель обращается в нуль, метрика вырождается, и кривизна обращается в бесконечность. Отметим, что асимптотика скалярной кривизны не зависит от постоянных  $M$ ,  $L$  и  $\epsilon$ , входящих в уравнение Фридмана.

Для излучения уравнение Фридмана вблизи особенности имеет вид

$$\dot{a}^2 = \frac{M}{a^2},$$

также не зависимо от значения космологической постоянной  $\Lambda$  и кривизны пространственных сечений  $\epsilon$ . Его решение имеет вид

$$a \approx M^{\frac{1}{4}} \sqrt{2t}. \quad (2.111)$$

Для скалярной кривизны (2.74) получаем следующую асимптотику

$$R \approx \frac{\overset{\circ}{K}}{\sqrt{M} t}.$$

Мы видим, что для излучения возникает сингулярность скалярной кривизны только при отличной от нуля кривизне пространственных сечений. Тем не менее кривизна имеет особенность и при  $\overset{\circ}{K} = 0$ . Для этого достаточно вычислить квадрат тензора Риччи, который является геометрическим инвариантом,

$$R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \frac{9\ddot{a}^2}{a^2} + \frac{3}{a^4} \left( \ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + \frac{2}{3}\overset{\circ}{K} \right)^2,$$

где мы использовали явный вид компонент тензора Риччи (2.74). Подстановка в это выражение асимптотики масштабного множителя (2.111) приводит к следующему выражению

$$R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \approx \frac{3}{4t^4}.$$

Следовательно, квадрат тензора Риччи имеет особенность при  $t \rightarrow 0$ , которая не зависит от кривизны пространственных сечений. Интересно отметить, что асимптотика квадрата тензора Риччи не зависит также от  $M$  и  $L$ .

## 2.4 Вакуумные решения

Вакуумные решения уравнений Фридмана, хотя, возможно, и менее реалистичны, но представляют значительный интерес. В настоящем разделе мы покажем, что все вакуумные космологические решения – это плоское пространство Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$  ( $\Lambda = 0$ ), пространство де Ситтера  $d\mathbb{S}$  ( $\Lambda > 0$ ) и анти-де Ситтера  $Ad\mathbb{S}$  ( $\Lambda < 0$ ).

### 2.4.1 Пространство-время Минковского

Ниже мы покажем, что плоское пространство-время Минковского является единственным решением вакуумных космологических моделей при нулевой космологической постоянной.

Положим  $\Lambda = 0$  и предположим, что материя отсутствует,  $\mathcal{E} = \mathcal{P} = 0$ . Тогда уравнение (2.109) принимает вид

$$\dot{a}^2 = -\frac{\overset{\circ}{K}}{3}.$$

Оно имеет решение только при  $\overset{\circ}{K} \leq 0$ . Следовательно, в отсутствие материи (вакуумное решение) и космологической постоянной пространственные сечения должны иметь неположительную кривизну, т.е. представляют собой либо трехмерное гиперболическое пространство  $\mathbb{H}^3$ , либо трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ . Это соответствует открытой модели вселенной.

Если  $\overset{\circ}{K} = 0$ , то  $a = \text{const}$  и метрика Фридмана переходит в метрику Лоренца. Поэтому пространство-время становится плоским пространством Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$ .

При  $\overset{\circ}{K} < 0$  масштабный множитель линеен по времени

$$a = \sqrt{-\frac{\overset{\circ}{K}}{3} t}, \quad (2.112)$$

где мы отбросили несущественную постоянную интегрирования и выбрали знак плюс у квадратного корня. Это вакуумное решение имеет особенность, поскольку при  $t = 0$  масштабный множитель обращается в нуль, и метрика вырождается. Если вычислить компоненты тензора кривизны (2.66), то они окажутся тождественно равными нулю. Поэтому линейный масштабный множитель (2.112) в метрике Фридмана описывает плоское пространство Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$ .

Полученный вывод можно подтвердить явным преобразованием координат. Интервал для вакуумного решения (2.112) после растяжки временной координаты можно записать в виде

$$ds^2 = dt^2 - t^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)],$$

где мы выбрали полярные координаты (2.69) на пространственных сечениях  $t = \text{const}$ . Если теперь совершить преобразование координат  $t, \chi \mapsto \tau, r$ , где

$$\tau := t \cosh \chi, \quad r := t \sinh \chi,$$

то интервал станет евклидовым,

$$ds^2 = d\tau^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Якобиан преобразования координат  $t, \chi \mapsto \tau, r$  равен  $J = t$  и вырожден при  $t = 0$ . Если масштабный множитель  $a(t)$  определен при положительных временах  $t > 0$ , то временная координата  $\tau$  в пространстве Минковского также положительна  $\tau > 0$ .

Таким образом, вакуумное решение при  $\overset{\circ}{K} < 0$ , сводится к плоскому пространству Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$ , которое никаких особенностей не имеет. Отсюда вытекает, что особенность в решении (2.112) при  $t = 0$  является координатной.

То, что мы получили одно и то же пространство Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$  и при  $\overset{\circ}{K} = 0$ , и при  $\overset{\circ}{K} < 0$  связано с различным выбором пространственных сечений в пространстве Минковского.

Полученное космологическое решение для вакуума следовало ожидать. Действительно, метрика (2.70) является блочно диагональной и сферически симметричной. Это очевидно в безразмерных полярных координатах. Следовательно, должна быть выполнена теорема Бирхгоффа, утверждающая, что единственным решением вакуумных уравнения является решение Шварцшильда, которое при нулевой массе дает пространство Минковского. При этом решение Шварцшильда с отличной от нуля массой возникнуть не может, т.к. оно не является однородным.

## 2.4.2 Пространство-время де Ситтера $d\mathbb{S}$

Одну из первых моделей вселенных предложил де Ситтер [?, ?]. Эта модель описывает пустую вселенную и является максимально симметричной. Она представляет самостоятельный интерес, хотя и не является реалистичной с современной точки зрения.

Пусть  $\Lambda > 0 \Leftrightarrow L > 0$  и материя отсутствует,  $\mathcal{E} = \mathcal{P} = 0$ . Тогда уравнения Фридмана (2.96) и (2.101) принимают вид

$$\ddot{a} = La, \quad (2.113)$$

$$\dot{a}^2 = La^2 - \epsilon. \quad (2.114)$$

Конечно, первое уравнение (2.113) есть следствие второго уравнения (3.23). Однако в данном случае проще их совместное рассмотрение. Первое уравнение имеет решение, зависящее от двух постоянных интегрирования:

$$a = c_+ e^{t/R} + c_- e^{-t/R}, \quad c_{\pm} = \text{const}, \quad (2.115)$$

где введено обозначение

$$R := \frac{1}{\sqrt{L}}.$$

Подстановка этого решения в уравнение (3.23) приводит к связи между постоянными интегрирования

$$c_+ c_- = \frac{\epsilon}{4L} = \frac{R^2 \epsilon}{4}. \quad (2.116)$$

Таким образом, решение уравнений Фридмана зависит только от одной постоянной интегрирования. Эту постоянную интегрирования можно фиксировать, используя инвариантность уравнения (3.23) относительно сдвига времени  $t \mapsto t + \text{const}$ .

При растяжке пространственных координат постоянная  $\epsilon$  умножается на положительный множитель. Поэтому, не ограничивая общности, рассмотрим последовательно три случая  $\epsilon = 1$ ,  $\epsilon = 0$  и  $\epsilon = -1$ .

### Сфера, $\epsilon = 1$

Если пространственные сечения являются сферами,  $\epsilon = 1$ , положим

$$c_+ = c_- = \frac{R}{2}.$$

Тогда масштабный множитель будет равен

$$a = R \operatorname{ch}(t/R),$$

и метрика примет вид

$$ds^2 = dt^2 - R^2 \operatorname{ch}^2(t/R) \left[ \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (2.117)$$

где мы использовали метрику на пространственных сечениях в виде (2.34). Эта метрика называется *метрикой де Ситтера* и определена при

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (2.118)$$

Как видим, она определена при всех временах и никакой космологической особенности не имеет.

Из формулы (2.117) не видно, что метрика де Ситтера описывает пространство-время постоянной кривизны и инвариантна относительно группы Лоренца  $\mathbb{SO}(1, 4)$ . Тем не менее это так. Для доказательства построим пространство постоянной кривизны и укажем необходимое преобразование координат.

Рассмотрим пятимерное пространство Минковского  $\mathbb{R}^{1,4}$  с декартовой системой координат  $v, w, x, y, z$ . По определению, метрика пространства-времени имеет вид

$$ds^2 = dv^2 - dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.119)$$

Пусть в него вложен однополостный гиперболоид  $d\mathbb{S} \hookrightarrow \mathbb{R}^{1,4}$

$$v^2 - w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -R^2, \quad R > 0. \quad (2.120)$$

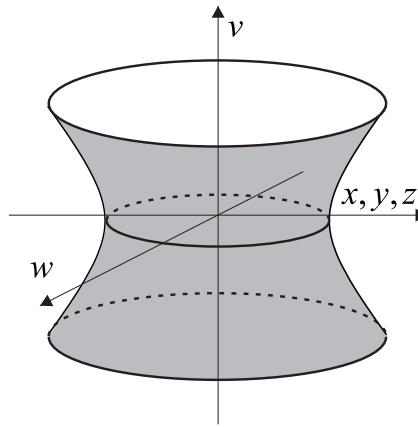
Будем считать, что топология, дифференцируемая структура и метрика на гиперболоиде индуцированы вложением. Тогда уравнение (2.120) определяет связное четырехмерное псевдориманово многообразие, вложенное в пространство Минковского  $\mathbb{R}^{1,4}$  (см. рис. 2.5, на котором показаны сечения гиперболоида плоскостями  $y = z = 0$ ). Это и есть *пространство де Ситтера*  $d\mathbb{S}$ .

И метрика (2.119), и уравнение гиперболоида (2.120) инвариантны относительно группы Лоренца  $\mathbb{SO}(1, 4)$ . Поэтому она является группой изометрий построенного гиперболоида. Для четырехмерного многообразия эта группа максимальна, и, следовательно, однополостный гиперболоид (2.120) является пространством постоянной кривизны.

Каждое сечение гиперболоида  $v = \text{const}$  определяет трехмерную сферу  $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ , определенную уравнением

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + v^2.$$

При  $v = 0$  радиус сферы минимальен и равен  $R$ . Условимся считать, что значения  $0 < w < \sqrt{R^2 + v^2}$  покрывают верхнюю (северную) полусферу, а  $-\sqrt{R^2 + v^2} < w < 0$  – нижнюю (южную).

Рис. 2.5: Пространство-время де Ситтера  $dS$ .

Теперь совершим преобразование координат  $v, w, x, y, z \mapsto R, r, t, \theta, \varphi$

$$\begin{aligned}
 v &:= R \operatorname{sh}(t/R), \\
 w &:= \pm R \sqrt{1 - r^2} \operatorname{ch}(t/R), \\
 x &:= Rr \operatorname{ch}(t/R) \sin \theta \cos \varphi, \\
 y &:= Rr \operatorname{ch}(t/R) \sin \theta \sin \varphi, \\
 z &:= Rr \operatorname{ch}(t/R) \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

Знак  $\pm$  в преобразовании координат  $w$  соответствует выбору либо верхней полусферы  $\mathbb{S}^3$ , либо нижней. Тогда уравнение гиперболоида сведется к тождеству  $R^2 = R^2$ . Таким образом, в новой системе координат гиперболоид задается равенством  $R = \text{const}$ , и координаты  $t, r, \theta, \varphi$  можно выбрать в качестве координат на гиперболоиде. Для получения явного вида метрики, индуцированной на гиперболоиде, необходимо просто выразить дифференциалы  $dv, dw, dx, dy, dz$  через  $dt, dr, d\theta, d\varphi$ , используя формулы (2.121), и подставить их в исходную метрику (2.119). Для упрощения вычислений, вспомним, что для сферической системы координат в подпространстве  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^{1,4}$ , натянутом на координатные оси  $x, y, z$ , справедлива формула

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(Rr \operatorname{ch}(t/R))]^2 + R^2 r^2 \operatorname{ch}^2(t/R)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

С учетом этого равенства после несложных вычислений получим в точности метрику де Ситтера (2.117).

Мы видим, что область значений координат (2.118) при  $0 < t < \infty$  покрывают либо верхнюю полусферу (знак  $+$  в уравнениях (2.121)), либо нижнюю (знак  $-$ ). Если зафиксировать знак в преобразовании координат (2.121) и разрешить времени меняться на всей вещественной прямой  $-\infty < t < \infty$ , то метрика де Ситтера (2.117) покроет дважды либо верхнюю, либо нижнюю полусферы  $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ .

Пространственные сечения метрики де Ситтера (2.117) задаются сечениями  $t = \text{const}$ . В исходном пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,4}$  время параметризует гиперплоскости  $\mathbb{R}^4$ , которые задаются уравнением

$$v = R \operatorname{sh}(t/R) = \text{const}.$$

Это значит, что пространственные сечения метрики де Ситтера соответствуют сечениям гиперболоида гиперплоскостями  $\mathbb{R}^4$ , которые определяются условием  $v = \text{const}$ .

Для решения де Ситтера в виде (2.117) “постоянная” Хаббла равна

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\operatorname{th}(t/R)}{R}$$

и не является постоянной.

**Трехмерное евклидово пространство,  $\epsilon = 0$**

Зафиксируем  $\epsilon = 0$  и положим  $c_- = 0$  и  $c_+ = R$ . Тогда масштабный множитель равен

$$a = R e^{t/R}. \quad (2.122)$$

Метрика де Ситтера теперь примет вид

$$ds^2 = dt^2 - R^2 e^{2t/R} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (2.123)$$

Она соответствует слоению однополостного гиперболоида евклидовыми гиперплоскостями  $\mathbb{R}^3$ . Полученная метрика определена при

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (2.124)$$

Для того, чтобы доказать, что метрика (2.123) действительно является метрикой де Ситтера, совершим преобразование координат  $v, w, x, y, z \mapsto R, r, t, \theta, \varphi$ , которое задано следующими формулами:

$$\begin{aligned} v &:= \pm R \left[ \frac{1}{2} r^2 e^{t/R} + \operatorname{sh}(t/R) \right], \\ w &:= \pm R \left[ \frac{1}{2} r^2 e^{t/R} - \operatorname{ch}(t/R) \right], \\ x &:= R r e^{t/R} \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= R r e^{t/R} \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= R r e^{t/R} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (2.120), задающее вложение гиперболоида, сводится к тождеству  $R^2 = R^2$ . Это означает, что в новых координатах уравнение гиперболоида задается уравнением  $R = \text{const}$ . Чтобы получить метрику, индуцированную на гиперболоиде, в координатах  $t, r, \theta, \varphi$ , необходимо подставить дифференциалы  $dv, dw, dx, dy$  и  $dz$  из уравнений (2.125) в исходную метрику Лоренца (2.119). Чтобы упростить вычисления, заметим что

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(Rr e^{t/R})^2 + R^2 r^2 e^{2t/R} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)].$$

Теперь нетрудно проверить, что индуцированная метрика равна метрике де Ситтера в форме (2.123).

Пространственные сечения  $\mathbb{R}^3$  для метрики (2.123) задаются сечениями  $t = \text{const}$ . Эти сечения в объемлющем пространстве  $\mathbb{R}^{1,4}$  задают нулевые гиперплоскости

$$v - w = \pm R e^{t/R}.$$

Таким образом, пространственные сечения в метрике де Ситтера (2.123) получаются при сечении гиперболоида нулевыми гиперплоскостями.

Нетрудно вычислить постоянную Хаббла для решения де Ситтера в виде (2.123)

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{R}.$$

Как видим, при таком выборе координат она действительно постоянна. Тем самым пространство-время де Ситтера дает один из немногих примеров инфляционного развития вселенной.

### Двуполостный гиперболоид, $\epsilon = -1$

При  $\epsilon = -1$  пространственными сечениями пространства-времени являются двуполостные гиперболоиды  $\mathbb{H}^3$ , описанные в разделе 2.2.2. В этом случае выберем

$$c_+ = -c_- = \frac{R}{2}.$$

Тогда масштабный множитель равен

$$a = R \operatorname{sh}(t/R),$$

и метрика де Ситтера принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - R^2 \operatorname{sh}^2(t/R) \left[ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right]. \quad (2.126)$$

Эта метрика определена при следующих значениях координат

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad (2.127)$$

и вырождена при  $t = 0$ .

Для того, чтобы доказать, что это действительно метрика де Ситтера, совершим преобразование координат  $w, v, x, y, z \mapsto R, r, t, \theta, \varphi$ :

$$\begin{aligned} v &:= R\sqrt{1+r^2} \operatorname{sh}(t/R), \\ w &:= R \operatorname{ch}(t/R), \\ x &:= Rr \operatorname{sh}(t/R) \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= Rr \operatorname{sh}(t/R) \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= Rr \operatorname{sh}(t/R) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Если подставить эти выражения в определяющее уравнение гиперболоида (2.120), то получим тождество  $R^2 = R^2$ . Следовательно, в исходном пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,4}$  гиперболоид задается равенством  $R = \text{const}$ .

Для получения явного вида метрики, индуцированной на гиперболоиде, необходимо подставить дифференциалы  $dv, dw, dx, dy$  и  $dz$  из (2.128) в исходную метрику (2.119). Учтем равенство

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(Rr \operatorname{sh}(t/R))]^2 + R^2 r^2 \operatorname{sh}^2(t/R)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Теперь нетрудно проверить, что в новых координатах метрика действительно принимает вид (2.126).

Пространственные сечения метрики де Ситтера (2.126) задаются равенством  $t = \text{const}$ . В исходном пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{1,4}$  время  $t$  параметризует гиперплоскости  $\mathbb{R}^{1,3}$ , которые задаются уравнением

$$w = R \operatorname{ch}(t/R) = \text{const.}$$

Это значит, что пространственные сечения метрики де Ситтера задаются сечениями гиперболоида гиперплоскостями  $w = \text{const}$ .

“Постоянная” Хаббла в данной системе координат равна

$$H = \frac{\operatorname{cth}(t/R)}{R}$$

и вовсе не является постоянной.

### Координаты Шварцшильда

Еще одна важная система координат  $R, \rho, \tau, \theta, \varphi$  для пространства де Ситтера задается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} v &:= R\sqrt{1 - \rho^2} \operatorname{sh} \tau, \\ w &:= R\sqrt{1 - \rho^2} \operatorname{ch} \tau, \\ x &:= R\rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= R\rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= R\rho \cos \theta. \end{aligned} \tag{2.129}$$

Как и ранее, гиперболоид (2.120) задается уравнением  $R = \text{const}$ . Индуцированная метрика на гиперболоиде в координатах Шварцшильда  $\tau, \rho, \theta, \varphi$  принимает вид

$$ds^2 = R^2 \left[ (1 - \rho^2) d\tau^2 - \frac{d\rho^2}{1 - \rho^2} - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \tag{2.130}$$

Эта метрика определена при

$$-\infty < \tau < \infty, \quad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \tag{2.131}$$

В этих координатах метрика де Ситтера статична.

Таким образом, при положительной космологической постоянной  $\Lambda$  и в отсутствие полей материи, для всех значений кривизны пространственных сечений:  $\epsilon = 1$ ,  $\epsilon = 0$  и  $\epsilon = -1$  мы получили пространство-время де Ситтера. Это космологическое решение не имеет никаких особенностей и после максимального продолжения вдоль экстремалей описывает пространство постоянной кривизны. Его группа изометрий  $\text{SO}(1, 4)$  максимальна. Мы видим, что метрика пространства де Ситтера может быть записана в форме метрики Фридмана со всеми возможными пространственными сечениями:  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  или  $\mathbb{H}^3$ . Кроме этого, постоянная Хаббла в различных системах координат разная. Пример метрики де Ситтера показывает насколько сильно космологические выводы зависят от выбора системы координат. Даже ответ на вопрос о том, является ли вселенная замкнутой или открытой, может зависеть от выбора системы координат. Это является существенным недостатком всех космологических моделей.

### 2.4.3 Пространство-время анти-де Ситтера $\text{AdS}$

Рассмотрим случай отрицательной космологической постоянной,  $\Lambda < 0$ , в пустом пространстве-времени,  $\mathcal{E} = \mathcal{P} = 0$ . Уравнения Фридмана по прежнему имеют вид (2.113), (3.23), где  $L = \Lambda/3 < 0$ . Из второго уравнения следует, что решения существуют только при  $\epsilon = -1$ , т.е. пространственными сечениями метрики Фридмана являются двуполостные гиперболоиды. При отрицательной космологической постоянной решение (2.115) является вещественным только если  $c_- = c_+^*$ . Положим теперь

$$R := \frac{1}{\sqrt{-L}}$$

и выберем  $c_+ = 1/2$ . Тогда масштабный множитель (2.115) примет вид

$$a = R \cos(t/R) \quad (2.132)$$

и метрика вселенной равна

$$ds^2 = dt^2 - R^2 \cos^2(t/R) \left[ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (2.133)$$

где мы использовали метрику двуполого пространственного гиперболоида  $\mathbb{H}^3$  в форме (2.53). Эта метрика называется *метрикой анти-де Ситтера* и определена при

$$-\pi R/2 < t < \pi R/2, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < \pi. \quad (2.134)$$

При  $t = \pm\pi R/2$  метрика вырождается.

Опять, из вида метрики анти-де Ситтера (2.133) совершенно не видно, что эта метрика описывает пространство-время постоянной кривизны. Чтобы доказать это, совершим следующее построение.

Рассмотрим плоское пятимерное пространство  $\mathbb{R}^{2,3}$  с декартовыми координатами  $v, w, x, y, z$ . По определению, его метрика имеет вид

$$ds^2 = dv^2 + dw^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.135)$$

Рассмотрим однополостный вложенный гиперболоид  $\text{AdS} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2,3}$ , который определен уравнением

$$v^2 + w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2. \quad (2.136)$$

На рис. 2.6 изображены двумерные сечения пространства анти-де Ситтера, соответствующие  $y = z = 0$ .

Поскольку уравнения (2.135) и (2.136) инвариантны относительно действия группы  $\text{SO}(2, 3)$ , то эта группа является группой изометрий пространства анти-де Ситтера. Для четырехмерного пространства-времени она максимальна, и ее алгебра содержит 10 независимых векторных полей Киллинга. Согласно теореме 1.3.1 пространство-время анти-де Ситтера является пространством постоянной кривизны. Группа  $\text{SO}(2, 3)$  называется *группой анти-де Ситтера*.

Чтобы доказать, что метрика (2.133) описывает пространство постоянной кривизны, совершим преобразование координат  $v, w, x, y, z \mapsto R, r, t, \theta, \varphi$ , определяемое формулами:

$$\begin{aligned} v &:= R \sin(t/R), \\ w &:= \pm R \sqrt{1+r^2} \cos(t/R), \\ x &:= Rr \cos(t/R) \sin\theta \cos\varphi, \\ y &:= Rr \cos(t/R) \sin\theta \sin\varphi, \\ z &:= Rr \cos(t/R) \cos\theta. \end{aligned} \quad (2.137)$$

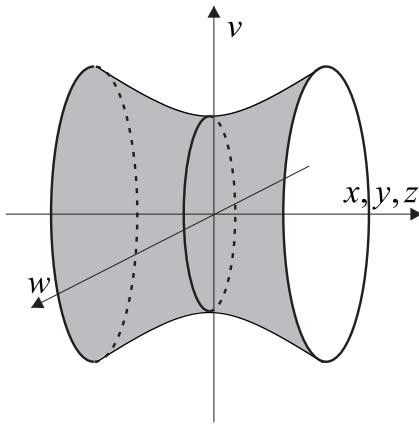


Рис. 2.6: Пространство-время анти-де Ситтера AdS.

В новой системе координат гиперболоид задается равенством  $R = \text{const.}$

Для получения индуцированной метрики используем равенство

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [d(Rr \cos(t/R))]^2 + R^2 r^2 \cos^2(t/R)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Прямые вычисления показывают, что индуцированная метрика принимает вид (2.133).

Пространственные сечения метрики анти-де Ситтера соответствуют постоянному времени  $t = \text{const.}$  В исходном пространстве  $\mathbb{R}^{2,3}$  время  $t$  параметризует гиперплоскости  $\mathbb{R}^{1,3}$ , которые задаются уравнением

$$v = R \sin(t/R) = \text{const.}$$

Это значит, что пространственные сечения метрики анти-де Ситтера (2.133) задаются сечениями гиперболоида гиперплоскостями  $v = \text{const.}$

“Постоянная” Хаббла для метрики анти-де Ситтера в рассматриваемой системе координат равна

$$H = -\frac{\operatorname{tg}(t/R)}{R}$$

и не является постоянной.

Таким образом, метрика анти-де Ситтера (2.133) представляет собой метрику пространства постоянной кривизны. Однако однополостный гиперболоид (2.136) не является пространством-временем анти-де Ситтера. Дело в том, что сечения гиперболоида двумерными плоскостями, определяемыми постоянными значениями пространственных координат  $x, y, z = \text{const.}$ , представляют собой окружности

$$v^2 + w^2 = R^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

Эти окружности являются замкнутыми временеподобными кривыми и приводят к нарушению причинности (машина времени). Чтобы исправить ситуацию необходимо от однополостного гиперболоида (2.136) перейти к его универсальной накрывающей. Для этого гиперболоид нужно “развернуть” вдоль временеподобной координаты  $v$ . Это достигается путем перехода к новым координатам  $t, r \mapsto \tau, \chi$ , оставляя координаты  $\theta, \varphi$  прежними. Зададим преобразование координат неявными формулами:

$$v := R \frac{\sin \tau}{\cos \chi}, \quad w := R \frac{\cos \tau}{\sin \chi},$$

где

$$0 < \tau < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < \chi < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$v^2 + w^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \chi},$$

и из уравнения гиперболоида следует равенство

$$r \cos(t/R) = \operatorname{tg} \chi.$$

В новых координатах

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = R^2 \frac{d\chi^2}{\cos^4 \chi} + R^2 \operatorname{tg}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Теперь нетрудно вычислить метрику пространства-времени анти-де Ситтера

$$ds^2 = \frac{R^2}{\cos^2 \chi} [d\tau^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (2.138)$$

Мы видим, что координата  $\tau$  является временем. Эта метрика статична и вейлевски эквивалентна метрике трехмерной сферы  $\mathbb{S}^3$ . Важно, что она определена при всех  $-\infty < \tau < \infty$ . При этом гиперболоид возникает после отождествления  $\tau \sim \tau + 2\pi$ . Под пространством анти-де Ситтера  $\text{AdS}$  понимается именно универсальная накрывающая однополостного гиперболоида с метрикой (2.138). В этом пространстве-времени замкнутые времениподобные кривые отсутствуют.

Заметим, что группа изометрии  $\mathbb{SO}(2, 3)$  действует свободно на однополостном гиперболоиде, но не на его универсальной накрывающей.

### Координаты Шварцшильда

Метрику анти-де Ситтера можно записать в координатах Шварцшильда. Для этого в объемлющем пространстве введем координаты

$$\begin{aligned} v &:= R\sqrt{1 + \rho^2} \sin \tau, \\ w &:= R\sqrt{1 + \rho^2} \cos \tau, \\ x &:= R\rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= R\rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= R\rho \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Нетрудно проверить, что гиперболоид задается равенством  $R = \text{const}$ . Метрика, индуцированная на гиперболоиде, в координатах Шварцшильда  $\tau, \rho, \theta, \varphi$  принимает вид

$$ds^2 = R^2 \left[ (1 + \rho^2) d\tau^2 - \frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (2.140)$$

Эта метрика определена при

$$-\infty < \tau < \infty, \quad 0 < \rho < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (2.141)$$

В координатах Шварцшильда метрика де Ситтера статична.

## 2.5 Однородные вселенные

В предыдущем разделе мы рассмотрели однородные и изотропные модели вселенной. При этом из изотропии вселенной вытекает ее однородность (предложение 1.3.1). Обратное утверждение неверно: однородных многообразий намного больше, чем изотропных. Трехмерных связных и односвязных изотропных многообразий всего три – это сфера  $S^3$ , евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  и двуполостный гиперболоид  $\mathbb{H}^3$ . Классификация всех трехмерных однородных многообразий в настоящее время неизвестна. Поэтому мы упростим задачу. Будем требовать, чтобы пространственные сечения постоянного времени  $t = \text{const}$  были не просто однородными, а главными однородными пространствами (см. раздел ??). Напомним, что главным однородным пространством называется группа преобразований  $(M, G)$ , которая действует транзитивно и свободно. В этом случае размерности многообразия и группы Ли равны, и многообразие  $M$  можно отождествить с самой группой Ли  $G$ . Поэтому классификация главных однородных пространств сводится к классификации трехмерных групп Ли. Согласно теореме ?? каждой алгебре Ли соответствует единственная, с точностью до изоморфизма, связная и односвязная группа Ли (универсальная накрывающая). Все остальные связные группы Ли с той же алгеброй являются фактором группами универсальной накрывающей по некоторой нормальной подгруппе, действующей свободно и собственно разрывно. Таким образом, если пространственными сечениями вселенной являются связные и односвязные главные однородные пространства, то их классификация сводится к классификации трехмерных алгебр Ли. Эта классификация хорошо известна.

### 2.5.1 Классификация Бианки

Трехмерные алгебры Ли были классифицированы Луиджи Бианки [?].

Пусть задана трехмерная алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  с базисом  $L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Коммутатор базисных левоинвариантных векторных полей,

$$[L_i, L_j] = f_{ij}^k L_k, \quad (2.142)$$

определяется структурными константами  $f_{ij}^k$ , которые, по построению, антисимметричны по нижним индексам

$$f_{ij}^k = -f_{ji}^k. \quad (2.143)$$

Кроме того, структурные константы должны удовлетворять тождествам Якоби (см. раздел ??)

$$f_{ij}^l f_{kl}^m + f_{jk}^l f_{il}^m + f_{ki}^l f_{jl}^m = 0. \quad (2.144)$$

Верно также обратное утверждение. Произвольный набор структурных констант, удовлетворяющих условиям (2.143) и (2.144), однозначно определяет некоторую алгебру Ли.

Таким образом, классификация трехмерных алгебр Ли сводится к перечислению всех возможных наборов структурных констант с точностью до некоторого отношения эквивалентности. В данном случае отношение эквивалентности – это выбор базиса в алгебре Ли. Мы говорим, что два базиса эквивалентны,  $L_i \sim L'_i$ , если они связаны некоторым невырожденным линейным преобразованием:

$$L_i \sim L'_i \quad \Leftrightarrow \quad L'_i = S_i^j L_j, \quad S \in \mathbb{GL}(3, \mathbb{R}).$$

Из определения структурных констант (2.142) вытекает, что при таких преобразованиях структурные константы ведут себя как тензор третьего ранга с одним контравариантным и двумя ковариантными индексами. Поскольку базис алгебры Ли  $L_i$ , как базис произвольного векторного пространства, определен с точностью до произвольных невырожденных линейных преобразований, то мы используем этот произвол для приведения структурных констант к некоторому каноническому виду.

Изначально в трехмерном векторном пространстве алгебры Ли никакой метрики нет, и мы не можем поднимать и опускать индексы у структурных констант. Зато есть два полностью антисимметричных тензора третьего ранга: один с ковариантными,  $\varepsilon_{ijk}$ , а другой с контравариантными индексами,  $\varepsilon^{ijk}$ . Мы принимаем соглашение, что  $\varepsilon_{123} = 1$  и  $\varepsilon^{123} = 1$ . Их свойства описаны в приложении ??.

Поскольку структурные константы антисимметричны по паре индексов, то их можно взаимно однозначно задать тензором второго ранга:

$$f_{ij}^k = \varepsilon_{ijl} t^{lk} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^{ijl} f_{ij}^k = 2t^{lk}.$$

Тензор второго ранга  $t^{lk}$  никакой симметрией не обладает, и его можно разложить на симметричную и антисимметричную части:

$$b^{lk} := \frac{1}{2}(t^{lk} + t^{kl}), \quad d^{lk} := \frac{1}{2}(t^{lk} - t^{kl}).$$

В свою очередь, антисимметричный тензор второго ранга можно параметризовать ковектором:

$$d^{ij} = \varepsilon^{ijk} a_k \quad \Leftrightarrow \quad d^{ij} \varepsilon_{ijk} = 2a_k.$$

Таким образом, в трехмерном случае структурные константы взаимно однозначно параметризуются симметричным тензором второго ранга  $b^{ij}$  и ковектором  $a_i$ :

$$f_{ij}^k = \varepsilon_{ijl} b^{lk} + \delta_i^k a_l - \delta_j^k a_l. \quad (2.145)$$

Отметим, что при получении данного представления никакая метрика на алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  не использовалась.

Теперь подставим структурные константы (2.145) в тождество Якоби (2.144). Для упрощения вычислений заметим, что левая сторона равенства (2.144) антисимметрична по трем индексам  $i, j, k$  и поэтому эквивалентна равенству

$$\varepsilon^{ijk} f_{ij}^l f_{kl}^m = 0.$$

Подставляя сюда выражение для структурных констант (2.145) приходим к равенству

$$b^{ij} a_j = 0. \quad (2.146)$$

Таким образом, для классификации алгебр Ли необходимо перечислить все симметричные тензоры  $b^{ij} = b^{ji}$  и ковекторы  $a_i$ , на которые наложено условие (2.146) и отношение эквивалентности. Из определения следует, что  $b^{ij}$  и  $a_i$  при замене базиса в алгебре Ли ведут себя как тензоры. Чтобы привести структурные константы к каноническому виду совершим следующее преобразование.

Уравнение (2.146) означает, что ковектор  $a$ , если он отличен от нуля, лежит в одном из главных направлений тензора  $b^{ij}$ , – в том, которое отвечает нулевому собственному значению  $b^{ij}$ . Согласно теореме ?? с помощью ортогонального преобразования базиса алгебры Ли симметричную матрицу  $b$  всегда можно преобразовать к диагональному виду

$$b^{ij} = b^{(i)} \delta^{ij}, \quad \text{суммирования по } i \text{ нет,}$$

где на диагонали стоят собственные числа. Поэтому, не ограничивая общности, можно положить  $a = (a, 0, 0)$ . Тогда уравнение (2.146) примет вид  $b^{(1)}a$ , откуда следует, что либо  $b^{(1)} = 0$ , либо  $a = 0$ .

После таких преобразований правила коммутации базисных векторных полей алгебры Ли примут вид

$$[L_1, L_2] = b^{(3)}L_3 - aL_2, \quad [L_2, L_3] = b^{(1)}L_1, \quad [L_3, L_1] = b^{(2)}L_2 + aL_3. \quad (2.147)$$

У нас имеется также свобода в масштабировании базиса (умножению на отличные от нуля постоянные). Совершим масштабное преобразование

$$L_1 \mapsto L'_1 := k_1 L_1, \quad L_2 \mapsto L'_2 := k_2 L_2, \quad L_3 \mapsto L'_3 := k_3 L_3, \quad k_1 k_2 k_3 \neq 0.$$

Тогда для нового базиса правила коммутации (2.147) останутся прежними, но с заменой

$$b'^{(1)} = \frac{k_1}{k_2 k_3} b^{(1)}, \quad b'^{(2)} = \frac{k_2}{k_3 k_1} b^{(2)}, \quad b'^{(3)} = \frac{k_3}{k_1 k_2} b^{(3)}, \quad a' = \frac{a}{k_1}.$$

Допустим, что все собственные значения  $b^{(i)}$  отличны от нуля, и положим

$$k_1 = \frac{k_2 k_3}{|b^{(1)}|}, \quad k_2 = \frac{k_1 k_3}{|b^{(2)}|}, \quad k_3 = \frac{k_1 k_2}{|b^{(3)}|}.$$

Эти уравнения имеют решения

$$k_1^2 = |b^{(2)} b^{(3)}|, \quad k_2^2 = |b^{(3)} b^{(1)}|, \quad k_3^2 = |b^{(1)} b^{(2)}|. \quad (2.148)$$

Тогда новые собственные значения будут равны по модулю единице  $b'^{(i)} = \pm 1$ , при этом  $a = 0$ , как следует из уравнения (2.146).

Заметим также, что изменение знака одной постоянной, например,  $k_1$  при извлечении корня в (2.148) приводит к одновременному изменению всех знаков собственных значений  $b^{(i)}$ .

Аналогично можно доказать, что при  $a = 0$  все отличные от нуля собственные значения  $b^{(i)}$  можно по модулю приравнять единице. При этом еще остается свобода одновременного изменения знаков всех собственных значений. В таблице 2.1 приведена классификация Бианки трехмерных алгебр Ли. Первые шесть строк отведены случаю  $a = 0$ , который мы только что обсудили.

Если  $a \neq 0$ , то с необходимостью  $b^{(1)} = 0$ . При  $b^{(2)} = b^{(3)} = 0$  и  $b^{(2)} = 0, b^{(3)} \neq 0$ , выбрав  $k_1 = a$ , получим  $a' = 1$ . Одновременно можно преобразовать  $b^{(3)} \neq 0$  в единицу. Если  $b^{(2)} \neq 0$  и  $b^{(3)} \neq 0$ , то возможны два неэквивалентных случая:  $b^{(2)} > 0, b^{(3)} > 0$  и  $b^{(2)} > 0, b^{(3)} < 0$ .

Если  $b^{(2)} > 0, b^{(3)} > 0$ , то выберем

$$k_2 = \frac{k_1 k_3}{b^{(2)}}, \quad k_1 = \pm \sqrt{b^{(2)} b^{(3)}}. \quad (2.149)$$

Тогда  $b'^{(2)} = 1$  и  $b'^{(3)} = 1$ , а параметр  $a$  преобразуется по правилу

$$a' = \pm \frac{a}{\sqrt{b^{(2)} b^{(3)}}}.$$

Мы видим, что с помощью выбора знака  $k_1$  в масштабном преобразовании (2.149) можно изменить знак постоянной  $a$ , но не ее модуль. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать  $a > 0$ . Таким образом, в типе  $\text{VII}_a$  мы имеем однопараметрическое семейство алгебр, которые параметризуются положительными числами  $a > 0$ .

Тип	$a$	$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$	$\eta$
I	0	0	0	0	$\text{diag}(0, 0, 0)$
II	0	1	0	0	$\text{diag}(0, 0, 0)$
VII <sub>0</sub>	0	1	1	0	$\text{diag}(0, 0, 2)$
VI <sub>0</sub>	0	1	-1	0	$\text{diag}(0, 0, -2)$
IX	0	1	1	1	$\text{diag}(2, 2, 2)$
VIII	0	1	1	-1	$\text{diag}(-2, -2, 2)$
V	1	0	0	0	$\text{diag}(-2, 0, 0)$
IV	1	0	0	1	$\text{diag}(-2, 0, 0)$
VII <sub>a</sub> , $a > 0$	$a$	0	1	1	$\text{diag}(2 - 2a^2, 0, 0)$
III	1	0	1	-1	$\text{diag}(-4, 0, 0)$
VI <sub>a</sub> , $a > 0$	$a$	0	1	-1	$\text{diag}(-2 - 2a^2, 0, 0)$

Таблица 2.1: Классификация трехмерных алгебр Ли по Бианки.

В случае  $b^{(2)} > 0$ ,  $b^{(3)} < 0$  можно проделать аналогичное построение.

Таким образом, по классификации Бианки мы имеем девять типов трехмерных алгебр Ли I–IX, две из которых, VII<sub>a</sub> и VI<sub>a</sub> параметризуются положительным числом  $a$ .

В последней колонке таблицы 2.1 указана форма Киллинга–Картана

$$\eta_{ij} := -f_{ik}{}^l f_{jl}{}^k = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} b^{km} b^{ln} - 2a_i a_j.$$

В выбранном базисе матрица  $b^{ij}$  диагональна и  $a = (a, 0, 0)$ . Поэтому форма Киллинга–Картана тоже диагональна. Ее диагональные элементы равны:

$$\eta_{11} = 2b^{(2)}b^{(3)} - 2a^2, \quad \eta_{22} = 2b^{(1)}b^{(3)}, \quad \eta_{33} = 2b^{(1)}b^{(2)}.$$

Они и приведены в таблице.

Согласно теореме Картана ?? алгебра Ли полупроста (см. раздел ??) тогда и только тогда, когда ее форма Киллинга–Картана невырождена. Из таблицы следует, что среди трехмерных алгебр Ли только две являются полупростыми: это алгебры VIII и IX.

**Тип I.** Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_i, L_j] = 0. \tag{2.150}$$

Это – коммутативная алгебра сдвигов в  $\mathbb{R}^3$ . Соответствующая универсальная накрывающая группа Ли представляет собой коммутативную группу сдвигов в трехмерном евклидовом пространстве, которую можно отождествить с самим  $\mathbb{R}^3$ .

**Тип II.** Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = 0, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = 0. \tag{2.151}$$

Эта алгебра изоморфна алгебре Ли группы Гейзенберга  $\mathbb{H}_3(\mathbb{R})$  (группа верхне треугольных  $3 \times 3$  матриц с единицами на диагонали).

**Тип III.** Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = -L_3 - L_2, \quad [L_2, L_3] = 0, \quad [L_3, L_1] = L_2 + L_3. \tag{2.152}$$

Перейдем к новому базису

$$\tilde{L}_1 := \frac{1}{2}L_1, \quad \tilde{L}_2 := L_2 + L_3, \quad \tilde{L}_3 := L_2 - L_3.$$

Тогда коммутационные соотношения примут вид

$$[\tilde{L}_1, \tilde{L}_2] = -\tilde{L}_2, \quad [\tilde{L}_1, \tilde{L}_3] = 0, \quad [\tilde{L}_2, \tilde{L}_3] = 0.$$

Сравнение этих коммутационных соотношений с коммутационными соотношениями (??) показывает, что алгебра типа III изоморфна прямой сумме  $\mathfrak{a}(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$ , где  $\mathfrak{a}(\mathbb{R})$  – алгебра Ли группы аффинных преобразований прямой, натянутой на  $\tilde{L}_1$ ,  $\tilde{L}_2$  и  $\mathbb{R}$  – алгебра Ли сдвигов прямой.

**Тип IV.** Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = L_3 - L_2, \quad [L_2, L_3] = 0, \quad [L_3, L_1] = L_3. \quad (2.153)$$

**Тип V.** Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = -L_2, \quad [L_2, L_3] = 0, \quad [L_3, L_1] = L_3. \quad (2.154)$$

**Тип VI<sub>a</sub>.** Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = -L_3 - aL_2, \quad [L_2, L_3] = 0, \quad [L_3, L_1] = L_2 + aL_3. \quad (2.155)$$

В частном случае  $a = 0$  алгебра типа VI<sub>0</sub> изоморфна алгебре Ли двумерной группы Пуанкаре  $\mathfrak{io}(1, 1)$  (движения двумерной плоскости Минковского).

В частном случае  $a = 1$  совпадает с алгеброй типа III.

**Тип VII<sub>a</sub>.** Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = L_3 - aL_2, \quad [L_2, L_3] = 0, \quad [L_3, L_1] = L_2 + aL_3. \quad (2.156)$$

В частном случае  $a = 0$  алгебра типа VII<sub>0</sub> изоморфна алгебре Ли неоднородных двумерных вращений  $\mathfrak{io}(2)$  (движения двумерной евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$ ).

**Тип VIII.** Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = -L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2. \quad (2.157)$$

Сравнение с коммутационными соотношениями (2.224) показывает, что алгебра типа VIII изоморфна алгебре Лоренца  $\mathfrak{so}(2, 1)$ . Универсальные накрывающая для группы Лоренца довольно сложно устроена и построена в разделе ???. Как многообразие, она некомпактна и диффеоморфна евклидову пространству  $\mathbb{R}^3$ .

**Тип IX.** Коммутационные соотношения имеют вид

$$[L_1, L_2] = L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2. \quad (2.158)$$

Это – алгебра трехмерных вращений  $\mathfrak{so}(3)$  (ср. (??)). Как было показано в разделе ??, ее универсальной накрывающей является группа Ли  $\mathbb{SU}(2)$ , которая, как многообразие, диффеоморфна трехмерной сфере  $\mathbb{S}^3$ .

Можно доказать, что перечисленные в таблице алгебры неразложимы в прямые суммы, за исключением алгебр типа I и III.

## 2.6 Неголономный базис

Аффинная геометрия на многообразии  $\mathbb{M}$ ,  $\dim \mathbb{M} = n$ , задается метрикой  $g_{\alpha\beta}$  и аффинной связностью  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  или, что эквивалентно, метрикой  $g_{\alpha\beta}$ , кручением  $T_{\alpha\beta}^\gamma$  и неметричностью  $Q_{\alpha\beta\gamma}$ . При таком описании каждое преобразование координат сопровождаются соответствующим преобразованием компонент тензорных полей относительно координатного базиса. Существует также другой способ описания геометрии, когда компоненты тензорных полей рассматриваются относительно репера, который не меняется при преобразовании координат. В этом случае на компоненты тензорных полей действует группа локальных преобразований  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ , что соответствует вращению репера. В результате аффинная геометрия на многообразии  $\mathbb{M}$  будет задана репером  $e_\alpha^a$  и линейной или  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  связностью  $\omega_{\alpha a}^b$  (см. раздел ??).

**Определение.** Переменные репер  $e_\alpha^a(x)$  и  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  связность  $\omega_{\alpha a}^b(x)$ , задающие на многообразии  $\mathbb{M}$  аффинную геометрию, называются *переменными Картана*. В четырехмерном пространстве-времени репер называется *тетрадой*. В двумерном и трехмерном пространстве репер называется соответственно *диадой* и *триадой*.  $\square$

**Замечание.** В моделях математической физики переменные Картана, как правило, упрощают вычисления и необходимы при рассмотрении спинорных полей на многообразии  $\mathbb{M}$ .  $\square$

Напомним, что координатный базис касательных пространств  $T_x(\mathbb{M})$  во всех точках многообразия  $x \in \mathbb{M}$  мы обозначаем  $\partial_\alpha$ , и он называется *голономным*. Важным свойством координатных базисных векторов  $\partial_\alpha$  является их коммутативность:

$$[\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0.$$

Предположим, что в каждой точке многообразия  $x \in \mathbb{M}$  задан произвольный базис касательного пространства  $e_a(x)$  (репер) и дуальный к нему базис 1-форм  $e^a(x)$  (корепер),  $a = 1, \dots, n$ . Дуальность означает, что значение 1-форм  $e^a$  на векторных полях  $e_b$  равно символу Кронекера:  $e^a(e_b) = \delta_b^a$ .

**Замечание.** Как уже отмечалось, репер может существовать глобально не для всех многообразий. Например, его не существует на неориентируемых многообразиях. В таких случаях все, сказанное ниже, имеет локальный характер. Тем не менее полученные формулы важны для вычислений, которые, как правило, проводятся в какой либо системе координат.  $\square$

Репер и корепер можно разложить по координатному базису:

$$e_a = e^\alpha_a \partial_\alpha, \quad e^a = dx^\alpha e_\alpha^a,$$

где  $e^\alpha_a$  и  $e_\alpha^a$  – взаимно обратные невырожденные матрицы, что является следствием дуальности базисов,

$$e^\alpha_a e_\alpha^b = \delta_a^b, \quad e^\alpha_a e_\beta^a = \delta_\beta^\alpha.$$

По-предположению, матрицы  $e^\alpha_a$  и  $e_\alpha^a$  невырождены и достаточно гладко зависят от точки многообразия.

В общем случае репер представляет собой *неголономный базис* касательного пространства, т.е. не существует такой системы координат  $x^a = x^a(x)$ , что

$$e^\alpha_a = \partial_a x^\alpha. \tag{2.159}$$

Репер определен с точностью до локальных  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  преобразований, действующих на латинские индексы. Его важнейшей характеристикой являются компоненты неголономности  $c_{ab}^c$ , которые определяются коммутатором базисных векторных полей:

$$[e_a, e_b] := c_{ab}^c e_c \quad (2.160)$$

и антисимметричны по нижним индексам,

$$c_{ab}^c(x) = -c_{ba}^c(x).$$

Из тождеств Якоби для алгебры Ли векторных полей,

$$[e_a[e_b, e_c]] + [e_b[e_c, e_a]] + [e_c[e_a, e_b]] = 0,$$

следуют тождества для компонент неголономности:

$$\partial_a c_{bc}^d + \partial_b c_{ca}^d + \partial_c c_{ab}^d + c_{ab}^e c_{ce}^d + c_{bc}^e c_{ae}^d + c_{ca}^e c_{be}^d = 0, \quad (2.161)$$

где  $\partial_a := e_a = e^\alpha_a \partial_\alpha$ .

Нетрудно проверить, что равенство нулю компонент неголономности является необходимым и достаточным условием локальной разрешимости системы уравнений (2.159). Это означает, что, если компоненты неголономности равны нулю в некоторой области, то для любой точки из этой области существует окрестность, в которой можно выбрать такую систему координат, что базис станет голономным  $e_a = \partial_a$ .

Из определения (2.160) следует явное выражение для компонент неголономности через компоненты репера и их производные

$$c_{ab}^c = (e^\alpha_a \partial_\alpha e^\beta_b - e^\alpha_b \partial_\alpha e^\beta_a) e_\beta^c. \quad (2.162)$$

Умножив это соотношение на обратные матрицы  $e_\alpha^a$ , получим эквивалентную формулу

$$c_{\alpha\beta}^c := e_\alpha^a e_\beta^b c_{ab}^c = -\partial_\alpha e_\beta^c + \partial_\beta e_\alpha^c, \quad (2.163)$$

которую можно переписать в виде

$$de^c = -\frac{1}{2} e^a \wedge e^b c_{ba}^c, \quad (2.164)$$

где использовано определение внешнего умножения и дифференцирования форм (см. раздел ??).

Многие формулы содержат след компонент неголономности, который определяется следующим образом:

$$c_a := c_{ba}^b = \partial_\alpha e^\alpha_a + \frac{\partial_a \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}}. \quad (2.165)$$

Компоненты неголономности ковариантны относительно преобразования координат  $x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'}(x)$ , но не являются компонентами какого либо тензора относительно локальных  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  преобразований.

Использование неголономного базиса вместо координатного бывает значительно удобнее и часто используется в приложениях. Поэтому получим основные формулы дифференциальной геометрии в неголономном базисе.

Произвольное векторное поле можно разложить как по координатному, так и по некоординатному (неголономному) базису

$$X = X^\alpha \partial_\alpha = X^a e_a,$$

где  $X^\alpha = e^\alpha{}_a X^a$  и  $X^a = X^\alpha e_\alpha{}^a$ . Предположим, что переход от греческих индексов к латинским и наоборот у компонент тензорных полей произвольного ранга всегда осуществляется с помощью компонент репера и корепера. При этом все симметрии относительно перестановок индексов, конечно, сохраняются.

Если на  $\mathbb{M}$  задана метрика  $g_{\alpha\beta}$ , то ее компоненты в неголономном базисе имеют вид

$$g_{ab} = e^\alpha{}_a e^\beta{}_b g_{\alpha\beta}. \quad (2.166)$$

В общем случае компоненты метрики  $g_{ab}(x)$  зависят от точки многообразия. Метрика  $g_{ab}$  всегда имеет ту же сигнатуру, что и метрика  $g_{\alpha\beta}$ , т.к. матрица  $e^\alpha{}_a$  невырождена. Подъем и опускание греческих и латинских индексов осуществляется с помощью метрик  $g_{\alpha\beta}$  и  $g_{ab}$ , соответственно.

Как правило, репер используют в тех случаях, когда матрица  $g_{ab}$  является диагональной и постоянной, а на диагонали расположены плюс и минус единицы:

$$g_{ab} = \eta_{ab} := \text{diag} \left( \underbrace{+ \cdots +}_p \underbrace{- \cdots -}_q \right), \quad p + q = n.$$

Локально такой репер существует, поскольку уравнение (2.166) при одинаковых сигнатурах метрик  $g_{ab}$  и  $g_{\alpha\beta}$  всегда разрешимо относительно репера. Такой репер называется *ортонормальным* и определен с точностью до  $\mathbb{O}(p, q)$  вращений. Ортонормальный базис часто бывает более удобным, т.к. метрика в этом базисе постоянна.

Для римановой метрики множество реперов делится на два класса: с положительным и отрицательным определителем. Для многообразий с метрикой лоренцевой сигнатуры множество реперов можно разбить на четыре класса, по числу несвязных компонент группы Лоренца (см. раздел ??).

Компоненты тензоров второго и более высокого рангов могут содержать одновременно и греческие, и латинские индексы. По построению, ковариантная производная от компонент такого тензора содержит по одному слагаемому с аффинной связностью для каждого греческого индекса и одному слагаемому с линейной связностью для каждого латинского индекса. Если репер задан, то из определения (локальной формы) линейной связности (??) следует взаимно однозначная связь между линейной и аффинной связностью:

$$\omega_{\alpha a}{}^b = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\gamma e^\beta{}_a e_\gamma{}^b - \partial_\alpha e_\beta{}^b e^\beta{}_a. \quad (2.167)$$

Эту формулу можно переписать в виде равенства нулю ковариантной производной от компонент корепера:

$$\nabla_\alpha e_\beta{}^a = \partial_\alpha e_\beta{}^a - \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta e_\gamma{}^a + e_\beta{}^b \omega_{\alpha b}{}^a = 0. \quad (2.168)$$

Отсюда следует, что ковариантная производная от компонент репера также обращается в нуль

$$\nabla_\alpha e^\beta{}_a = \partial_\alpha e^\beta{}_a + \Gamma_{\alpha\gamma}{}^\beta e^\gamma{}_a - \omega_{\alpha a}{}^b e^\beta{}_b = 0.$$

Тогда, используя правило Лейбница, можно свободно переходить от греческих индексов к латинским и наоборот под знаком ковариантного дифференцирования:

$$\nabla_\alpha X^a = \nabla_\alpha (X^\beta e_\beta{}^a) = (\nabla_\alpha X^\beta) e_\beta{}^a,$$

$$\nabla_\alpha X_a = \nabla_\alpha (X_\beta e^\beta{}_a) = (\nabla_\alpha X_\beta) e^\beta{}_a,$$

где

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha X^a &= \partial_\alpha X^a + \omega_{ab}^a X^b, \\ \nabla_\alpha X_a &= \partial_\alpha X_a - \omega_{aa}^b X_b\end{aligned}\tag{2.169}$$

— ковариантные производные от компонент векторного поля относительно неголономного базиса.

Если аффинная связность не является метрической, то операция подъема и опускания индексов с помощью метрик  $g_{\alpha\beta}$  и  $g_{ab}$  не коммутирует с ковариантной производной.

**Замечание.** Формулу (2.167) можно рассматривать, как калибровочное преобразование (вращение)  $\Gamma \mapsto \omega$  в касательном пространстве, которое совпадает с преобразованием калибровочных полей Янга–Миллса (??). При этом репер  $e_\alpha^a \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  играет роль матрицы преобразования (локального вращения), а координаты многообразия не затрагиваются.  $\square$

Формулы для кривизны (??) и кручения (??) содержат два греческих индекса. Эти индексы также можно преобразовать в неголономные. Простые вычисления приводят к следующим компонентам тензора кривизны и кручения в неголономном базисе:

$$R_{abc}^d = \partial_a \omega_{bc}^d - \partial_b \omega_{ac}^d - \omega_{ac}^e \omega_{be}^d + \omega_{bc}^e \omega_{ae}^d - c_{ab}^e \omega_{ec}^d, \tag{2.170}$$

$$T_{ab}^c = \omega_{ab}^c - \omega_{ba}^c - c_{ab}^c, \tag{2.171}$$

где  $\omega_{ab}^c := e^\alpha_a \omega_{\alpha b}^c$  и  $\partial_a := e^\alpha_a \partial_\alpha$ . Эти формулы также часто используются в приложениях, особенно тогда, когда компоненты линейной связности  $\omega_{abc}$  являются постоянными относительно некоторого неголономного базиса. В разделе ?? мы используем их для вычисления тензора кручения и кривизны групп Ли.

В координатном базисе преобразование координат сопровождается преобразование компонент тензорных полей. Введение репера позволяет отделить преобразование координат от преобразований в касательном пространстве. Это достигается путем введения  $n^2$  новых полей  $e_\alpha^a(x)$ . В результате появляется дополнительная возможность совершать локальные  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  преобразования, зависящие также от  $n^2$  функций, в касательном пространстве, не затрагивая координат многообразия. Очевидно, что всегда можно совершить такое преобразование, что в некоторой области репер совпадет с координатным базисом  $e_\alpha^a = \delta_\alpha^a$ . В этом случае линейная связность совпадет с аффинной  $\omega_{\alpha a}^b = \Gamma_{\alpha a}^b$ , а выражения для кривизны (2.170) и кручения (2.171) перейдут в уже знакомые формулы аффинной геометрии, т.к. компоненты неголономности обратятся в нуль:  $c_{ab}^c = 0$ .

Если на многообразии задана метрика  $g_{ab}$  общего вида, для которой

$$\nabla_a g_{bc} = -Q_{abc},$$

где  $Q_{abc}$  — тензор неметричности, то из уравнения (??) и определения (2.167) следует выражение для линейной связности со всеми неголономными индексами:

$$\begin{aligned}\omega_{abc} &= \frac{1}{2}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab}) + \frac{1}{2}(c_{abc} - c_{bca} + c_{cab}) + \\ &+ \frac{1}{2}(T_{abc} - T_{bca} + T_{cab}) + \frac{1}{2}(Q_{abc} + Q_{bca} - Q_{cab}),\end{aligned}\tag{2.172}$$

где  $\omega_{abc} := \omega_{ab}{}^d g_{dc}$  и  $c_{abc} := c_{ab}{}^d g_{dc}$ . В этом случае линейную связность можно выразить через метрику, репер, кручение и неметричность.

Условие метричности связности в неголономном базисе принимает вид

$$\nabla_a g_{bc} = \partial_a g_{bc} - \omega_{abc} - \omega_{acb} = 0, \quad (2.173)$$

что эквивалентно равенству  $Q_{abc} = 0$ .

Предположим, что на  $\mathbb{M}$  задана метрика и метрическая связность. Тогда выражение для тензора кривизны (2.170) со всеми опущенными индексами в неголономном базисе равно

$$R_{abcd} = \partial_a \omega_{bcd} - \partial_b \omega_{acd} - \omega_{bc}{}^e \omega_{ade} + \omega_{ac}{}^e \omega_{bde} - c_{ab}{}^e \omega_{ecd}, \quad (2.174)$$

где использовано равенство (2.173).

В геометрии Римана–Картана всегда можно выбрать ортонормальный репер, для которого  $g_{ab} = \delta_{ab}$  или  $\eta_{ab}$ , если сигнатура метрики отличается от евклидовой. Такие реперы определены с точностью до локальных  $\mathbb{SO}(n)$  вращений (или  $\mathbb{SO}(p, q)$  вращений,  $p+q = n$ , для неевклидовой сигнатуры). Тогда  $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$  связность редуцируется к  $\mathbb{SO}(n)$  связности (или  $\mathbb{SO}(p, q)$  связности). В этом случае из условия метричности (2.173) вытекает, что компоненты линейной связности антисимметричны по последней паре индексов,  $\omega_{abc} = -\omega_{acb}$ , поскольку  $\partial_a g_{bc} = 0$ . Кроме этого, тензор кривизны со всеми ковариантными индексами (2.174) антисимметричен как по первой, так и по второй паре индексов.

В (псевдо-)римановой геометрии кручение и неметричность равны нулю. Тогда из формулы (2.172) для ортонормального репера следует выражение для соответствующей  $\mathbb{SO}(n)$ - или  $\mathbb{SO}(p, q)$  связности через компоненты неголономности:

$$\tilde{\omega}_{abc} = \frac{1}{2}(c_{abc} - c_{bca} + c_{cab}). \quad (2.175)$$

Если (псевдо-) риманово многообразие допускает векторное поле Киллинга  $K = K^a e_a$ , то уравнение Киллинга (1.4) в неголономном базисе принимает вид

$$\tilde{\nabla}_a K_b + \tilde{\nabla}_b K_a = 0, \quad (2.176)$$

где

$$\tilde{\nabla}_a K_b = e^\alpha{}_a \partial_\alpha K_b - \tilde{\omega}_{ab}{}^c K_c, \quad K_b := K^a g_{ab}. \quad (2.177)$$

Как и ранее знак тильды означает, что связность построена по метрике при нулевом кручении и неметричности. Эта формула следует из того, что переход между индексами можно проводить под знаком ковариантного дифференцирования.

### 2.6.1 Уравнения движения для однородной вселенной

В настоящем разделе мы покажем, что для однородных моделей вселенных, у которых все пространственные сечения  $x^0 := t = \text{const}$  являются главными однородными пространствами, уравнения Эйнштейна сводятся к системе *обыкновенных* дифференциальных уравнений. Это является существенным упрощением задачи нахождения точных решений, хотя построить их в явном виде удается далеко не всегда.

**Определение.** Вселенная  $\mathbb{M}$  называется однородной, если она имеет вид топологического произведения вещественной прямой  $\mathbb{R} \ni t$  на однородное трехмерное пространство  $\mathbb{H} \ni x$ , т.е.  $\mathbb{M} = \mathbb{R} \times \mathbb{H}$ . При этом мы предполагаем, что метрика на  $\mathbb{M}$  инвариантна относительно группы транзитивных преобразований, действующих на  $\mathbb{H}$  и продолженных на все  $\mathbb{M}$ .  $\square$

Пусть  $\mathbb{H}$  – трехмерное однородное пространство с координатами  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ . Пусть  $K = K^\mu \partial_\mu$  – один из векторов Киллинга, действующих на  $\mathbb{H}$ . Выберем естественные координаты на  $\mathbb{R} \times \mathbb{H}$  в виде  $\{x^\alpha\} = \{t, x^\mu\}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ . Теперь продолжим действие транзитивной группы преобразований с  $\mathbb{H}$  на все  $\mathbb{M}$ :

$$t \mapsto t' := t, \quad x \mapsto x'^\mu := x^\mu + \epsilon K^\mu(t, x), \quad \epsilon \ll 1.$$

Тогда из определения и теоремы 1.5.1 следует, что существует такая система координат на  $\mathbb{M}$ , что метрика пространства-времени имеет блочно диагональный вид

$$ds^2 = dt^2 + \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.178)$$

где  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}(t, x)$  – инвариантная метрика на однородном пространстве  $\mathbb{H}$ , зависящая от времени  $t$  как от параметра. При этом векторные поля Киллинга не зависят от времени,  $K^\mu = K^\mu(x)$ .

Отметим отличие метрики (2.178) от метрики однородной и изотропной вселенной (2.64). Раньше мы требовали, чтобы зависимость от времени метрики на  $\mathbb{S}$  входила только через масштабный множитель. Теперь мы рассматриваем более широкий класс метрик.

Однородное пространство – это транзитивная группа преобразований  $(\mathbb{H}, \mathbb{G})$ . Для определенности, мы считаем, что группа преобразований действует справа. В моделях вселенной Фридмана пространственные сечения являются пространствами постоянной кривизны. Группа симметрии действует на них транзитивно, и поэтому они являются однородными пространствами. Для того, чтобы описать однородные вселенные, необходимо описать инвариантные метрики на однородных пространствах. Эта задача довольно сложна, и мы рассмотрим более простой случай, когда пространственные сечения являются главными однородными пространствами.

В частном случае, когда пространство  $\mathbb{H}$  является главным однородным пространством, его можно отождествить с трехмерным многообразием группы Ли,  $\mathbb{H} = \mathbb{G}$ . При этом инвариантные структуры на  $\mathbb{G}$  строятся следующим образом. Мы фиксируем произвольную точку  $x_0 \in \mathbb{G}$ , задаем в этой точке компоненты некоторого тензора и разносим его по всему групповому многообразию с помощью группового действия справа. В результате, по построению, получим инвариантный тензор, заданный на группе Ли  $\mathbb{G}$ . Здесь важно, что однородное пространство является главным, т.к. в этом случае решение уравнения  $x = x_0 a$ , где  $x, x_0 \in \mathbb{G}$  – две произвольные точки, для  $a \in \mathbb{G}$  единственны. Если же однородное пространство не является главным, то в общем случае разнесение тензорных компонент, заданных в точке  $x_0$ , не является единственным и поэтому не определено.

В предыдущем разделе мы построили все трехмерные алгебры Ли. Если соответствующая группа Ли является полупростой, то на групповом многообразии существует естественная двусторонне инвариантная метрика – форма Киллинга–Картана. Из классификации Бианки следует, что таких групп всего две: типы VIII и IX. При этом форма Киллинга–Картана для типа VIII не является знакоопределенной и ее нельзя использовать в качестве инвариантной метрики на пространственных сечениях в космологических моделях. Поэтому в качестве инвариантной метрики мы

используем не двусторонне инвариантную метрику, а метрику, инвариантную относительно действия группы справа.

Пусть  $R_i(x)$ ,  $i = 1, 2, 3$  – произвольный правоинвариантный базис на группе Ли  $\mathbb{G}$ , который получается фиксированием некоторого базиса в касательном пространстве к единице группы  $R_i(x_0)$  с последующим разнесением по всей группе с помощью группового действия справа. Алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  группы Ли  $\mathbb{G}$  – это алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на  $\mathbb{G}$ . Базис алгебры Ли  $L_i(x)$  строится так же, как и базис правоинвариантных векторных полей, но с помощью группового действия слева. При этом в единице группы, по предположению, векторные поля совпадают,  $R_i(x_0) = L_i(x_0)$ . В главе ?? было доказано, что базисы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[L_i, L_j] = f_{ij}^k L_k, \quad [R_i, R_j] = -f_{ij}^k R_k, \quad (2.179)$$

где  $f_{ij}^k$  – структурные константы группы Ли  $\mathbb{G}$ . Базис алгебры Ли генерирует действие группы Ли справа. В частности, это действие сохраняет правоинвариантные векторные поля. Формально это записывается в виде равенства нулю производной Ли:

$$\mathcal{L}_{L_i} R_j = [L_i, R_j] = 0. \quad (2.180)$$

Построение право- и левоинвариантных векторных полей на группе Ли подробно описано в главе ??.

Если на группе Ли в какой то окрестности задана система координат  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , то базисы право- и левоинвариантных векторных полей можно разложить по координатному базису:

$$R_i = e^\mu{}_i \partial_\mu, \quad L_i = l^\mu{}_i \partial_\mu, \quad (2.181)$$

$e^\mu{}_i(x)$  и  $l^\mu{}_i(x)$  – компоненты соответствующих реперов. В трехмерном случае реперы называют также *триадами*. Инвариантный базис кокасательных пространств  $R^i$  и  $L^i$  (базис 1-форм) определяется следующими равенствами:

$$R^i(R_j) = \delta_j^i, \quad L^i(L_j) = \delta_j^i. \quad (2.182)$$

В координатном базисе он имеет следующий вид

$$R^i = dx^\mu e_\mu{}^i, \quad L^i = dx^\mu l_\mu{}^i, \quad (2.183)$$

где  $e_\mu{}^i$  и  $l_\mu{}^i$  – компоненты обратных реперов. Эти базисы удовлетворяют уравнениям Маурера–Картана (??):

$$dR^i = \frac{1}{2} R^j \wedge R^k f_{jk}{}^i, \quad dL^i = -\frac{1}{2} L^j \wedge L^k f_{jk}{}^i, \quad (2.184)$$

где  $d$  и  $\wedge$  обозначают внешнюю производную и внешнее произведение форм (см. главу ??).

**Пример 2.6.1.** Если группа коммутативна, т.е.  $f_{ij}^k = 0$ , то можно выбрать  $R_i = L_i = \partial_i$ , где  $x^i$  некоторая система координат на  $\mathbb{G}$ .  $\square$

Для нахождения явного вида реперов  $e^\mu{}_i(x)$  и  $l^\mu{}_i(x)$  необходимо знание функции композиции для группы  $\mathbb{G}$ . К сожалению, она известна только в простейших случаях. Однако для проведения вычислений этого, как правило, и не нужно. Все

вычисления можно провести непосредственно в базисе  $R_i$ . Этот базис в общем случае неголономен, поскольку коммутатор базисных векторных полей отличен от нуля (2.179). При этом коэффициенты неголономности равны структурным константам, взятым с обратным знаком. Все формулы, необходимые для вычислений, приведены в разделе 2.6.

Ясно, что правоинвариантный базис касательных пространств на всем многообразии  $\mathbb{M}$  состоит из вектором  $\{\partial_0 := \partial_t, R_i\}$ , а форм – из 1-форм  $\{dt, R^i\}$ . Пусть на  $\mathbb{M}$  задано произвольное тензорное поле, например,  $T = dx^\alpha T_\alpha^\beta \partial_\beta$ . Тогда его можно разложить по правоинвариантному базису:

$$T = dt T_0^0 \partial_0 + dt T_0^i R_i + R^i T_i^0 \partial_0 + R^i T_i^j R_j.$$

Под действием группы  $\mathbb{G}$  базисные векторные поля не меняются по построению. Поэтому для того, чтобы тензорное поле было правоинвариантным, необходимо и достаточно, чтобы его компоненты в правоинвариантном базисе зависели только от времени  $t = x^0$ . Формально условие правой инвариантности тензорного поля записывается в виде равенства нулю производной Ли

$$\mathcal{L}_{L_i} T = 0.$$

При преобразовании координат на  $\mathbb{G}$  меняются компоненты триад  $e^\mu_i$  и  $l^\mu_i$  по обычному тензорному закону (индекс  $\mu$ ), но не сами векторные поля  $R_i$  и  $L_i$ . При этом компоненты тензорного поля относительно правоинвариантного базиса ведут себя как скаляры и, следовательно, не зависят от  $x$ .

Например, наиболее общая правоинвариантная метрика на  $\mathbb{M}$  имеет вид

$$ds^2 = dt^2 + h_{ij} R^i R^j, \quad (2.185)$$

где  $h_{ij}(t)$  – произвольная невырожденная симметричная отрицательно определенная матрица, зависящая только от времени.

Приступим к вычислению геометрических характеристик многообразия  $\mathbb{M}$  с метрикой (2.185), использую формулы раздела 2.6. Несложные вычисления показывают, что только четыре компоненты линейной связности отличны от нуля

$$\begin{aligned} \omega_{0ij} &= \omega_{i0j} = \frac{1}{2} \dot{h}_{ij}, \\ \omega_{ij0} &= -\frac{1}{2} \dot{h}_{ij}, \\ \omega_{ijk} &= -\frac{1}{2} (f_{ijk} - f_{jki} + f_{kij}), \end{aligned} \quad (2.186)$$

где  $f_{ijk} := f_{ij}^l h_{kl}$ . Теперь можно вычислить компоненты тензора кривизны по формуле (2.174):

$$\begin{aligned} R_{0i0j} &= \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij} - \frac{1}{4} \dot{h}_{ik} \dot{h}_{jl} h^{kl}, \\ R_{0ijk} &= -\frac{1}{4} (f_{ik}^l - f_k^l i + f^l_{ik}) \dot{h}_{jl} + \frac{1}{4} (f_{ij}^l - f_j^l i + f^l_{ij}) \dot{h}_{kl}, \\ R_{ijkl} &= \frac{1}{4} (\dot{h}_{ik} \dot{h}_{jl} - \dot{h}_{il} \dot{h}_{jk}) + \hat{R}_{ijkl}, \end{aligned} \quad (2.187)$$

где тензор кривизны группы Ли имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ijkl} &= \frac{1}{2} f_{ij}^m f_{klm} + \frac{1}{4} [f_{ik}^m f_{jlm} - f_{jk}^m f_{ilm} + f_{ij}^m (f_{kml} - f_{lkm}) + f_{kl}^m (f_{imj} - f_{jmi}) + \\ &+ (f^m_{ik} + f^m_{ki}) (f_{mjl} + f_{mlj}) - (f^m_{jk} + f^m_{kj}) (f_{mil} + f_{mli})]. \end{aligned} \quad (2.188)$$

Следующий шаг состоит в вычислении компонент тензора Риччи:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}h^{ij} - \frac{1}{4}\dot{h}_{ik}\dot{h}_{jl}h^{ij}h^{kl}, \\ R_{0i} &= \frac{1}{2}f_k{}^{lk}\dot{h}_{il} - \frac{1}{2}f_i{}^{kl}\dot{h}_{kl}, \\ R_{ij} &= \frac{1}{2}\ddot{h}_{ij} - \frac{1}{2}\dot{h}_{ik}\dot{h}_{jl}h^{kl} + \frac{1}{4}\dot{h}_{ij}\dot{h}_{kl}h^{kl} + \hat{R}_{ij}, \end{aligned} \quad (2.189)$$

где

$$\hat{R}_{ij} = \frac{1}{2}f_i{}^{kl}(f_{jkl} + f_{jlk}) + \frac{1}{2}(f^k{}_{ij} + f^k{}_{ji})f_{kl}{}^l - \frac{1}{4}f^{kl}{}_i f_{klj}. \quad (2.190)$$

Скалярная кривизна принимает вид

$$R = \ddot{h}_{ij}h^{ij} - \frac{3}{4}\dot{h}_{ik}\dot{h}_{jl}h^{ij}h^{kl} + \frac{1}{4}(\dot{h}_{ij}h^{ij})^2 + \hat{R}, \quad (2.191)$$

где

$$\hat{R} = \frac{1}{4}f^{ijk}f_{ijk} - \frac{1}{2}f^{ijk}f_{kij} + f^{ik}{}_k f_{ik}{}^k. \quad (2.192)$$

Для интегрирования уравнений движения удобно ввести тензор внешней кривизны гиперповерхности  $t = \text{const}$ , который определен формулой (??). В рассматриваемом случае блоочно диагональной метрики (2.185) – это обычная производная по времени от трехмерной метрики:

$$K_{ij} := -\frac{1}{2}\dot{h}_{ij}, \quad K := K_{ij}h^{ij} = -\frac{1}{\sqrt{|h|}}\frac{d}{dt}\sqrt{|h|}. \quad (2.193)$$

Учитывая формулу

$$\dot{K} = \frac{d}{dt}(K_{ij}h^{ij}) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{h}_{ij}h^{ij}) = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}h^{ij} - \frac{1}{2}\dot{h}_{ij}\dot{h}^{ij} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{ij}h^{ij} + 2K_{ij}K^{ij},$$

выражение для нулевой компоненты тензора Риччи (2.189) принимает вид

$$R_{00} = -\dot{K} + K_{ij}K^{ij}. \quad (2.194)$$

Смешанные компоненты тензора Риччи также выражаются через внешнюю кривизну

$$R_{0i} = -f_k{}^{lk}K_{il} + f_i{}^{kl}K_{kl}. \quad (2.195)$$

Чтобы упростить выражение для пространственных компонент тензора Риччи, заметим, что справедливы формулы:

$$\begin{aligned} \dot{K}_{ik}h^{kj} &= \frac{d}{dt}(K_{ik}h^{kj}) - K_{ik}\dot{h}^{kj} = \dot{K}_i{}^j - 2K_{ik}K^{jk}, \\ \frac{1}{\sqrt{|h|}}\frac{d}{dt}(\sqrt{|h|}K_i{}^j) &= \dot{K}_i{}^j + \frac{K_i{}^j}{\sqrt{|h|}}\frac{d}{dt}\sqrt{|h|} = \dot{K}_i{}^j - K_i{}^jK, \end{aligned} \quad (2.196)$$

где  $h := \det h_{ij}$ . Тогда пространственные компоненты тензора Риччи с одним ковариантным и одним контравариантным индексом примут вид

$$R_i{}^j = -\frac{1}{\sqrt{|h|}}\frac{d}{dt}(\sqrt{|h|}K_i{}^j) + \hat{R}_i{}^j. \quad (2.197)$$

Теперь потребуем инвариантности тензора энергии-импульса материи относительно группы  $\mathbb{G}$ . Вектор скорости будет инвариантен тогда и только тогда, когда его компоненты относительно правоинвариантного базиса будут зависеть только от времени:

$$u = u^\alpha \partial_\alpha = u^0(t) \partial_0 + u^i(t) R_i.$$

Из условия

$$u^2 = (u^0)^2 + u^i u^j h_{ij} = 1$$

находим временную компоненту скорости

$$u^0 = \sqrt{1 - u^i u^j h_{ij}},$$

где мы выбрали положительный корень, т.к. материя движется вперед по времени. Таким образом, инвариантный тензор энергии-импульса в правоинвариантном базисе имеет вид

$$T^{ab} = (\mathcal{E} + \mathcal{P}) u^a u^b - \mathcal{P} g^{ab}, \quad (2.198)$$

где  $\{a\} = \{0, i\}$ ,  $a = 0, 1, 2, 3$  и

$$\{u^a\} = \{\sqrt{1 - u^k u_k}, u^i\},$$

и метрика имеет вид блочно диагональный вид (2.185). В правоинвариантном базисе тензор энергии импульса зависит только от времени  $t$ .

Запишем уравнения Эйнштейна в правоинвариантном базисе с одним контра- и одним ковариантным индексом

$$\Phi_a^b := R_a^b - \delta_a^b \Lambda + \frac{1}{2} \left[ (\mathcal{E} + \mathcal{P}) u_a u^b - \frac{1}{2} (\mathcal{E} - \mathcal{P}) \delta_a^b \right] = 0. \quad (2.199)$$

С учетом явного вида компонент тензора Риччи (2.194), (2.195) и (2.197) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\dot{K} + K_{ij} K^{ij} &= \Lambda - \frac{1}{2} \left[ (\mathcal{E} + \mathcal{P})(1 - u^i u_i) - \frac{1}{2} (\mathcal{E} - \mathcal{P}) \right], \\ -f_k^{lk} K_{il} + f_i^{kl} K_{kl} &= -\frac{1}{2} (\mathcal{E} + \mathcal{P}) u^0 u_i, \\ -\frac{1}{\sqrt{|h|}} \frac{d}{dt} (\sqrt{|h|} K_i^j) + \hat{R}_i^j &= \delta_i^j \Lambda - \frac{1}{2} \left[ (\mathcal{E} + \mathcal{P}) u_i u^j - \frac{1}{2} \delta_i^j (\mathcal{E} - \mathcal{P}) \right]. \end{aligned} \quad (2.200)$$

Таким образом, мы свели уравнения Эйнштейна для однородной вселенной к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Систему уравнений (2.200) необходимо дополнить уравнениями релятивистской гидродинамики  $\nabla_\beta T_\alpha^\beta = 0$ , которые являются условиями интегрируемости уравнений Эйнштейна. Поскольку ковариантная производная от репера равна нулю (2.168), то в неголономном базисе уравнения релятивистской гидродинамики примут вид

$$\nabla_b T_a^b = e^\beta_b \partial_\beta T_a^b - \omega_{ba}^c T_c^b + \omega_{bc}^b T_a^c = 0. \quad (2.201)$$

Компоненты линейной связности для однородной вселенной в правоинвариантном базисе уже были посчитаны (2.186). След компонент линейной связности  $\omega_a := \omega_{ba}^b$  имеет вид

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \dot{h}_{ij} h^{ij}, \quad \omega_i = -f_{ji}^j. \quad (2.202)$$

Положим в уравнениях (3.84) сначала  $a = 0$ , а затем  $a = i$ . Тогда после простых вычислений получим уравнения релятивистской гидродинамики:

$$\begin{aligned} \partial_0 [(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_0u^0 - \mathcal{P}] + \frac{1}{2}(\mathcal{E} + \mathcal{P})\dot{h}_{ij}(h^{ij}u_0u^0 - u^iu^j) - (\mathcal{E} + \mathcal{P})f_{kj}^k u_0u^j = 0, \\ \partial_0 [(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_iu^0] + \frac{1}{2}(\mathcal{E} + \mathcal{P})\dot{h}_{jk}h^{jk}u_iu^0 - (\mathcal{E} + \mathcal{P})f_{ijk}u^ju^k - (\mathcal{E} + \mathcal{P})f_{kj}^k u_iu^j = 0. \end{aligned} \quad (2.203)$$

Для трехмерного случая структурные константы  $f_{ij}^k$  можно записать в каноническом виде (2.145), который использовался при классификации Бианки трехмерных алгебр Ли. В каноническом виде след структурных констант имеет вид

$$f_{kj}^k = 2a_j.$$

Кроме этого, справедлива формула

$$f_{ijk}u^ju^k = \varepsilon_{ijl}b^{lk}u_ku^j + a_ju^ju_i - a_iu^ju_j.$$

Теперь уравнения релятивистской гидродинамики примут вид

$$\begin{aligned} \partial_0 [(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_0u^0 - \mathcal{P}] + \frac{1}{2}(\mathcal{E} + \mathcal{P})\dot{h}_{ij}(h^{ij}u_0u^0 - u^iu^j) - 2(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_0a_ju^j = 0, \\ \partial_0 [(\mathcal{E} + \mathcal{P})u_iu^0] + \frac{1}{2}(\mathcal{E} + \mathcal{P})\dot{h}_{jk}h^{jk}u_iu^0 - (\mathcal{E} + \mathcal{P})(\varepsilon_{ijl}b^{lk}u_ku^j + 3a_ju^ju_i - a_iu^ju_j) = 0. \end{aligned} \quad (2.204)$$

Конечно, для замыкания системы уравнений необходимо ее дополнить уравнением состояния  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{E})$ .

Таким образом, мы получили 15 уравнений (2.200), (2.204) (плюс уравнение состояния) на 11 неизвестных функций  $h_{ij}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{P}$  и  $u^i$ . Поскольку уравнения Эйнштейна зависимы,  $\partial_b\Phi_a^b = 0$ , то независимых уравнений движения также одиннадцать.

Система уравнений (2.200) интегрируется в явном виде далеко не всегда. Простейший случай, когда общее решение можно записать явно, рассмотрен в следующем разделе. п

## 2.6.2 Вселенная Казнера

Простейшая и интересная модель однородной, но не изотропной вселенной называется моделью Казнера [?]. Она относится к типу I по классификации Бианки и представляет собой вакуумное решение уравнений Эйнштейна без космологической постоянной.

Однородное пространство типа I – это абелева группа Ли трансляций трехмерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ , которая как многообразие совпадает с  $\mathbb{R}^3$ . Пусть  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$  – декартовы координаты в евклидовом пространстве. Поскольку группа абелева, то правоинвариантные векторные поля совпадают с левоинвариантными векторными полями и координатным базисом:  $R_\mu = L_\mu = \partial_\mu$ . Поэтому наиболее общая инвариантная метрика (2.178) принимает вид

$$ds^2 = dt^2 + g_{\mu\nu}(t)dx^\mu dx^\nu, \quad (2.205)$$

где  $g_{\mu\nu}(t)$  – произвольная симметричная невырожденная отрицательно определенная матрица, зависящая только от времени. Прямая подстановка этой метрики в

вакуумные уравнения Эйнштейна приводят к трудоемким вычислениям. Поэтому мы поступим иначе, тем более, что формулы, полученные ниже, еще пригодятся.

Для дальнейших целей рассмотрим более общий случай, когда метрика на пространственных сечениях зависит не только от времени, но и от пространственных координат,  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(t, x)$ . В разделе ?? были получены выражения для тензора кривизны в АДМ параметризации метрики через тензор внешней кривизны  $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$  вложенной гиперповерхности  $\mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{M}$ . Поскольку в рассматриваемом случае метрика блоочно диагональна, то функции хода и сдвига имеют вид

$$N = 1, \quad N_\mu = 0,$$

что существенно упрощает формулы. Тогда тензор внешней кривизны (??) пропорционален производной по времени  $t$  от метрики, которую обозначим точкой:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\dot{g}_{\mu\nu}. \quad (2.206)$$

Из формул (??) следуют выражения для линейно независимых компонент тензора кривизны:

$$\begin{aligned} R_{0\mu 0\nu} &= -\dot{K}_{\mu\nu} - K_\mu^\rho K_{\nu\rho}, \\ R_{\mu\nu\rho 0} &= \hat{\nabla}_\mu K_{\nu\rho} - \hat{\nabla}_\nu K_{\mu\rho}, \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + K_{\mu\rho} K_{\nu\sigma} - K_{\mu\sigma} K_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (2.207)$$

где  $\hat{\nabla}_\mu$  и  $\hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$  – трехмерные ковариантная производная и тензор кривизны, построенные по метрике  $g_{\mu\nu}$ . Соответствующий тензор Риччи (??) имеет следующие линейно независимые компоненты:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\hat{g}^{\mu\nu} \dot{K}_{\mu\nu} - K^{\mu\nu} K_{\mu\nu}, \\ R_{0\mu} &= \hat{\nabla}_\nu K^\nu_\mu - \partial_\mu K, \\ R_{\mu\nu} &= \hat{R}_{\mu\nu} - \dot{K}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} K - 2K_\mu^\rho K_{\nu\rho}, \end{aligned} \quad (2.208)$$

где  $\hat{g}^{\mu\nu}$  – матрица, обратная к  $g_{\mu\nu}$ , с помощью которой мы поднимаем пространственные индексы, и

$$K := K^\mu_\mu = -\frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}\dot{g}_{\mu\nu} = -\frac{\dot{\hat{e}}}{\hat{e}} = -\frac{d}{dt} \ln \hat{e}. \quad (2.209)$$

– след тензора внешней кривизны. Выше  $\hat{e} := \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$  – форма пространственного объема, и была использована формула (??).

Для скалярной кривизны (??) получаем выражение

$$R = \hat{R} - 2\hat{g}^{\mu\nu} \dot{K}_{\mu\nu} - 3K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} + K^2. \quad (2.210)$$

Поскольку

$$\hat{g}^{\mu\nu} \dot{K}_{\mu\nu} = \frac{d}{dt}(\hat{g}^{\mu\nu} K_{\mu\nu}) - \frac{d\hat{g}^{\mu\nu}}{dt} K_{\mu\nu} = \dot{K} - 2K^{\mu\nu} K_{\mu\nu},$$

то выражения для  $R_{00}$  и  $R$  можно упростить:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\dot{K} + K^{\mu\nu} K_{\mu\nu}, \\ R &= \hat{R} - 2\dot{K} + K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} + K^2. \end{aligned} \quad (2.211)$$

Заметим также, что справедлива формула

$$\frac{1}{\hat{e}} \frac{d}{dt} (\hat{e} K_\mu^\nu) = \dot{K}_\mu^\nu + \frac{\dot{\hat{e}}}{\hat{e}} K_\mu^\nu = \dot{K}_\mu^\nu - K K_\mu^\nu.$$

Поэтому выражение для пространственной компоненты тензора Риччи с одним верхним и одним нижним индексом также упрощается:

$$R_\mu^\nu = \hat{R}_\mu^\nu - \frac{1}{\hat{e}} \frac{d}{dt} (\hat{e} K_\mu^\nu) \quad (2.212)$$

Для анализа особенностей полезно знать выражение для квадрата тензора кривизны, который является геометрическим инвариантом. Несложные вычисления дают следующий ответ

$$\begin{aligned} R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} = & 4 \dot{K}_{\mu\nu} \dot{K}_{\rho\sigma} \hat{g}^{\mu\rho} \hat{g}^{\nu\sigma} + 8 \dot{K}_{\mu\nu} K^{\mu\rho} K^\nu_\rho + 2 K_\mu^\nu K_\nu^\rho K_\rho^\sigma K_\sigma^\mu + 2 (K_\mu^\nu K_\nu^\mu)^2 + \\ & + 8 \hat{\nabla}_\mu K_{\nu\rho} \hat{\nabla}^\mu K^{\nu\rho} - 8 \hat{\nabla}_\mu K_{\nu\rho} \hat{\nabla}^\nu K^{\mu\rho} + \hat{R}^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} + 4 \hat{R}_{\mu\nu\rho\sigma} K^{\mu\rho} K^{\nu\sigma}. \end{aligned} \quad (2.213)$$

Теперь вернемся к решению вакуумных уравнений Эйнштейна для вселенной Казнера. Поскольку пространственная часть метрики (2.205) не зависит от  $x$ , то  $R_{\mu 0} = 0$ . Поэтому необходимо решить только два уравнения  $R_{00} = 0$  и  $R_\mu^\nu = 0$ . Из выражений (2.211) и (2.212) следует, что полная система уравнений движения для вселенной Казнера имеет вид

$$-\dot{K} + K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = 0, \quad (2.214)$$

$$\frac{d}{dt} (\hat{e} K_\mu^\nu) = 0. \quad (2.215)$$

Конечно, эта система уравнений является частным случаем системы уравнений Эйнштейна (2.200) при отсутствии полей материи,  $\Lambda = 0$  и  $f_{ij}^k = 0$ .

Второе уравнение имеет общее решение

$$\hat{e} K_\mu^\nu = -\lambda_\mu^\nu = \text{const},$$

где  $\lambda_\mu^\nu$  – некоторая постоянная матрица. Свертка полученного решения по индексам  $\mu$  и  $\nu$  приводит к равенствам

$$K = -\frac{\lambda}{\hat{e}} = -\frac{\dot{\hat{e}}}{\hat{e}}, \quad \lambda := \lambda_\mu^\mu,$$

где учтено выражение для скалярной внешней кривизны (2.209). Отсюда вытекает, что элемент объема является линейной функцией времени

$$\hat{e} = \lambda t, \quad (2.216)$$

где мы положили несущественную постоянную интегрирования равной нулю. Растяжкой координат всегда можно обратить след матрицы  $\lambda$  в единицу. Поэтому, не ограничивая общности, положим  $\hat{e} = t$ . Тогда  $\lambda = 1$  и  $K = -1/t$ . В этом случае

$$K_\mu^\nu = -\frac{1}{t} \lambda_\mu^\nu, \quad (2.217)$$

где  $\lambda_\mu^\nu$  – постоянная матрица с единичным следом. Подстановка этой формулы в уравнение  $R_{00} = 0$  приводит к еще одному условию на неизвестную матрицу

$$\lambda_\mu^\nu \lambda_\nu^\mu = 1. \quad (2.218)$$

Возвращаясь к определению внешней кривизны (2.206), получаем обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение на метрику

$$\dot{g}_{\mu\nu} = \frac{2}{t} \lambda_\mu^\rho g_{\rho\nu}. \quad (2.219)$$

Это уравнение определяет метрику с точностью до умножения на произвольную отличную от нуля постоянную. Несущественная постоянная интегрирования соответствует сдвигу времени, и будет положена равной нулю.

Обозначим через  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  собственные значения матрицы  $\lambda_\mu^\nu$ . Будем считать, что они вещественны и различны. Пусть  $n_\mu^{(1)}$ ,  $n_\mu^{(2)}$  и  $n_\mu^{(3)}$  соответствующие собственные ковекторы:

$$\lambda_\mu^\rho n_\rho^{(i)} = p_i n_\mu^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда решение уравнения (2.219) можно представить в виде

$$g_{\mu\nu} = -t^{2p_1} n_\mu^{(1)} n_\nu^{(1)} - t^{2p_2} n_\mu^{(2)} n_\nu^{(2)} - t^{2p_3} n_\mu^{(3)} n_\nu^{(3)}. \quad (2.220)$$

Здесь мы выбрали отрицательно определенную метрику в соответствии с нашим соглашением. Теперь выберем векторы  $n^{(i)}$  в качестве направляющих векторов новых координатных осей, которые обозначим  $x, y, z$ , и нормируем их на единицу. В результате получим *метрику Казнера*

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx^2 - t^{2p_2} dy^2 - t^{2p_3} dz^2, \quad (2.221)$$

где  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  – произвольные различные числа, удовлетворяющие двум условиям:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (2.222)$$

Первое равенство вытекает из требования  $\lambda = 1$ , а второе – из условия (2.218).

Чтобы представить себе область допустимых значений параметров  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ , заметим, что первое условие (2.222) определяет плоскость, а второе – сферу в евклидовом пространстве  $(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$ . Поэтому область допустимых значений параметров представляет собой пересечение плоскости со сферой. По предположению, собственные числа должны быть различны. Расположим их в порядке возрастания  $p_1 < p_2 < p_3$ . Чтобы найти интервалы возможных значений собственных чисел, рассмотрим случай совпадения двух собственных чисел. Это возможно только для двух троек чисел  $(-1/3, 2/3, 2/3)$  и  $(0, 0, 1)$ . Отсюда следует, что одно из собственных чисел должно быть отрицательно, а два других – положительны, причем их значения лежат в интервалах

$$-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0, \quad 0 \leq p_2 \leq \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leq p_3 \leq 1. \quad (2.223)$$

Таким образом, метрика Казнера (2.221) описывает однородное, но не изотропное пространство-время. Форма пространственного объема  $\hat{e} = t$  линейно растет с течением времени. Это значит, что в целом вселенная расширяется. При этом линейные расстояния вдоль оси  $x$  уменьшаются, а вдоль осей  $y$  и  $z$  – увеличиваются.

Рассмотрим некоторые свойства тензора кривизны для метрики Казнера. Для вычислений нам понадобится явный вид тензора внешней кривизны

$$K_\mu^\nu = -\frac{1}{t} \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}, \quad K_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} p_1 t^{2p_1-1} & 0 & 0 \\ 0 & p_2 t^{2p_2-1} & 0 \\ 0 & 0 & p_3 t^{2p_3-1} \end{pmatrix}. \quad (2.224)$$

Простые вычисления показывают, что скалярная кривизна (2.210) для метрики Казнера равна нулю,  $R = 0$ . Это естественно, т.к. для метрики Казнера тензор Риччи равен нулю,  $R_{\alpha\beta} = 0$  (вакуумные уравнения движения). Однако это не значит, что вселенная Казнера является плоской. Действительно, квадрат тензора кривизны (2.213), который является геометрическим инвариантом, принимает вид

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 4\dot{K}_{\mu\nu}\dot{K}_{\rho\sigma}\hat{g}^{\mu\rho}\hat{g}^{\nu\sigma} + 8\dot{K}_{\mu\nu}K^{\mu\rho}K^{\nu}_{\rho} + 2K^{\nu}_{\mu}K^{\rho}_{\nu}K^{\sigma}_{\rho}K^{\mu}_{\sigma} + 2(K^{\nu}_{\mu}K^{\mu}_{\nu})^2.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае тензор кривизны совпадает с тензором Вейля. Подстановка в это выражение тензора внешней кривизны (2.224) приводит к следующему результату

$$R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{4}{t^4}(2 - 2p_1^3 - 2p_2^3 - 2p_3^3 - p_1^2p_2^2 - p_2^2p_3^2 - p_1^2p_3^2). \quad (2.225)$$

В общем случае правая часть обращается в бесконечность при  $t = 0$ . То есть решение Казнера содержит неустранимую особенность, где тензор кривизны расходится. Заметим, что при  $t = 0$  метрика Казнера (2.221) также имеет особенность, т.к.

$$g_{11} \rightarrow \infty, \quad g_{22} \rightarrow 0, \quad g_{33} \rightarrow 0, \quad \det g \rightarrow 0.$$

Эта особенность соответствует большому взрыву.

Посмотрим, существуют ли среди метрик Казнера плоские. В плоском случае полный тензор кривизны должен обратиться в нуль,  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ . Для этого необходимо, чтобы  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ . Из вида пространственных компонент тензора кривизны (2.207) вытекает необходимое условие того, чтобы метрика Казнера была плоской:

$$K_{11}K_{22} = 0, \quad K_{11}K_{33} = 0, \quad K_{22}K_{33} = 0.$$

Если собственные числа упорядочены, то эта система уравнений имеет единственное решение  $p_1 = p_2 = 0$  и  $p_3 = 1$ . В этом пределе метрика Казнера принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - t^2dz^2.$$

После замены координат

$$\tau := t \operatorname{ch} z, \quad \zeta := t \operatorname{sh} z,$$

метрика Казнера переходит в метрику Лоренца.

Случаи совпадающих собственных значений матрицы  $\lambda_{\mu}^{\nu}$  рассмотрены в [?], §117.

# Глава 3

## Геометрическая теория дефектов

Многие твердые тела обладают кристаллической структурой. Однако в природе идеальных кристаллов нет, и большинство их физических свойств, таких как пластичность, плавление, рост и др., определяется дефектами кристаллической структуры. Поэтому изучение дефектов является актуальной научной проблемой, важной, в первую очередь, для приложений. Интенсивные экспериментальные и теоретические исследования дефектов в кристаллах начались в 30-е годы прошлого века и продолжаются по сей день. Несмотря на десятки монографий и тысячи статей, фундаментальная теория дефектов в настоящее время отсутствует.

Один из перспективных подходов к созданию теории дефектов основан на геометрии Римана–Картана, которая задается нетривиальной метрикой и кручением. В этом подходе кристалл рассматривается, как непрерывная упругая среда со спиновой структурой. Если векторное поле смещений является гладкой функцией, то в кристалле присутствуют только упругие напряжения, которые соответствуют диффеоморфизмам плоского евклидова пространства. Если поле смещений имеет разрывы, то мы говорим, что в среде есть дефекты упругой структуры. Дефекты упругой структуры называются дислокациями и приводят к возникновению нетривиальной геометрии. А именно, они соответствуют отличному от нуля тензору кручения, который равен поверхностной плотности вектора Бюргерса.

Идея связать кручение с дислокациями возникла в пятидесятые годы [?, ?, ?, ?]. Интересно отметить, что Э. Картан ввел понятие кручения в геометрию [?], проводя аналогию с механикой упругой среды.

Параллельно с изучением дислокаций шло интенсивное изучение другого типа дефектов. Дело в том, что многие тела обладают не только упругими свойствами, но и спиновой структурой. Например, ферромагнетики, жидкие кристаллы, спиновые стекла и др. В этом случае существуют дефекты в спиновой структуре, которые называются дисклинациями [?]. Они возникают тогда, когда поле директора имеет разрывы. Наличие дисклинаций также связано с нетривиальной геометрией. А именно, тензор кривизны равен поверхностной плотности вектора Франка.

Геометрическая теория статического распределения дефектов, которая с единой точки зрения описывает оба типа дефектов – дислокации и дисклинации, была предложена в [?]. В отличие от других подходов единственными независимыми переменными в данном подходе являются репер и  $\text{SO}(3)$  связность. Тензоры кручения и кривизны имеют прямой физический смысл поверхностной плотности, соответственно, линейных дислокаций и дисклинаций. Для репера и  $\text{SO}(3)$  связности постулируются ковариантные уравнения равновесия, такие же, как и в модели гравитации с кручением. Поскольку любое решение уравнений равновесия определено с точностью до

общих преобразований координат и локальных  $\mathbb{SO}(3)$  вращений, то для однозначного определения решения необходимо задать систему координат (записать калибровку). Для этой цели была предложена упругая калибровка для репера [?] и лоренцева калибровка для  $\mathbb{SO}(3)$  связности [?].

Подчеркнем, что в данном подходе понятие векторного поля смещений и поля угла поворота полностью отсутствует. Эти понятия могут быть введены только в тех областях среды, в которых дефекты отсутствуют. В этом случае уравнения равновесия для репера и  $\mathbb{SO}(3)$  связности тождественно удовлетворяются, упругая калибровка сводится к уравнениям нелинейной теории упругости для вектора смещений, а лоренцева калибровка – к уравнениям главного кирального  $\mathbb{SO}(3)$ -поля. Другими словами, для фиксирования калибровки выбираются две фундаментальные модели: теория упругости и модель главного кирального  $\mathbb{SO}(3)$  поля.

Важно отметить, что геометрическая теория дефектов описывает как отдельные дефекты, так и их непрерывное распределение. Отдельные дислокации можно описать в рамках классической теории упругости путем наложения сложных граничных условий. Однако при непрерывном распределении дислокаций векторное поле смещений не существует, т.к. оно имеет разрывы в каждой точке. Следовательно, описание непрерывного распределения дислокаций в рамках классической теории упругости невозможно. Это же относится и к описанию непрерывного распределения дискиназий. В геометрической теории дефектов динамическими переменными являются репер и  $\mathbb{SO}(3)$  связность. Эти переменные существуют и являются достаточно гладкими функциями и для непрерывного распределения дефектов.

### 3.1 Упругие деформации

Рассмотрим трехмерную бесконечную упругую среду. Мы предполагаем, что в отсутствие дефектов недеформированная среда инвариантна относительно трансляций и вращений в некоторой системе координат. Тогда в этой системе координат  $y^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , среда описывается евклидовой метрикой  $\delta_{ij} = \text{diag}(+, +, +)$ , а система координат является декартовой. Таким образом, в недеформированном состоянии мы имеем евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  с заданной декартовой системой координат. Мы также предполагаем, что кручение в среде равно нулю.

Для того, чтобы определить векторное поле смещений, евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ , помимо структуры многообразия, должно быть снабжено структурой векторного пространства.

**Определение.** Пусть некоторая точка среды имеет в основном состоянии координаты  $y^i$ . После деформации данная точка в исходной системе будет иметь координаты

$$y^i \mapsto x^i(y) := y^i + u^i(x), \quad (3.1)$$

где  $u^i(x)$  – векторное поле смещений, рис. 3.1. □

В теории упругости приняты обратные обозначения. Обычно пишут  $x^i \mapsto y^i = x^i + u^i(x)$ . Это – эквивалентные записи, поскольку обе системы координат  $x^i$  и  $y^i$  покрывают все  $\mathbb{R}^3$ . Однако в теории дефектов, которая рассматривается в следующих разделах, ситуация другая. В общем случае, только в конечном состоянии (после создания дислокаций) упругая среда заполняет все евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ . При наличии дислокаций координаты  $y^i$ , как правило, не покрывают все  $\mathbb{R}^3$ , т.к. часть

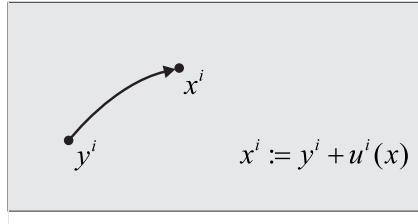


Рис. 3.1: Упругие деформации.

среды может быть удалена или, наоборот, добавлена. Поэтому предпочтительнее является система координат, связанная с точками среды после упругой деформации и образования дефектов.

Здесь и в дальнейшем все поля предполагаются достаточно гладко зависящими от координат  $x$ , которые являются координатами точек среды после деформации и, по предположению, покрывают все евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ .

В линейной теории упругости относительные деформации предполагаются малыми,  $\partial_j u^i \ll 1$ , и функции  $u^i(x)$  – компоненты векторного поля смещений – являются основными переменными теории упругости.

В отсутствие дефектов мы полагаем, что поле смещений является достаточно гладким векторным полем в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Наличие у поля смещений разрывов и (или) особенностей интерпретируется, как наличие дефектов в упругой среде.

В дальнейшем мы будем рассматривать только статические деформации, когда поле смещений  $u^i$  не зависит от времени. Тогда основные уравнения равновесия упругой среды для малых деформаций имеют вид (см., например, [?])

$$\partial_j \sigma^{ji} + f^i = 0, \quad (3.2)$$

$$\sigma^{ij} = \lambda \delta^{ij} \epsilon_k^k + 2\mu \epsilon^{ij}, \quad (3.3)$$

где  $\sigma^{ji}$  – тензор напряжений ( $i$ -я компонента упругой силы, действующей на единичную площадку с нормалью  $n^j$ ), который предполагается симметричным. Тензор малых деформаций  $\epsilon_{ij}$  задается симметризованной частной производной от вектора смещений

$$\epsilon_{ij} := \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i). \quad (3.4)$$

Опускание и подъем латинских индексов проводится с помощью евклидовой метрики  $\delta_{ij}$  и ее обратной  $\delta^{ij}$ . Буквы  $\lambda$  и  $\mu$  обозначают постоянные, характеризующие упругие свойства среды, и называются *коэффициентами Ламе*. Функции  $f^i(x)$  описывают суммарную плотность неупругих сил внутри среды. В дальнейшем мы предполагаем, что такие силы отсутствуют:  $f^i(x) = 0$ . Уравнение (3.2) есть второй закон Ньютона, а равенство (3.3) представляет собой *закон Гука*, связывающий напряжения и деформации.

В декартовой системе координат при малых деформациях различие между верхними и нижними индексами пропадает, поскольку подъем и опускание индексов проводится с помощью евклидовой метрики. По этой причине в теории упругости об этом различии часто забывают, что вполне оправдано. Однако при наличии дефектов понятие декартовой системы координат и евклидовой метрики отсутствует, а подъем и опускание индексов производится с помощью римановой метрики. Поэтому мы делаем различие между верхними и нижними индексами, как это принято в

дифференциальной геометрии, имея в виду последующий переход к упругим средам с дефектами.

После подстановки закона Гука (3.3) в закон Ньютона (3.2) при  $f^i = 0$  возникает уравнение второго порядка на вектор смещения:

$$(1 - 2\sigma)\Delta u_i + \partial_i \partial_j u^j = 0, \quad (3.5)$$

где

$$\sigma := \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

– безразмерный коэффициент Пуассона (из физических соображений [?] на него есть ограничения  $-1 \leq \sigma \leq 1/2$ ) и  $\Delta := \delta^{ij} \partial_i \partial_j$  – оператор Лапласа.

В линейной теории упругости основной задачей является решение уравнений второго порядка для вектора смещений (3.5) при некоторых граничных условиях. Множество известных решений находится в прекрасном согласии с экспериментом. Поэтому можно сказать, что уравнения (3.3) и (3.2) имеют хорошую экспериментальную основу.

Посмотрим на упругие деформации с точки зрения дифференциальной геометрии. С математической точки зрения отображение (3.1) представляет собой диффеоморфизм евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$ . При этом евклидова метрика  $\delta_{ij}$  индуцирована возвратом отображения  $y^i \mapsto x^i$ . Это значит, что в деформированном состоянии метрика в линейном приближении,  $\partial_i u^j \ll 1$ , имеет вид

$$g_{ij}(x) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \delta_{kl} \approx \delta_{ij} - \partial_i u_j - \partial_j u_i = \delta_{ij} - 2\epsilon_{ij}, \quad (3.6)$$

т.е. определяется тензором малых деформаций (3.4). Заметим, что в линейном приближении выполнены равенства  $\epsilon_{ij}(x) = \epsilon_{ij}(y)$  и  $\partial u_j / \partial x^i = \partial u_j / \partial y^i$ .

Элемент объема среды определяется определителем метрики и имеет вид  $\sqrt{\det g_{ij}}$ . Поэтому в общем случае упругие деформации сопровождаются сжатием или растяжением среды. В линейном приближении изменение объема определяется тензором деформаций:

$$1 = \sqrt{\det \delta_{ij}} \mapsto \sqrt{\det g_{ij}} \approx \sqrt{1 - 2\epsilon_{ij}} \approx 1 - \epsilon, \quad (3.7)$$

где

$$\epsilon := \epsilon_i^i \quad (3.8)$$

– *дилатация*. Мы видим, что если  $\epsilon > 0$ , то среда при упругой деформации сжимается. Если  $\epsilon < 0$ , то происходит растяжение. Объемы сохраняются, если дилатация равна нулю,  $\epsilon = 0$ .

В римановой геометрии метрика однозначно определяет связность Леви-Чевиты  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k(x)$  (символы Кристоффеля) (??). По этим символам можно вычислить тензор кривизны (??). Этот тензор тождественно равен нулю,  $\tilde{R}_{ijk}^l(x) = 0$ , т.к. кривизна евклидова пространства равна нулю, а отображение  $y^i \mapsto x^i$  – диффеоморфизм. По этой же причине равен нулю и тензор кручения. Таким образом, упругая деформация среды соответствует тривиальной геометрии Римана–Картана, т.к. тензоры кривизны и кручения равны нулю.

Физическая интерпретация метрики (3.6) следующая. Внешний наблюдатель фиксирует декартову систему координат, соответствующую основному недеформированному состоянию среды. Затем происходит деформация среды, и наблюдатель обнаруживает, что в этой системе координат метрика становится нетривиальной. Если

предположить, что упругие возмущения в среде (фононы) распространяются вдоль экстремалей (линий наименьшей длины), то в деформированном состоянии их траектории будут определяться уравнениями (??). Поскольку символы Кристоффеля нетривиальны,  $\tilde{\Gamma}_{jk}^i \neq 0$ , то траекториями фононов уже не будут прямые линии. В этом смысле метрика (3.6) наблюдаема. Здесь проявляется существенная роль декартовой системы координат  $y^i$ , определяемой недеформированным состоянием, и с которой связан процесс измерения.

Предположим, что некоторому напряженному состоянию упругой среды без дефектов соответствует метрика  $g_{ij}(x)$ , заданная в декартовой системе координат. В этом случае вектор смещения определяется системой дифференциальных уравнений в частных производных (3.6). Условием интегрируемости данной системы уравнений при заданной левой части является равенство нулю тензора кривизны. Это является следствием теоремы ???. В линейном приближении данные условия известны в теории упругости, как *условия интегрируемости Сен–Венана*.

Наряду с линейной рассматривается нелинейная теория упругости. Нелинейность в теории упругости, как правило, вводится двумя способами. Во-первых, можно изменить определение тензора деформаций. Положим

$$\epsilon_{ij} := \frac{1}{2}(\delta_{ij} - g_{ij}). \quad (3.9)$$

Тогда тензор деформаций задается бесконечным рядом по вектору смещений. Во-вторых, линейный закон Гука (3.3) можно заменить на нелинейное соотношение. Здесь вариантов очень много.

Сделаем замечание, важное для дальнейшего рассмотрения. При надлежащих граничных условиях решение уравнений теории упругости (3.2), (3.3) единственное. С геометрической точки зрения это означает, что теория упругости фиксирует диффеоморфизмы, поскольку векторное поле смещений параметризует диффеоморфизмы. Этот факт будет использован в геометрической теории дефектов. Уравнения нелинейной теории упругости в смысле (3.9), переписанные для метрики или репера, будут использованы для фиксирования системы координат.

## 3.2 Дислокации

Начнем с описания линейных дислокаций в упругой среде (см., например, [?, ?]). Простейшие и наиболее распространенные примеры прямолинейных дислокаций изображены на рис. 3.2. Они образованы следующим образом. Разрежем среду по полуплоскости  $x^2 = 0, x^1 > 0$ . Сдвинем верхнюю часть среды, расположенную над разрезом  $x^2 > 0, x^1 > 0$ , на вектор  $\mathbf{b}$  по направлению к оси дислокации  $x^3$  и склеим берега разреза. Вектор  $\mathbf{b}$  называется *вектором Бюргерса*. В общем случае вектор Бюргерса может быть не постоянен на разрезе. Для краевой дислокации он меняется от нуля до постоянного значения  $\mathbf{b}$  по мере удаления от оси дислокации. После склейки среда придет в некоторое равновесное состояние, которое называется *краевой дислокацией*, изображенной на рис. 3.2a.

Та же краевая дислокация возникнет, если сдвинуть нижний берег разреза в противоположном направлении от линии дислокации и затем произвести склейку.

Одну и ту же дислокацию можно получить разными способами. Например, если в рассмотренном примере краевой дислокации вектор Бюргерса перпендикулярен плоскости разреза и направлен от него, то перед склейкой образовавшаяся полость

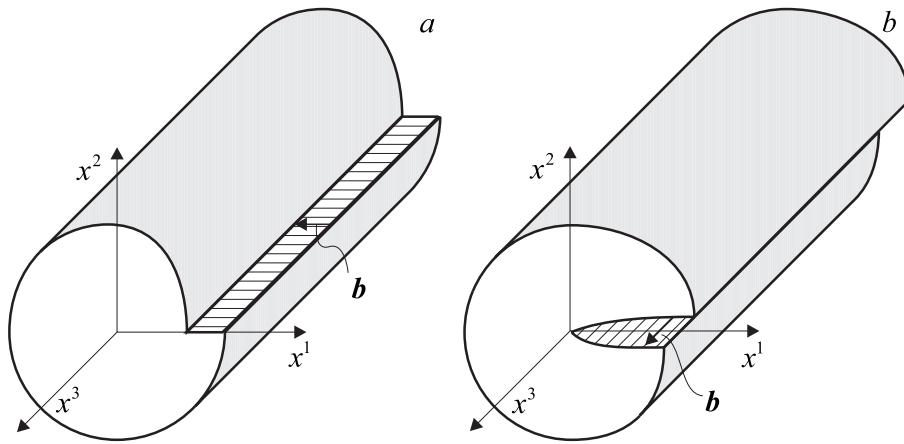


Рис. 3.2: Прямолинейные дислокации. (a) Краевая дислокация. Вектор Бюргерса  $\mathbf{b}$  перпендикулярен оси дислокации. (b) Винтовая дислокация. Вектор Бюргерса  $\mathbf{b}$  параллелен оси дислокации.

необходимо заполнить веществом. В результате, как нетрудно представить, также возникает краевая дислокация, только повернутая вокруг оси  $x^3$  на угол  $\pi/2$ . Этот пример показывает, что характеристикой дислокации является не поверхность разреза, а линия дислокации (край разреза) и вектор Бюргерса.

Если произвести тот же разрез среды по полуплоскости, сдвинуть нижнюю часть среды вдоль оси  $x^3$  и произвести склейку, то получим *винтовую дислокацию*, рис. 3.2b. В этом случае вектор Бюргерса параллелен линии дислокации. Эту же винтовую дислокацию можно получить, сдвинув перед склейкой верхний берег разреза в противоположном направлении.

С топологической точки зрения среда, содержащая дислокации, которых может быть несколько или даже бесконечное число, представляет собой евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ . В отличие от упругих деформаций при наличии дислокаций вектор смещений перестает быть гладкой функцией, т.к. имеются поверхности разреза. В то же время мы предполагаем, что частные производные от вектора смещений  $\partial_j u^i$  (*тензор дисторсии*) являются достаточно гладкими функциями на поверхности разреза. С физической точки зрения такое предположение оправдано тем, что эти производные определяют тензор деформаций (3.4). В свою очередь частные производные от тензора деформаций должны существовать и быть непрерывными функциями в равновесном состоянии везде, за исключением, может быть, линий дислокаций, т.к. в противном случае уравнение равновесия (3.2) не имеет смысла. Поскольку тензор деформаций определяет индуцированную метрику (3.6), то мы предполагаем, что метрика и репер являются достаточно гладкими функциями во всем евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , за исключением, возможно, линий дислокаций,

Основная идея геометрического подхода сводится к следующему. Для описания отдельных дислокаций в рамках теории упругости необходимо решить уравнения равновесия для вектора смещений с определенными граничными условиями на разрезах. Для небольшого числа дислокаций это возможно. Однако с увеличением количества дислокаций граничные условия настолько усложняются, что решение задачи представляется нереальным. Кроме того, одну и ту же дислокацию можно создать с помощью различных разрезов, что приводит к неоднозначности для векторного поля смещений. Другим недостатком этого подхода является его непригодность для описания непрерывного распределения дислокаций, т.к. в этом случае векторное поле

смещений просто не существует, поскольку должно иметь разрывы в каждой точке. В геометрическом подходе основная переменная – репер, который, по предположению, является достаточно гладкой функцией везде за исключением, возможно, линий дислокаций. Для репера постулируются новые уравнения (см. раздел 3.4). В геометрическом подходе переход от конечного числа дислокаций к их непрерывному распределению происходит просто и естественно. При этом происходит сглаживание сингулярностей на линиях дислокаций аналогично тому, как сглаживается распределение масс для точечных частиц при переходе к непрерывной среде.

Перейдем к построению формализма геометрического подхода. Поскольку при наличии дефектов в равновесном состоянии в общем случае у нас нет никакой симметрии, то отсутствует понятие выделенной декартовой системы координат. Поэтому рассмотрим произвольную систему координат  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , в  $\mathbb{R}^3$ . Для нумерации координат мы используем теперь греческие буквы, поскольку допускаем произвольные преобразования координат. Тогда вектор Бюргерса можно выразить в виде интеграла от вектора смещения:

$$\oint_C dx^\mu \partial_\mu u^i(x) = - \oint_C dx^\mu \partial_\mu y^i(x) = -b^i, \quad (3.10)$$

где  $C$  – замкнутый контур, охватывающий линию дислокации, рис. 3.3. Этот ин-

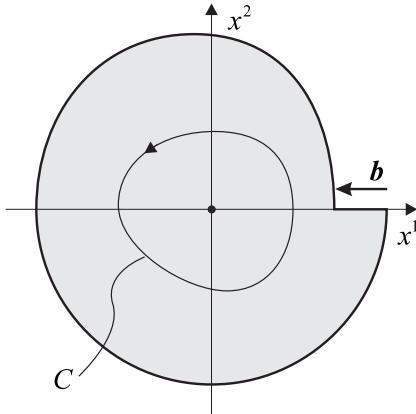


Рис. 3.3: Сечение среды с краевой дислокацией.  $C$  – контур интегрирования для вектора Бюргерса  $\mathbf{b}$ .

теграл инвариантен относительно произвольных преобразований координат  $x^\mu \mapsto x'^\mu(x)$  и ковариантен относительно глобальных  $\mathbb{SO}(3)$  вращений координат  $y^i$ . Здесь компоненты векторного поля смещений  $u^i(x)$  рассматриваются относительно ортонормального базиса касательного пространства  $u = u^i e_i$ . Если бы мы рассматривали компоненты векторного поля смещений относительно координатного базиса  $u = u^\mu \partial_\mu$ , то инвариантность интеграла (3.10) относительно общих преобразований координат была бы нарушена.

В геометрическом подходе вместо частных производных от векторного поля смещений  $\partial_\mu u^i$  мы вводим новую независимую переменную – репер – следующим образом

$$e_\mu^i(x) := \begin{cases} \partial_\mu y^i, & \text{вне разреза,} \\ \lim \partial_\mu y^i, & \text{на разрезе.} \end{cases} \quad (3.11)$$

По построению, репер является непрерывной функцией на разрезе, поскольку в равновесном состоянии среды упругие силы на обоих берегах разреза должны быть

равны. Более того, мы предполагаем, что он является достаточно гладким. Отметим, что, если бы мы просто определили репер, как частную производную  $\partial_\mu y^i$ , то у репера была бы  $\delta$ -образная особенность на разрезе, т.к. функции  $y^i(x)$  испытывают скачок. Эти  $\delta$ -функции в определении (3.11) отброшены.

Вектор Бюргерса по теореме Стокса можно представить в виде интеграла по поверхности  $S$ , натянутой на замкнутый контур  $C$ ,

$$\oint_C dx^\mu e_\mu^i = \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\mu e_\nu^i - \partial_\nu e_\mu^i) = b^i, \quad (3.12)$$

где  $dx^\mu \wedge dx^\nu$  – элемент площади поверхности. Из определения репера (3.11) следует, что подынтегральное выражение равно нулю всюду, за исключением линии дислокации. Для краевой дислокации с постоянным вектором Бюргерса подынтегральное выражение имеет  $\delta$ -образную особенность на оси  $z$ . Критерием наличия дислокации является нарушение условия интегрируемости системы уравнений  $\partial_\mu y^i = e_\mu^i$ :

$$\partial_\mu e_\nu^i - \partial_\nu e_\mu^i \neq 0. \quad (3.13)$$

Если дислокаций нет, то функции  $y^i(x)$  существуют и определяют переход к декартовой системе координат.

В геометрической теории дефектов поле  $e_\mu^i$  отождествляется с репером. Далее, сравним подынтегральное выражение в (3.12) с выражением для тензора кручения в переменных Картана (??)

$$T_{\mu\nu}^i = \partial_\mu e_\nu^i - \partial_\nu e_\mu^i - e_\mu^j \omega_{\nu j}^i + e_\nu^j \omega_{\mu j}^i. \quad (3.14)$$

Они отличаются только слагаемыми, содержащими  $\mathbb{SO}(3)$  связность. Это дает основание ввести следующий постулат. В геометрической теории дефектов вектор Бюргерса, соответствующий некоторой поверхности  $S$ , определяется интегралом от тензора кручения:

$$b^i := \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu T_{\mu\nu}^i. \quad (3.15)$$

Это определение инвариантно относительно общих преобразований координат  $x^\mu$  и ковариантно относительно глобальных вращений. Таким образом, в геометрической теории дефектов тензор кручения имеет прямой физический смысл: он равен поверхностной плотности вектора Бюргерса.

В геометрической теории дефектов выражение для вектора Бюргерса (3.15) является постулатом, и все предыдущие построения – не более, чем наводящие соображения.

Физический смысл  $\mathbb{SO}(3)$  связности будет дан в разделе 3.3, а сейчас мы покажем, каким образом данное определение сводится к выражению для вектора Бюргерса (3.12), полученному в рамках теории упругости. Если тензор кривизны  $\mathbb{SO}(3)$  связности равен нулю, то по теореме ?? связность локально тривиальна, и существует такое  $\mathbb{SO}(3)$  вращение, что  $\omega_{\mu i}^j = 0$ . В этом случае мы возвращаемся к выражению (3.12).

Если  $\mathbb{SO}(3)$  связность равна нулю и репер является достаточно гладким, то с каждым контуром можно однозначно связать вектор Бюргерса. При этом его можно выразить как поверхностный интеграл от тензора кручения. Поверхностный интеграл зависит только от граничного контура, но не от поверхности в силу теоремы Стокса.

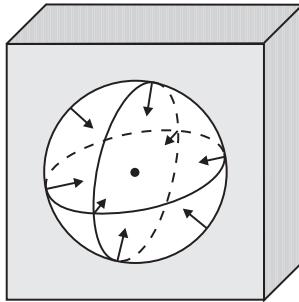


Рис. 3.4: Точечный дефект – вакансия, возникает, когда из среды вырезается шар и граничная сфера стягивается в точку.

Мы показали, что наличие линейных дислокаций приводит к нетривиальному кручению. В геометрической теории дефектов равенство нулю тензора кручения  $T_{\mu\nu}^i = 0$  естественно рассматривать, как критерий отсутствия дислокаций. Тогда под термин дислокация попадают не только линейные дислокации, но и, по сути дела, произвольные дефекты в упругой среде. Они получаются с помощью произвольных разрезов среды и склеек. При этом часть среды может быть удалена или, наоборот, добавлена, если образовались полости. Например, точечные дефекты – *вакансии и примеси* также являются дислокациями. В первом случае из евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  вырезается шар вещества и граничная сфера стягивается в точку (рис. 3.4). В случае примеси точка евклидова пространства раздувается до сферы и образовавшаяся шаровидная полость заполняется таким же веществом. Точечные дефекты характеризуются массой удаленного или добавленного вещества, которая также определяется репером:

$$M := \rho_0 \int_{\mathbb{R}^3} dx \left( \det e_\mu^i - \det \overset{\circ}{e}_\mu^i \right), \quad \overset{\circ}{e}_\mu^i := \partial_\mu y^i, \quad (3.16)$$

где  $y^i(x)$  – функции перехода к декартовой системе координат в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\rho_0$  – плотность массы среды в равновесном состоянии, которую мы предполагаем постоянной. Масса определяется разностью двух интегралов, каждый из которых по отдельности расходится. Первый интеграл равен объему среды с дефектами, а второй интеграл – объему евклидова пространства. Тензор кручения для вакансии и примеси равен нулю всюду за исключением одной точки, где он имеет  $\delta$ -образную особенность. Для точечных дефектов понятие вектора Бюргерса отсутствует.

Согласно данному определению масса примеси положительна, так как вещество добавляется к среде, а масса вакансии отрицательна, поскольку часть вещества удалена.

В трехмерном пространстве помимо точечных и линейных дислокаций существуют также поверхностные дефекты. В геометрическом подходе все они относятся к дислокациям, т.к. связаны с нетривиальным тензором кручения.

### 3.3 Дисклинации

В предыдущем разделе мы связали дислокации в упругой среде с тензором кручения. При этом была введена  $\text{SO}(3)$  связность. Ниже мы покажем, что кривизна  $\text{SO}(3)$  связности определяет поверхностную плотность *вектора Франка*, характеризующего другие хорошо известные дефекты – линейные *дисклинации* в спиновой структуре среды [?].

Пусть в каждой точке среды задано единичное векторное поле  $n^i(x)$ , ( $n^i n_i = 1$ ). Например, для ферромагнетиков  $n^i$  имеет смысл магнитного момента, связанного с каждой точкой среды (рис. 3.5a). Для нематических жидкких кристаллов единичное векторное поле  $n^i$  вместе с отношением эквивалентности  $n^i \sim -n^i$  описывает поле директора (рис. 3.5b).

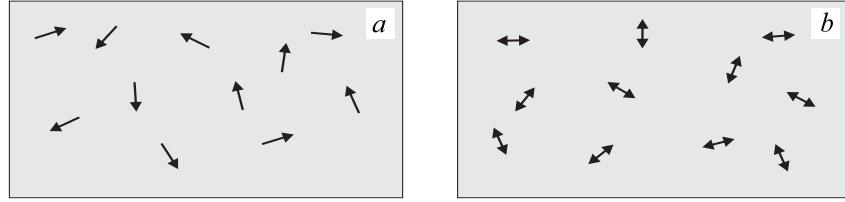


Рис. 3.5: Примеры сред со спиновой структурой: (a) ферромагнетик, (b) нематический жидкий кристалл.

Зафиксируем некоторое направление в среде  $n_0^i$ . Тогда поле  $n^i(x)$  в точке  $x$  может быть однозначно задано полем  $\omega^{ij}(x) = -\omega^{ji}(x)$ , принимающим значения в алгебре вращений  $\mathfrak{so}(3)$  (угол вращения):

$$n^i = n_0^j S_j^i(\omega),$$

где  $S_j^i \in \mathbb{SO}(3)$  – матрица вращений, соответствующая элементу алгебры  $\omega^{ij}$ . Здесь мы используем следующую параметризацию группы трехмерных вращений элементами ее алгебры (??),

$$S_i^j = (\mathbf{e}^{(\omega\varepsilon)})_i^j = \cos \omega \delta_i^j + \frac{(\omega\varepsilon)_i^j}{\omega} \sin \omega + \frac{\omega_i \omega^j}{\omega^2} (1 - \cos \omega) \quad \in \mathbb{SO}(3), \quad (3.17)$$

где  $(\omega\varepsilon)_i^j := \omega^k \varepsilon_{ki}^j$  и  $\omega := \sqrt{\omega^i \omega_i}$  – модуль вектора  $\omega^i$ . Псевдовектор  $\omega^k := \omega_{ij} \varepsilon^{ijk} / 2$ , где  $\varepsilon^{ijk}$  – полностью антисимметричный тензор третьего ранга,  $\varepsilon^{123} = 1$ , направлен вдоль оси вращения, а его длина равна углу поворота. Поле  $\omega^{ij}(x) \in \mathfrak{so}(3)$  мы будем называть *спиновой структурой* вещества.

Если среда обладает спиновой структурой, то в ней возможны дефекты, которые называются дисклинациями. Для линейных дисклинаций, параллельных оси  $x^3$ , векторное поле  $n$  лежит в перпендикулярной плоскости  $x^1, x^2$ . Простейшие примеры линейных дисклинаций показаны на рис. 3.6. Каждая линейная дисклинация характеризуется вектором Франка с компонентами

$$\Theta_i := \epsilon_{ijk} \Omega^{jk}, \quad (3.18)$$

где

$$\Omega^{ij} := \oint_C dx^\mu \partial_\mu \omega^{ij}, \quad (3.19)$$

и интеграл берется по замкнутому контуру  $C$ , охватывающему линию дисклинации. Длина вектора Франка равна полному углу поворота поля  $n^i$  при обходе вокруг дисклинации.

Векторное поле  $n^i(x)$  задает отображение евклидова пространства в сферу  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Для линейных дисклинаций, параллельных оси  $x^3$ , это отображение сужено до отображения плоскости  $\mathbb{R}^2$  в окружность  $\mathbb{S}^1$ . Ясно, что в этом случае полный угол поворота  $|\Theta| := \sqrt{\Theta^i \Theta_i}$  должен быть кратен  $2\pi$ .

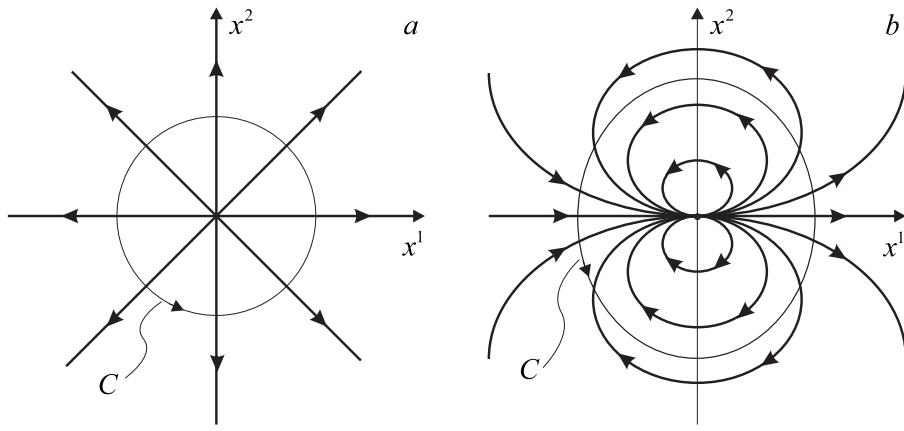


Рис. 3.6: Распределение единичного векторного поля в плоскости  $x^1, x^2$  для линейных дисклиниаций, параллельных оси  $x^3$ , при  $|\Theta| = 2\pi$  (a) и  $|\Theta| = 4\pi$  (b).

Для нематических жидкких кристаллов у нас есть отношение эквивалентности  $n^i \sim -n^i$ . Поэтому для линейных дисклиниаций, параллельных оси  $x^3$ , поле директора задает отображение плоскости в проективную прямую  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^1$ . В этом случае длина вектора Франка должна быть кратна  $\pi$ . Соответствующие примеры дисклиниаций показаны на рис. 3.7.

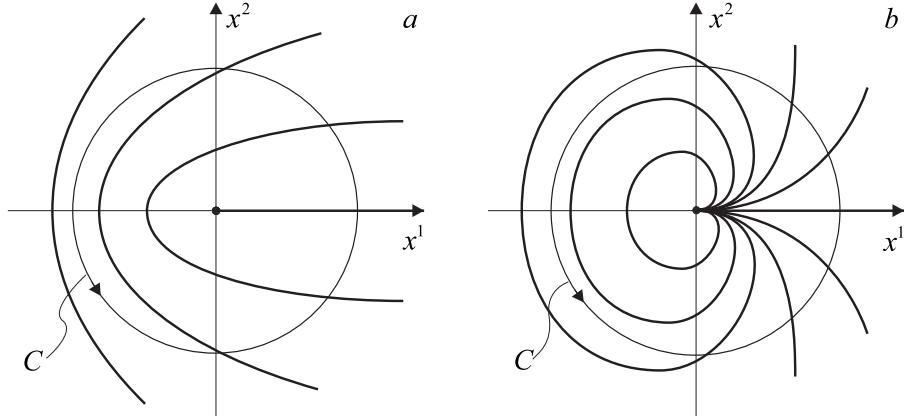


Рис. 3.7: Распределение поля директора в плоскости  $x^1, x^2$  для линейных дисклиниаций, параллельных оси  $x^3$ , при  $|\Theta| = \pi$  (a) и  $|\Theta| = 3\pi$  (b).

Как и в случае поля смещений для дислокаций, поле  $\omega^{ij}(x)$ , принимающее значения в алгебре Ли  $\mathfrak{so}(3)$ , при наличии дисклиниаций не является непрерывной функцией в  $\mathbb{R}^3$ . Сделаем разрез в  $\mathbb{R}^3$ , ограниченный линией дисклиниации. Тогда можно считать поле  $\omega^{ij}(x)$  достаточно гладким во всем пространстве за исключением разреза. Предположим, что все частные производные от  $\omega^{ij}(x)$  имеют одинаковый предел при приближении к разрезу с обеих сторон. Тогда определим новое поле

$$\omega_\mu{}^{ij} := \begin{cases} \partial_\mu \omega^{ij}, & \text{вне разреза,} \\ \lim \partial_\mu \omega^{ij}, & \text{на разрезе.} \end{cases} \quad (3.20)$$

По построению функции  $\omega_\mu{}^{ij}$  являются достаточно гладкими везде, за исключением, возможно, линии дисклиниации. Тогда вектор Франка можно представить поверх-

ностным интегралом

$$\Omega^{ij} = \oint_C dx^\mu \omega_\mu^{ij} = \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu (\partial_\mu \omega_\nu^{ij} - \partial_\nu \omega_\mu^{ij}), \quad (3.21)$$

где  $S$  – произвольная поверхность с краем  $C$ . Если поле  $\omega_\mu^{ij}$  задано, то условием интегрируемости системы уравнений  $\partial_\mu \omega_\nu^{ij} = \omega_\mu^{ij}$  является равенство

$$\partial_\mu \omega_\nu^{ij} - \partial_\nu \omega_\mu^{ij} = 0. \quad (3.22)$$

Это равенство дает критерий отсутствия дисклинаций.

В геометрической теории дефектов мы отождествляем поле  $\omega_\mu^{ij}$  с  $\mathbb{SO}(3)$ -связностью. В выражении для кривизны (??)

$$R_{\mu\nu}^{ij} = \partial_\mu \omega_\nu^{ij} - \partial_\nu \omega_\mu^{ij} - \omega_\mu^{ik} \omega_{\nu k}^{j} + \omega_\nu^{ik} \omega_{\mu k}^{j} \quad (3.23)$$

слагаемые с производными совпадают с (3.22) поэтому мы постулируем ковариантный критерий отсутствия дисклинаций в виде равенства нулю тензора кривизны  $\mathbb{SO}(3)$  связности:

$$R_{\mu\nu}^{ij} = 0.$$

Одновременно мы даем физическую интерпретацию тензору кривизны как поверхности плотности вектора Франка:

$$\Omega^{ij} := \iint_S dx^\mu \wedge dx^\nu R_{\mu\nu}^{ij}. \quad (3.24)$$

Это определение приводит к предыдущему выражению для вектора Франка (3.21) в случае, когда вращение вектора  $n$  происходит в фиксированной плоскости. В этом случае вращения сужены до подгруппы  $\mathbb{SO}(2) \subset \mathbb{SO}(3)$ . Поскольку группа вращений плоскости  $\mathbb{SO}(2)$  является абелевой, то квадратичные слагаемые в выражении для кривизны (??) исчезают и мы получаем прежнее выражение для вектора Франка (3.21). В этом можно убедиться с помощью прямой проверки.

**Предложение 3.3.1.** *Если вращение директора происходит в фиксированной плоскости, то тензор кривизны линеен по компонентам  $\mathbb{SO}(3)$  связности.*

**Доказательство.** В трехмерном пространстве существует полностью антисимметричный тензор третьего ранга  $\varepsilon_{ijk}$ ,  $\varepsilon_{123} := 1$ , (см. приложение ??). Поэтому  $\mathbb{SO}(3)$  связность  $\omega_\mu^{ij}$  можно параметризовать полем  $\omega_{\mu k}$ , имеющим только два индекса:

$$\omega_{\mu k} := \frac{1}{2} \omega_\mu^{ij} \varepsilon_{ijk} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_\mu^{ij} = \varepsilon^{ijk} \omega_{\mu k}. \quad (3.25)$$

Соответствующий тензор кривизны (3.23) имеет вид

$$R_{\mu\nu k} := R_{\mu\nu}^{ij} \varepsilon_{ijk} = \partial_\mu \omega_{\nu k} - \partial_\nu \omega_{\mu k} + 2\omega_{\mu i} \omega_{\nu j} \varepsilon^{ij}{}_k. \quad (3.26)$$

Если вращение поля директора происходит в одной плоскости, например,  $x, y$ , то компоненты спиновой структуры, имеющие индекс вдоль оси  $z$ , равны нулю,  $\omega^{i3} = -\omega^{3i}$ . Поэтому  $\omega_{\mu 1} = 0$  и  $\omega_{\mu 2} = 0$ . Тогда из выражения (3.26) следует, что последнее слагаемое равно нулю.  $\square$

В геометрической теории дефектов равенство (3.24) является постулатом, а все предыдущие построения – наводящими соображениями.

Таким образом, мы описали среду с дислокациями (дефекты упругой среды) и дисклинациями (дефекты спиновой структуры) в рамках геометрии Римана–Картана. При этом мы отождествили тензор кручения с поверхностью плотностью дислокаций, а тензор кривизны – с поверхностью плотностью дисклинаций. Соответствие между физическими и геометрическими объектами подытожено в Таблице 3.1.

Упругие деформации	$R_{\mu\nu}^{ij} = 0$	$T_{\mu\nu}^i = 0$
Дислокации	$R_{\mu\nu}^{ij} = 0$	$T_{\mu\nu}^i \neq 0$
Дисклинации	$R_{\mu\nu}^{ij} \neq 0$	$T_{\mu\nu}^i = 0$
Дислокации и дисклинации	$R_{\mu\nu}^{ij} \neq 0$	$T_{\mu\nu}^i \neq 0$

Таблица 3.1: Соответствие между физическими и геометрическими объектами в геометрической теории дефектов.

### 3.4 Свободная энергия

До сих пор мы обсуждали только соответствие между физическими и геометрическими объектами. Для завершения построения геометрической теории дефектов необходимо постулировать уравнения равновесия, описывающие статическое распределение дефектов в среде. Единственными и независимыми переменными в геометрическом подходе являются репер  $e_\mu^i$  и  $\mathbb{SO}(3)$  связность  $\omega_\mu^{ij}$ . В отличие от предыдущих геометрических подходов мы полностью отказываемся от поля смещений  $u^i$  и спиновой структуры  $\omega^{ij}$  как полей, входящих в систему уравнений равновесия. В общем случае непрерывного распределения дефектов их просто не существует. Тем не менее на определенном этапе и при определенных условиях их можно восстановить, но об этом пойдет речь в следующих разделах.

Выражение для свободной энергии было получено в [?]. Мы предполагаем, что уравнения равновесия должны быть ковариантны относительно общих преобразований координат и локальных  $\mathbb{SO}(3)$  вращений, не выше второго порядка и следовать из вариационного принципа. Мы также требуем инвариантности уравнений равновесия относительно пространственных отражений. Тогда выражение для свободной энергии, приводящее к уравнениям равновесия, должно быть равно интегралу по объему от скалярной функции (лагранжиана), квадратичной по тензору кручения и кривизны, которые заданы равенствами (3.14) и (3.23). В трехмерном пространстве существует три независимых инварианта, квадратичных по тензору кручения, и три независимых инварианта, квадратичных по тензору кривизны. Сюда же можно добавить скалярную кривизну и “космологическую” постоянную  $\Lambda$ . Таким образом мы получаем восьмипараметрический лагранжиан общего вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}}L = & -\kappa R + \frac{1}{4}T_{ijk}(\beta_1 T^{ijk} + \beta_2 T^{kij} + \beta_3 T^{jki}) + \\ & + \frac{1}{4}R_{ijkl}(\gamma_1 R^{ijkl} + \gamma_2 R^{klji} + \gamma_3 R^{ikjl}) - \Lambda, \quad \sqrt{g} = \det e_\mu^i, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где  $\kappa$ ,  $\beta_{1,2,3}$  и  $\gamma_{1,2,3}$  – некоторые постоянные, введен след тензора кручения  $T_j := T_{ij}^i$ , тензор Риччи  $R_{ik} := R_{ijk}^j$  и скалярная кривизна  $R := R_i^i$ . Здесь и в дальнейшем переход от греческих индексов к латинским и наоборот осуществляется с помощью репера и его обратного. Например,

$$R_{ijkl} := R_{\mu\nu kl} e^\mu{}_i e^\nu{}_j, \quad T_{ijk} := T_{\mu\nu k} e^\mu{}_i e^\nu{}_j.$$

Спецификой трех измерений является то обстоятельство, что полный тензор кривизны взаимно однозначно определяется своим тензором Риччи (??) и имеет три неприводимые компоненты. Поэтому лагранжиан содержит только три независимых инварианта, квадратичных по тензору кривизны. Лагранжиан Гильберта–Эйнштейна

$\tilde{R}$ , который также приводит к уравнениям второго порядка для репера, нет никакой необходимости добавлять к свободной энергии (3.27) ввиду тождества (??).

Таким образом, наиболее общий лагранжиан зависит от восьми постоянных и приводит к очень сложным уравнениям равновесия. В настоящее время мы не знаем, какие именно значения постоянных описывают те или иные среды. Поэтому, чтобы упростить ситуацию, сделаем физически разумные предположения. А именно, потребуем, чтобы уравнения равновесия допускали следующие три типа решений.

1. Существуют решения, описывающие среду только с дислокациями,  
 $R_{\mu\nu}^{ij} = 0, T_{\mu\nu}^i \neq 0$ .
2. Существуют решения, описывающие среду только с дисклинациями,  
 $R_{\mu\nu}^{ij} \neq 0, T_{\mu\nu}^i = 0$ .
3. Существуют решения, описывающие среду без дислокаций и дисклинаций,  
 $R_{\mu\nu}^{ij} = 0, T_{\mu\nu}^i = 0$ .

Оказывается, что эти простые предположения уменьшают число независимых параметров в выражении для свободной энергии с восьми до двух. Докажем это утверждение. Лагранжиан (3.27) приводит к следующим уравнениям равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta L}{\delta e_\mu^i} = & \kappa (Re^\mu_i - 2R_i^\mu) + \beta_1 \left( \nabla_\nu T^{\nu\mu}_i - \frac{1}{4} T_{jkl} T^{jkl} e^\mu_i + T^{\mu jk} T_{ijk} \right) + \\ & + \beta_2 \left( -\frac{1}{2} \nabla_\nu (T_i^{\mu\nu} - T_i^{\nu\mu}) - \frac{1}{4} T_{jkl} T^{ljk} e^\mu_i - \frac{1}{2} T^{j\mu k} T_{kij} + \frac{1}{2} T^{jk\mu} T_{kij} \right) + \\ & + \beta_3 \left( -\frac{1}{2} \nabla_\nu (T^\nu e^\mu_i - T^\mu e^\nu_i) - \frac{1}{4} T_j T^j e^\mu_i + \frac{1}{2} T^\mu T_i + \frac{1}{2} T^j T_{ij}^\mu \right) + \\ & + \gamma_1 \left( -\frac{1}{4} R_{jklm} R^{jklm} e^\mu_i + R^{\mu jk} R_{ijk} \right) + \\ & + \gamma_2 \left( -\frac{1}{4} R_{jklm} R^{lmjk} e^\mu_i + R^{kl\mu j} R_{ijkl} \right) + \\ & + \gamma_3 \left( -\frac{1}{4} R_{jk} R^{jk} e^\mu_i + \frac{1}{2} R^{\mu j} R_{ij} + \frac{1}{2} R^{jk} R_{jik}^\mu \right) + \Lambda e^\mu_i = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta L}{\delta \omega_\mu^{ij}} = & \kappa \left( \frac{1}{2} T_{ij}^\mu + T_i e^\mu_j \right) + \beta_1 \frac{1}{2} T^\mu_{ji} + \beta_2 \frac{1}{4} (T_i^\mu_j - T_{ij}^\mu) + \\ & + \beta_3 \frac{1}{4} T_j e^\mu_i + \gamma_1 \frac{1}{2} \nabla_\nu R^{\nu\mu}_{ij} + \gamma_2 \frac{1}{2} \nabla_\nu R_{ij}^{\nu\mu} + \\ & + \gamma_3 \frac{1}{4} \nabla_\nu (R^\nu_i e^\mu_j - R^\mu_i e^\nu_j) - (i \leftrightarrow j) = 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где ковариантная производная действует с  $\mathbb{SO}(3)$  связностью на латинские индексы и с символами Кристоффеля – на греческие. Например,

$$\begin{aligned} \nabla_\nu T^{\rho\mu}_i &:= \partial_\nu T^{\rho\mu}_i + \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\rho T^{\sigma\mu}_i + \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu T^{\rho\sigma}_i - \omega_{\nu i}^j T^{\rho\mu}_j, \\ \nabla_\nu R^{\rho\mu}_{ij} &:= \partial_\nu R^{\rho\mu}_{ij} + \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\rho R^{\sigma\mu}_{ij} + \tilde{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu R^{\rho\sigma}_{ij} - \omega_{\nu i}^k R^{\rho\mu}_{kj} - \omega_{\nu j}^k R^{\rho\mu}_{ik}. \end{aligned}$$

Первое требование к классу решений уравнений равновесия состоит в том, чтобы они допускали решения, описывающие наличие в среде только дислокаций. Это означает наличие решений с нулевым тензором кривизны, что соответствует отсутствию

дисклинаций. Подстановка условия  $R_{\mu\nu}^{ij} = 0$  в уравнение (3.29) для  $\mathbb{SO}(3)$  связности дает три независимых уравнения для неприводимых компонент тензора кручения:

$$\begin{aligned} (12\kappa + 2\beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3)T_i &= 0, \\ (\kappa - \beta_1 - \beta_2)T^* &= 0, \\ (4\kappa + 2\beta_1 - \beta_2)W_{ijk} &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь  $T_i$  (= след),  $T^*$  (= полностью антисимметричная часть) и  $W_{ijk}$  – неприводимые компоненты тензора кручения:

$$T_{ijk} = W_{ijk} + T^* \epsilon_{ijk} + \frac{1}{2}(\delta_{ik}T_j - \delta_{jk}T_i),$$

где

$$\begin{aligned} T^* &:= \frac{1}{6}T_{ijk}\epsilon^{ijk}, & T_j &:= T_{ij}^i, \\ W_{ijk} &:= T_{ijk} - T^* \epsilon_{ijk} - \frac{1}{2}(\delta_{ik}T_j - \delta_{jk}T_i), & W_{ijk}\epsilon^{ijk} &= 0, & W_{ij}^i &= 0. \end{aligned}$$

В общем случае при наличии дислокаций все неприводимые компоненты тензора кручения отличны от нуля ( $T_i, T^*, W_{ijk} \neq 0$ ) и уравнения (3.30) имеют единственное решение

$$\beta_1 = -\kappa, \quad \beta_2 = 2\kappa, \quad \beta_3 = 4\kappa. \quad (3.31)$$

При этих константах связи первые четыре слагаемые в лагранжиане (3.27) с точностью до дивергенции равны лагранжиану Гильберта–Эйнштейна  $\kappa \tilde{R}(e)$  как следствие тождества (??). При этом уравнение (3.28) сводится к уравнениям Эйнштейна с космологической постоянной

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} - \frac{\Lambda}{2\kappa}g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.32)$$

Таким образом, первое условие выполнено.

Согласно второму условию уравнения равновесия должны допускать решения с нулевым кручением  $T_{\mu\nu}^i = 0$ . В этом случае тензор кривизны обладает дополнительной симметрией относительно перестановки первой и второй пары индексов,  $R_{ijkl} = R_{klji}$ , и уравнение (3.29) принимает вид

$$\begin{aligned} (\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{4}\gamma_3)\nabla_\nu(R^{s\nu}{}_i e^\mu{}_j - R^{s\mu}{}_i e^\nu{}_j - R^{s\nu}{}_j e^\mu{}_i + R^{s\mu}{}_j e^\nu{}_i) + \\ + \frac{1}{6}(\gamma_1 + \gamma_2 + 4\gamma_3)(e^\nu{}_i e^\mu{}_j - e^\mu{}_i e^\nu{}_j)\nabla_\nu R = 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Здесь мы разложили тензор Риччи на неприводимые компоненты, выделив след и антисимметричную часть:

$$R_{ij} = R^s{}_{ij} + R^a{}_{ij} + \frac{1}{3}R\delta_{ij},$$

где

$$R^s{}_{ij} := \frac{1}{2}(R_{ji} + R_{ij}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}R, \quad R^a{}_{ij} := \frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji}).$$

Напомним, что при нулевом кручении тензор Риччи симметричен:  $R^a{}_{ij} = 0$ . Свертка уравнения (3.33) с  $e_\mu{}^j$  приводит к уравнению

$$(\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{4}\gamma_3)\nabla_\nu R^{s\nu}{}_\mu + \frac{1}{3}(\gamma_1 + \gamma_2 + 4\gamma_3)\nabla_\mu R = 0.$$

В общем случае отличной от нуля кривизны ковариантные производные  $\nabla_\nu R^{sv}_\mu$  и  $\nabla_\mu R$  отличны от нуля и независимы. Поэтому мы получаем два уравнения на константы связи

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{4}\gamma_3 = 0, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + 4\gamma_3 = 0,$$

которые имеют единственное решение

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \gamma, \quad \gamma_3 = 0. \quad (3.34)$$

В этом случае уравнение (3.28) для репера при ненулевом кручении также сводится к уравнениям Эйнштейна (3.32).

Последнее требование наличия решений с нулевой кривизной и кручением выполняется только при нулевой космологической постоянной  $\Lambda = 0$ .

Таким образом, простые и физически осмысленные требования определяют двухпараметрический лагранжиан

$$\frac{1}{\sqrt{g}}L = -\kappa\tilde{R} + 2\gamma R^A_{ij}R^{Ai}{}^j, \quad (3.35)$$

который равен сумме лагранжиана Гильберта–Эйнштейна для репера и квадрата антисимметричной компоненты тензора Риччи. Отметим, что  $\tilde{R}(e)$  и  $R^A_{ij}(e, \omega)$  построены для различных метрических связностей.

Действие (свободная энергия) в геометрической теории дефектов имеет вид

$$S := \int dx \sqrt{g} (-\kappa\tilde{R} + 2\gamma R^A_{ij}R^{Ai}{}^j). \quad (3.36)$$

Заметим, что если отказаться от требования инвариантности свободной энергии относительно пространственных отражений, то возникают дополнительные инварианты, например,  $R_{ij}T_k\varepsilon^{ijk}$ . Эта возможность требует отдельного исследования.

Выражение (3.35) в геометрической теории дефектов определяет плотность свободной энергии и приводит к уравнениям равновесия (уравнения Эйлера–Лагранжа). В геометрическом подходе вектор смещения и спиновая структура вообще не входят в выражение для свободной энергии (3.35).

## 3.5 Фиксирование калибровки

В геометрическом подходе единственными переменными являются репер  $e_\mu{}^i$  и  $\mathbb{SO}(3)$  связность  $\omega_{\mu i}{}^j$ . Поле смещений  $u^i$  и спиновую структуру  $\omega_i{}^j$  можно ввести только в тех областях среды, где дефекты отсутствуют. Действительно, из условия отсутствия дисклинаций ( $R_{\mu\nu i}{}^j = 0$ ) следует, что  $\mathbb{SO}(3)$  связность является чистой калибровкой (??), т.е. существует спиновая структура  $\omega_i{}^j$ . Если, вдобавок, отсутствуют дислокации ( $T_{\mu\nu}{}^i = 0$ ), то существует поле смещений такое, что репер равен его частным производным (??). В этом и только в этом случае можно ввести поле смещений и спиновую структуру. Ниже мы покажем, что это можно сделать таким образом, чтобы были выполнены уравнения нелинейной теории упругости и уравнения главного кирального  $\mathbb{SO}(3)$ -поля.

Уравнения Эйлера–Лагранжа для свободной энергии (3.35) ковариантны относительно общих преобразований координат в  $\mathbb{R}^3$  и локальных  $\mathbb{SO}(3)$  вращений. Это значит, что любое решение уравнений равновесия определено с точностью до диффеоморфизмов и локальных вращений. Чтобы геометрическая теория дефектов имела предсказательную силу, необходимо зафиксировать систему координат (выбрать

калибровку, как принято говорить в теории калибровочных полей). Это позволит из каждого класса эквивалентных решений выбрать по одному представителю. После этого мы скажем, что данное решение уравнений Эйлера–Лагранжа описывает распределение дефектов в среде в лабораторной системе координат.

Начнем с фиксирования диффеоморфизмов. Для этой цели выберем упругую калибровку, которая была предложена в [?]. Данный вопрос имеет принципиальное значение, и мы остановимся на нем подробно.

Из уравнений линейной теории упругости в отсутствие неупругих сил,  $f^i = 0$ , следует нековариантное уравнение второго порядка на вектор смещения (3.5). Его можно переписать в терминах индуцированной метрики (3.6), для которой мы получим нековариантное уравнение первого порядка. Это уравнение мы и выберем в качестве калибровочного условия, фиксирующего диффеоморфизмы. Отметим, что калибровочное условие не определено однозначно, т.к. индуцированная метрика нелинейна по вектору смещений, и различные уравнения для метрики могут иметь одно и то же линейное приближение. Приведем, например, два возможных выбора:

$$g^{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\mu g_{\nu\rho} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} g^{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\rho g_{\mu\nu} = 0, \quad (3.37)$$

$$\overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\mu g_{\nu\rho} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \overset{\circ}{\nabla}_\rho \overset{\circ}{g}{}^T = 0, \quad (3.38)$$

где  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  – евклидова метрика в той системе координат, в которой проводится решение задачи, и введено обозначение для следа метрики  $g^T := \overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ .

Калибровочные условия (3.37), (3.38), несмотря на их формальный вид, нарушают общую ковариантность, поскольку понимаются следующим образом. Метрика  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  – евклидова метрика, записанная в произвольной системе координат, например, в цилиндрической или сферической. Ковариантная производная  $\overset{\circ}{\nabla}_\mu$  построена по символам Кристоффеля, соответствующим метрике  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ , и, следовательно,  $\overset{\circ}{\nabla}_\mu \overset{\circ}{g}_{\nu\rho} = 0$ . Метрика  $g_{\mu\nu}$  – это метрика, описывающая дислокации (точное решение уравнений равновесия для свободной энергии (3.35)). Если мы хотим записать калибровочное условие, например, для декартовой системы координат, то выбираем  $\overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$ . Тогда калибровочное условие (3.38) примет вид

$$\delta^{\mu\nu} \partial_\mu g_{\nu\rho} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \partial_\rho (\delta^{\mu\nu} g_{\mu\nu}) = 0. \quad (3.39)$$

Если сюда подставить линейное приближение для метрики (3.6), то получим в точности уравнение (3.5). Уравнение (3.39) явно нарушает общую ковариантность, что и требуется от калибровочного условия, фиксирующего систему координат.

Калибровочные условия (3.37) и (3.38) отличаются тем, что в первом случае производится свертка с метрикой дислокации  $g^{\mu\nu}$ , а во втором случае – с евклидовой метрикой  $\overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu}$ , что не меняет линейного приближения. Оба калибровочных условия в линейном приближении по вектору смещений (3.6) приводят к уравнению (3.5), что уже было продемонстрировано в декартовой системе координат.

С геометрической точки зрения мы имеем следующее. Среда с дислокациями диффеоморфна евклидову пространству  $\mathbb{R}^3$ , снабженному двумя метриками  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  и  $g_{\mu\nu}$ . Метрика  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  является плоской евклидовой метрикой, записанной в произвольной системе координат. Метрика  $g_{\mu\nu}$  не является плоской и описывает распределение дислокаций в той же системе координат. На самом деле метрика  $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$  нужна только для фиксирования системы координат, в которой измеряется метрика  $g_{\mu\nu}$ .

Если решение уравнений равновесия удовлетворяет одному из условий (3.37) или (3.38), записанному, например, в цилиндрической системе координат, то будем говорить, что найдено решение в цилиндрической системе координат. При этом мы предполагаем, что распределение дислокаций упругой среды в лабораторной цилиндрической системе координат описывается именно этим решением. Аналогично можно искать решения в декартовой, сферической или другой системе координат.

Калибровочные условия можно записать и для репера  $e_\mu^i$ , который определен уравнением  $g_{\mu\nu} := e_\mu^i e_\nu^j \delta_{ij}$  (??). Здесь возникает дополнительный произвол, т.к. репер определен с точностью до локальных вращений. Эта инвариантность приводит к тому, что для репера возможны различные линейные приближения по вектору смещений. Рассмотрим две возможности в декартовой системе координат:

$$e_{\mu i} \approx \delta_{\mu i} - \partial_\mu u_i, \quad (3.40)$$

$$e_{\mu i} \approx \delta_{\mu i} - \frac{1}{2}(\partial_\mu u_i + \partial_i u_\mu), \quad (3.41)$$

где индекс опущен с помощью символа Кронекера. Этим возможностям и условию (3.38) на метрику соответствует два калибровочных условия на репер:

$$\overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\mu e_{\nu i} + \frac{1}{1-2\sigma} \overset{\circ}{e}{}^\mu{}_i \overset{\circ}{\nabla}_\mu e^T = 0, \quad (3.42)$$

$$\overset{\circ}{g}{}^{\mu\nu} \overset{\circ}{\nabla}_\mu e_{\nu i} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \overset{\circ}{e}{}^\mu{}_i \overset{\circ}{\nabla}_\mu e^T = 0, \quad (3.43)$$

где  $e^T := \overset{\circ}{e}{}^\mu{}_i e_\mu^i$  – след репера. Приведенные условия отличаются коэффициентом перед вторым слагаемым. Отметим, что в криволинейной системе координат в ковариантную производную  $\overset{\circ}{\nabla}_\mu$  необходимо включить также плоскую  $\mathbb{SO}(3)$  связность, действующую на индексы  $i, j$ . Можно выписать также и другие возможные калибровочные условия, которые имеют то же линейное приближение. Вопрос о правильном выборе калибровки в настоящее время открыт. На данном этапе мы хотим только продемонстрировать, что систему координат необходимо зафиксировать, и что калибровочное условие зависит от коэффициента Пуассона, который является экспериментально наблюдаемой величиной.

Калибровочные условия (3.42), (3.43) представляют собой дифференциальные уравнения первого порядка и содержат определенный произвол. Поэтому для однозначного фиксирования решения необходимо дополнительно наложить граничные условия на репер для каждой конкретной задачи.

Если дефектов нет, то  $T_{\mu\nu}^i = 0$ ,  $R_{\mu\nu j}^i = 0$ , и уравнения равновесия выполняются, т.к. эти условия удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа для лагранжиана (3.35). В этом и только в этом случае можно ввести вектор смещения, и для него упругая калибровка сводится к уравнениям нелинейной теории упругости. При наличии дефектов поля смещений не существует, и упругая калибровка просто определяет репер.

При выборе функционала свободной энергии мы потребовали, чтобы условия  $R_{\mu\nu}^{ij} = 0$  и  $T_{\mu\nu}^i = 0$  удовлетворяли уравнениям Эйлера–Лагранжа. И это важно, так как в противном случае на вектор смещения появилось бы дополнительное условие (уравнения Эйлера–Лагранжа) помимо уравнений теории упругости, следующих из упругой калибровки.

Подчеркнем еще раз важное обстоятельство. В геометрической теории дефектов мы предполагаем, что существует выделенная лабораторная система координат, в

которой проводятся измерения. Эта система координат связана со средой без дефектов и упругих напряжений и соответствует плоскому евклидову пространству  $\mathbb{R}^3$ . Калибровочные условия (3.37), (3.38) и (3.42), (3.43) записаны именно в этом евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , и содержат измеряемую величину – коэффициент Пуассона  $\sigma$ . Это обстоятельство существенно отличает геометрическую теорию дефектов от моделей гравитации, в которых все системы координат считаются равноправными.

Упругая калибровка есть уравнения нелинейной теории упругости, в которой тензор деформаций предполагается определенным через индуцированную метрику (3.9), а закон Гука сохраняется линейным. Обобщение на случай нелинейной зависимости тензора деформаций от напряжений очевидно.

Упругая калибровка используется для фиксирования диффеоморфизмов. Поскольку выражение для свободной энергии (3.35) инвариантно также относительно локальных  $\mathbb{SO}(3)$  вращений, то их тоже необходимо фиксировать. С этой целью была предложена лоренцева калибровка для связности [?]

$$\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \omega_{\nu j}^i = 0. \quad (3.44)$$

Калибровка (3.44) записана в лабораторной декартовой системе координат и имеет глубокий физический смысл. А именно, допустим, что дисклинаций нет ( $R_{\mu\nu j}^i = 0$ ). Тогда  $\mathbb{SO}(3)$  связность представляет собой чистую калибровку

$$\omega_{\mu j}^i = \partial_\mu S^{-1}_j{}^k S_k^i, \quad S_j^i \in \mathbb{SO}(3).$$

В этом случае лоренцева калибровка сводится к уравнениям главного кирального  $\mathbb{SO}(3)$ -поля

$$\delta^{\mu\nu} \partial_\mu (\partial_\nu S^{-1}_j{}^k S_k^i) = 0 \quad (3.45)$$

для спиновой структуры  $\omega^{ij}(x)$ , через которую выражается матрица вращений с помощью формулы (3.17). В этом случае уравнения (3.45) представляют собой систему нелинейных уравнений в частных производных второго порядка для спиновой структуры.

**Замечание.** Модели главного кирального поля (см., например, [?, ?, ?, ?, ?]), для различных групп и в разном числе измерений привлекают большое внимание в математической физике, поскольку допускают решения в виде топологических солитонов и находят широкое применение в физике.  $\square$

Таким образом, лоренцева калибровка (3.44) означает следующее. При отсутствии дисклинаций уравнения равновесия тождественно удовлетворяются и существует поле спиновой структуры  $\omega^{ij}$ , которое удовлетворяет уравнениям главного кирального поля. Тем самым мы предполагаем, что спиновая структура среды в отсутствие дефектов описывается моделью главного кирального  $\mathbb{SO}(3)$ -поля.

Модель главного кирального поля не является единственной, которую можно использовать для фиксирования локальных вращений. Для этой же цели можно использовать модель Скирма [?]. Уравнения Эйлера–Лагранжа этой модели нетрудно переписать в терминах  $\mathbb{SO}(3)$  связности и использовать их в качестве калибровочного условия.

Существуют и другие модели для спиновых структур. Распределение магнитных моментов в ферромагнетиках и поле директора в жидких кристаллах описывается с помощью выражения для свободной энергии, зависящего непосредственно от векторного  $n$ -поля [?, ?]. В последнее время большое внимание привлекает также

модель Фаддеева для  $n$ -поля [?]. Открытым остается вопрос о том, существуют ли такие калибровочные условия на  $\text{SO}(3)$  связность, которые в отсутствие дисклинаций приводили бы к этим моделям.

Таким образом, в геометрической теории дефектов мы ставим следующую задачу. Найти решение уравнений Эйлера–Лагранжа для свободной энергии (3.35), которое удовлетворяет упругой калибровке для репера и лоренцевой калибровке для  $\text{SO}(3)$  связности. В разделах (3.7.2) и (3.8.2) мы решим задачу для клиновой дислокации в рамках классической теории упругости и геометрической теории дефектов, а затем сравним полученные результаты.

## 3.6 Асимметричная теория упругости

В предыдущем разделе мы использовали теорию упругости и модель главного кирального  $\text{SO}(3)$ -поля для фиксирования инвариантности свободной энергии (3.35) в геометрической теории дефектов. Это – не единственная возможность, т.к. для фиксирования калибровки можно применить и другие модели. В настоящем разделе мы покажем, как для фиксирования инвариантности относительно диффеоморфизмов и локальных вращений может быть использована другая модель – асимметричная теория упругости.

В начале прошлого века братья Коссера разработали теорию упругой среды, каждая точка которой характеризуется не только своим положением, но и ориентацией в пространстве [?]. То есть в каждой точке среды задан репер (рис. 3.8). С физической

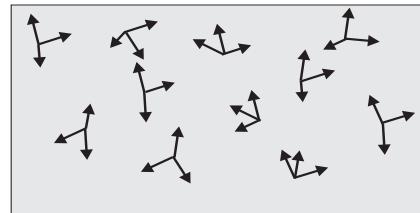


Рис. 3.8: Каждая точка среды Коссера характеризуется не только своим положением, но и ориентацией в пространстве.

точки зрения это означает, что каждый атом в кристаллической решетке является не точкой, а протяженным объектом, имеющим ориентацию. В этом случае тензор напряжений  $\sigma^{ij}$  уже не будет симметричным, и соответствующая теория называется асимметричной теорией упругости. Современное изложение этого подхода приведено в [?]. Покажем, что асимметричная теория упругости естественным образом вкладывается в геометрическую теорию дефектов.

Основными переменными в асимметричной теории упругости являются вектор смещений  $u^i(x)$  и угол поворота  $\omega^i(x)$ . Направление псевдовектора  $\omega^i$  совпадает с осью вращения элемента среды, а его длина равна углу поворота. Угол поворота дуален к полю спиновой структуры,  $\omega_{ij} = \varepsilon_{ijk}\omega^k$ , рассмотренной в разделе 3.3.

Среда Коссера характеризуется тензором напряжений  $\sigma^{ij}(x)$  (плотность упругих сил, действующих на площадку с нормалью  $i$  в направлении  $j$ ) и тензором моментных напряжений  $\mu^{ij}(x)$  (плотность момента сил, действующих на площадку с нормалью  $i$  в направлении  $j$ ). Среда Коссера находится в равновесии, если в каждой

точке уравновешены силы и моменты сил [?]:

$$\partial_j \sigma^{ji} + f^i = 0, \quad (3.46)$$

$$\varepsilon^{ijk} \sigma_{jk} + \partial_j \mu^{ji} + m^i = 0, \quad (3.47)$$

где  $f^i(x)$  и  $m^i(x)$  – плотности неупругих внешних сил и моментов. Из уравнения (3.47) следует, что тензор упругих напряжений симметричен тогда и только тогда, когда выполнено условие  $\partial_j \mu^{ji} + m^i = 0$ .

Поле смещений и угол поворота однозначно определяют тензор деформаций  $\epsilon_{ij}(x)$  и тензор изгиба-кручения  $\kappa_{ij}(x)$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &:= \partial_i u_j - \omega_{ij}, \\ \kappa_{ij} &:= \partial_i \omega_j, \quad \omega_{ij} := \varepsilon_{ijk} \omega^k. \end{aligned} \quad (3.48)$$

В общем случае тензоры деформаций и изгиба-кручения никакой симметрии по индексам не имеют.

Закон Гука в среде Коссера заменяется двумя линейными соотношениями, связывающими тензоры напряжений и моментных напряжений с тензорами деформаций и изгиба-кручения:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{\{ij\}} + 2\alpha \epsilon_{[ij]} + \lambda \delta_{ij} \epsilon_k^k, \quad (3.49)$$

$$\mu_{ij} = 2\gamma \kappa_{\{ij\}} + 2\epsilon \kappa_{[ij]} + \beta \delta_{ij} \kappa_k^k, \quad (3.50)$$

где  $\mu, \lambda$  – постоянные Ламе, и  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$  – четыре новые упругие постоянные, характеризующие среду. Фигурные и квадратные скобки означают соответственно симметризацию и антисимметризацию индексов.

Асимметричная теория упругости сводится к симметричной теории упругости, рассмотренной в разделе 3.1, в случае, когда

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i). \quad (3.51)$$

Тогда тензор деформаций (3.48) симметричен и имеет тот же вид (3.4), что и ранее. При этом уравнение (3.49) переходит в закон Гука (3.3), а уравнение (3.46) – в закон Ньютона (3.2). Уравнение (3.47) вместе с (3.49) и (3.50) сводится к равенству

$$(\gamma + \epsilon) \varepsilon^{ijk} \Delta \partial_j u_k + m^i = 0.$$

Первый член равен нулю, как следствие уравнения (3.5). Таким образом, для спиновой структуры вида (3.51) и  $m^i = 0$  мы возвращаемся к симметричной теории упругости.

Уравнения (3.46), (3.47), (3.49) и (3.50) вместе с граничными условиями определяют равновесное состояние среды Коссера. Покажем, как эта модель вкладывается в геометрическую теорию упругости. Прежде всего заметим, что в отсутствие дефектов ( $T_{\mu\nu}^i = 0, R_{\mu\nu}^{ij} = 0$ ) существуют поля  $u^i$  и  $\omega^{ij}$ . Тогда репер и  $\mathbb{SO}(3)$  связность в линейном приближении определяются тензорами деформаций и изгиба-кручения:

$$e_\mu^i = \partial_\mu y^j S_j^i(\omega) \approx (\delta_\mu^j - \partial_\mu u^j)(\delta_j^i + \omega_j^i) \approx \delta_\mu^i - \epsilon_\mu^i, \quad (3.52)$$

$$\omega_\mu^{ij} \approx \partial_\mu \omega^{ij} = \varepsilon^{ijk} \kappa_{\mu k}. \quad (3.53)$$

Отметим, что соотношения (3.48) можно рассматривать как уравнения относительно вектора смещений и угла поворота при заданных  $\epsilon_{ij}(x)$  и  $\kappa_{ij}(x)$ . Соответствующие условия интегрируемости были получены в [?]. Эти условия интегрируемости

являются линейным приближением равенств  $T_{\mu\nu}^i = 0$  и  $R_{\mu\nu}^{ij} = 0$ , определяющих отсутствие дефектов.

Если неупругие силы и моменты в среде отсутствуют ( $f^i = 0$ ,  $m^i = 0$ ), то асимметрическая теория упругости сводится к уравнениям второго порядка на вектор смещения и поворота:

$$(\mu + \alpha) \Delta u^i + (\mu - \alpha + \lambda) \partial^i \partial_j u^j - 2\alpha \partial_j \omega^{ji} = 0, \quad (3.54)$$

$$(\gamma + \epsilon) \Delta \omega^i + (\gamma - \epsilon + \beta) \partial^i \partial_j \omega^j + 2\alpha \varepsilon^{ijk} (\partial_j u_k - \omega_{jk}) = 0. \quad (3.55)$$

Перепишем эти уравнения для репера и  $\mathbb{SO}(3)$  связности:

$$(\mu + \alpha) \overset{\circ}{\nabla}{}^\mu e_\mu^i + (\mu - \alpha + \lambda) \overset{\circ}{\nabla}{}^i e^T - (\mu - \alpha) \omega_\mu^{\mu i} = 0, \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma + \epsilon) \varepsilon^{ijk} \overset{\circ}{\nabla}{}^\mu \omega_{\mu jk} + \frac{1}{2}(\gamma - \epsilon + \beta) \varepsilon^{\mu jk} \overset{\circ}{\nabla}{}^i \omega_{\mu jk} + 2\alpha \varepsilon^{i\mu j} e_{\mu j} = 0. \quad (3.57)$$

Конечно, это не единственные уравнения, которые в линейном приближении совпадают с уравнениями (3.54), (3.55). В настоящее время у нас нет аргументов для однозначного выбора. Полученные нелинейные уравнения асимметрической теории упругости можно использовать в качестве калибровочных условий в геометрической теории дефектов. При этом мы имеем шесть уравнений для фиксирования диффеоморфизмов (три параметра) и локальных  $\mathbb{SO}(3)$  вращений (три параметра). Таким образом асимметрическая теория упругости естественным образом вкладывается в геометрическую теорию дефектов.

В разделе 3.5 рассмотрены упругая калибровка для репера и лоренцева калибровка для  $\mathbb{SO}(3)$  связности. В этом случае при отсутствии дефектов спиновые переменные среды не взаимодействуют с упругими напряжениями. В асимметрической теории упругости упругие напряжения непосредственно влияют на спиновую структуру, и наоборот.

## 3.7 Дислокации в теории упругости

В настоящем разделе мы опишем несколько простейших дислокаций в рамках теории упругости. Это сделано для того, чтобы в дальнейшем сравнить полученные ответы с результатами геометрической теории дефектов.

### 3.7.1 Винтовая дислокация

Винтовая дислокация изображена на рис.3.2b. В этом случае вектор Бюргерса параллелен оси  $z := x^3$  и направлен в ту же сторону  $\mathbf{b} = (0, 0, b)$ ,  $b > 0$ . Исходя из симметрии задачи, будем решать задачу в цилиндрической системе координат. Решение ищем в виде

$$\{u_i\} = \{u_r = 0, u_\phi = 0, u_z = c\varphi\}, \quad c = \text{const.} \quad (3.58)$$

Для винтовой дислокации необходимо решить уравнения равновесия (3.5) вместе с граничными условиями

$$u_z|_{\varphi=0} = 0, \quad u_z|_{\varphi=2\pi} = b, \quad (3.59)$$

которые означают, что нижний берег разреза сдвинут вдоль оси  $z$  на вектор Бюргерса  $\mathbf{b}$ .

Используя явные выражения для лапласиана и дивергенции в цилиндрических координатах (??)–(??), получаем, что для векторного поля смещений (3.58) справедливы равенства:

$$\Delta u_{\hat{r}} = 0, \quad \Delta u_{\hat{\varphi}} = 0, \quad \Delta u_{\hat{z}} = 0, \quad \nabla_i u^i = 0.$$

Поэтому уравнения равновесия выполнены.

Постоянная  $c$  находится из граничных условий (3.59):  $c = b/2\pi$ . Таким образом, векторное поле смещений для винтовой дислокации имеет вид

$$u^{\hat{z}} = u_{\hat{z}} = \frac{b}{2\pi} \varphi. \quad (3.60)$$

Как видим, результат не зависит от упругих свойств среды.

Теперь вычислим метрику среды с винтовой дислокацией. Пусть

$$\{x^\mu\} = (r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3$$

– цилиндрическая система координат в среде после создания дислокации. Из определения вектора смещений (3.1) следует, что до создания дислокации каждая точка среды имела имела декартовы координаты

$$\{y^i\} = (x, y, z - b\varphi/(2\pi)) \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$x := r \cos \varphi, \quad y := r \sin \varphi.$$

Теперь вычислим репер по формуле (3.11)

$$e_\mu^i := \partial_\mu y^i = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & -\frac{b}{2\pi} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

Определитель репера равен  $\det e_\mu^i = r$  как и в плоском случае.

Заметим, что вектор смещений (3.60) имеет скачок при  $\varphi = 2\pi$ . При его дифференцировании по углу  $\varphi$  возникает  $\delta$ -функция, которую мы отбросили в соответствии с общим рецептом раздела 3.2. В результате получили репер, который является гладким всюду за исключением начала координат, где он вырожден.

Репер (3.140) определяет метрику винтовой дислокации

$$g_{\mu\nu} := e_\mu^i e_\nu^j \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 + \frac{b^2}{4\pi^2} & -\frac{b}{2\pi} \\ 0 & -\frac{b}{2\pi} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Ее определитель равен  $\det g_{\mu\nu} = r^2$ , как и следовало ожидать.

Теперь вычислим компоненты тензора кручения. Здесь надо проявить осторожность, т.к. необходимо уловить  $\delta$ -функцию на оси  $z := x^3$ . Проведем вычисления в декартовых координатах, потому что цилиндрические координаты не подходят, поскольку они вырождены на оси  $z$ .

Пусть  $\mathbf{x} := (x, y) = (r, \varphi)$  – двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной оси дислокации. Напомним, что фундаментальное решение  $G$  (функция Грина) уравнения Лапласа на плоскости

$$\Delta G = b\delta(\mathbf{x}),$$

где  $\Delta := \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$  и  $\delta(\mathbf{x})$  – двумерная  $\delta$ -функция, имеет вид (см., например, [?])

$$G = \frac{b}{2\pi} \ln \frac{1}{r}. \quad (3.63)$$

Его частные производные имеют вид

$$G_x = -\frac{b}{2\pi} \frac{x}{r^2}, \quad G_y = -\frac{b}{2\pi} \frac{y}{r^2}.$$

Репер для винтовой дислокации в декартовой системе координат  $\{x^\mu\} = (x, y, z)$  можно выразить через функцию Грина

$$e_\mu^i = \partial_\mu y^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b}{2\pi} \frac{y}{r^2} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{2\pi} \frac{y}{r^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -G_y \\ 0 & 1 & G_x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

При нулевой  $\mathbb{SO}(3)$  связности,  $\omega_\mu^{ij} = 0$ , тензор кручения (3.14) имеет вид

$$T_{\mu\nu}^i = \partial_\mu e_\nu^i - \partial_\nu e_\mu^i.$$

Прямые вычисления показывают, что для репера (3.64) все компоненты кручения равны нулю за исключением одной:

$$T_{xy}^{\hat{z}} = G_{xx} + G_{yy} = \Delta G = b\delta(\mathbf{x}). \quad (3.65)$$

Его интегрирование по плоскости  $x, y$  дает вектор Бюргерса

$$b^{\hat{z}} = \int dx dy T_{xy}^{\hat{z}} = b,$$

что согласуется с общим определением (3.15).

### 3.7.2 Клиновая дислокация

Под клиновой дислокацией мы понимаем бесконечную упругую среду, которая топологически совпадает с евклидовым пространством  $\mathbb{R}^3$  и построена следующим образом. Берется бесконечная упругая среда без дефектов из которой вырезается бесконечный клин с углом  $-2\pi\theta$ ,  $\theta < 0$ . Для определенности мы считаем, что острый клина совпадает с осью  $z := x^3$  – осью (ядром) дислокации (рис. 3.9). Затем края разреза симметрично сдвигаются и склеиваются. После этого среда под действием упругих сил приходит в равновесное состояние. Если клин из среды вырезается, то угол дефицита будем считать отрицательным:  $-1 < \theta < 0$ . При положительных  $\theta$  клин вставляется. Таким образом, первоначально упругая среда занимает область, большую или меньшую евклидова пространства  $\mathbb{R}^3$  в зависимости от знака угла дефицита  $\theta$ , которая в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  задается неравенствами:

$$0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi\alpha, \quad -\infty < z < \infty, \quad \alpha := 1 + \theta. \quad (3.66)$$

Отметим, что клиновую дислокацию часто называют дисклинацией. В нашем подходе такое название представляется неестественным, поскольку клиновая дислокация связана с нетривиальным кручением. Вдобавок термин дисклинация используется для дефектов спиновой структуры.

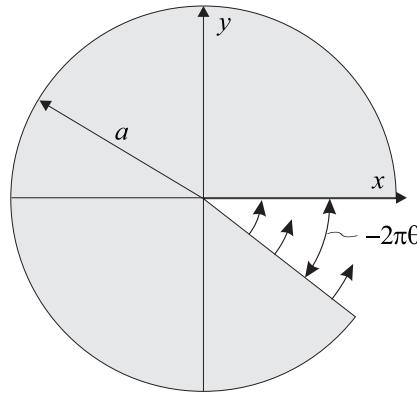


Рис. 3.9: Клиновая дислокация с углом дефицита  $2\pi\theta$ . При отрицательных и положительных  $\theta$  клин соответственно вырезается и вставляется.

Перейдем к математической постановке задачи для клиновой дислокации в рамках теории упругости. Чтобы избежать расходящихся выражений, которые возникают для бесконечной среды, будем считать, что клиновая дислокация представляет собой цилиндр конечного радиуса  $a$ . Эта задача обладает трансляционной инвариантностью вдоль оси  $z$  и вращательной инвариантностью в плоскости  $x, y$ . Поэтому будем использовать цилиндрическую систему координат. Пусть

$$u_i = (u_{\hat{r}}, u_{\hat{\varphi}}, u_{\hat{z}}) \quad (3.67)$$

– компоненты ковектора смещения относительно ортонормального базиса в цилиндрической системе координат. Этот ковектор в области (3.66) удовлетворяет уравнению равновесия, которое следует после подстановки (3.3) в уравнение (3.2),

$$(1 - 2\sigma) \Delta u_i + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\nabla}_j u^j = 0, \quad (3.68)$$

где  $\overset{\circ}{\nabla}_i$  – ковариантная производная для плоской евклидовой метрики в рассматриваемой системе координат.

Выражения для дивергенции и лапласиана от ковектора смещения в цилиндрической системе координат были получены ранее (??)–(??). Исходя из симметрии задачи, будем искать решение уравнения (3.68) в виде

$$u_{\hat{r}} = u(r), \quad u_{\hat{\varphi}} = A(r)\varphi, \quad u_{\hat{z}} = 0, \quad (3.69)$$

где  $u(r)$  и  $A(r)$  – две неизвестные функции только от радиуса. Поставим следующие граничные условия:

$$u_{\hat{r}}|_{r=0} = 0, \quad u_{\hat{\varphi}}|_{r=0} = 0, \quad u_{\hat{\varphi}}|_{\varphi=0} = 0, \quad u_{\hat{\varphi}}|_{\varphi=2\pi\alpha} = -2\pi\theta r, \quad \partial_r u_{\hat{r}}|_{r=a} = 0. \quad (3.70)$$

Первые четыре условия являются геометрическими и соответствуют процессу создания дислокации. Первые два условия – это условие отсутствия смещения оси дислокации. Третье и четвертое условия описывают склейку берегов разреза в линейном приближении. Последнее условие имеет простой физический смысл: отсутствие внешних сил на границе среды.

Неизвестную функцию  $A(r)$  находим из предпоследнего граничного условия (3.70)

$$A(r) = -\frac{\theta}{1 + \theta} r.$$

Теперь нужно решить уравнения равновесия (3.68). Явные выражения для лапласиана векторного поля и дивергенции в цилиндрической системе координат были получены ранее (??)–(??). Прямая подстановка векторного поля смещений (3.69) показывает, что  $\varphi$  и  $z$  компоненты уравнения равновесия (3.68) тождественно удовлетворяются, а радиальная компонента сводится к уравнению

$$\partial_r(r\partial_r u) - \frac{u}{r} = D, \quad D := -\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \frac{\theta}{1+\theta} = \text{const},$$

правая часть которого определяется углом дефицита и коэффициентом Пуассона. Общее решение этого уравнения зависит от двух постоянных интегрирования

$$u = \frac{D}{2} r \ln r + c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad c_{1,2} = \text{const.}$$

Постоянная интегрирования  $c_2 = 0$  в силу граничного условия в нуле. Константу  $c_1$  находим из последнего граничного условия (3.70). В итоге получаем известное решение рассматриваемой задачи [?]

$$\begin{aligned} u_{\hat{r}} &= \frac{D}{2} r \ln \frac{r}{ea}, \\ u_{\hat{\varphi}} &= -\frac{\theta}{1+\theta} r \varphi. \end{aligned} \tag{3.71}$$

В выражении для  $u^{\hat{r}}$  буква  $e$  обозначает основание натурального логарифма. Отметим, что радиальная компонента вектора смещений в пределе  $a \rightarrow \infty$  расходится. Это значит, что для описания клиновой дислокации в рамках теории упругости необходимо рассматривать цилиндр конечного радиуса.

Линейная теория упругости применима в области малых относительных удлинений, которые для клиновой дислокации равны

$$\frac{du_{\hat{r}}}{dr} = -\frac{\theta}{1+\theta} \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \ln \frac{r}{a}, \quad \frac{1}{r} \frac{du_{\hat{\varphi}}}{d\varphi} = -\frac{\theta}{1+\theta}.$$

Это значит, что мы вправе ожидать верных результатов для поля смещений при малых углах дефицита ( $\theta \ll 1$ ) и вблизи края цилиндра ( $r \sim a$ ).

Найдем метрику, индуцированную клиновой дислокацией, в линейном приближении по углу дефицита  $\theta$ . Вычисления можно провести, воспользовавшись общей формулой (3.6) или известным выражением для вариации формы метрики (см. раздел ??)

$$\delta g_{\mu\nu} = -\overset{\circ}{\nabla}_\mu u_\nu - \overset{\circ}{\nabla}_\nu u_\mu. \tag{3.72}$$

После несложных вычислений по формуле (3.72), получим следующее выражение для двумерной части метрики в плоскости  $x, y$ :

$$dl^2 = \left(1 + \theta \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \ln \frac{r}{a}\right) dr^2 + r^2 \left(1 + \theta \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \ln \frac{r}{a} + \theta \frac{1}{1-\sigma}\right) d\varphi^2. \tag{3.73}$$

С этой метрикой мы сравним метрику, полученную путем решения трехмерных уравнений Эйнштейна в разделе 3.8.2.

### 3.7.3 Краевая дислокация

В природе клиновые дислокации встречаются относительно редко, т.к. требуют добавления или удаления большого количества вещества, что связано с большими энергетическими затратами. Тем не менее их изучение представляет большой интерес, т.к. другие прямолинейные дислокации можно представить в виде суперпозиции клиновых дислокаций. В этом смысле клиновые дислокации являются элементарными. Покажем это на примере краевой дислокации – одним из наиболее распространенных дефектов.

Краевая дислокация, ядро которой совпадает с осью  $z$ , изображена на рис. 3.10a. Она возникает в результате разреза среды по полуплоскости  $y = 0$ ,  $x > 0$ , сдвига

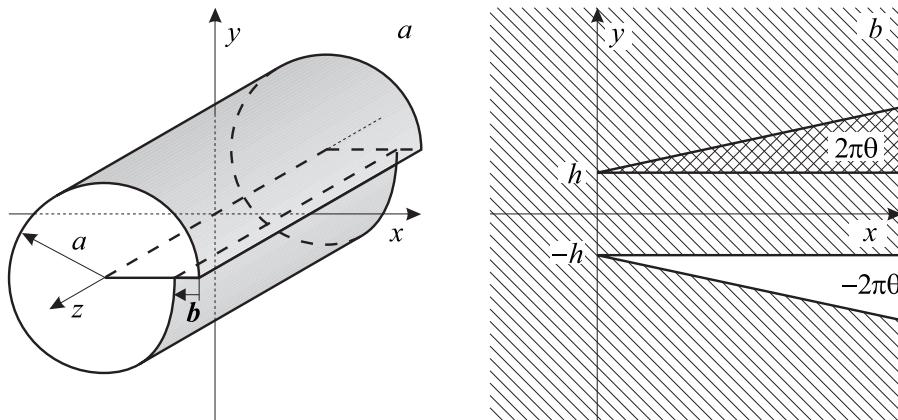


Рис. 3.10: Краевая дислокация с вектором Бюргерса  $\mathbf{b}$ , направленным к оси дислокации (a). Краевая дислокация, как диполь, состоящий из двух клиновых дислокаций с положительным и отрицательным углом дефицита (b).

нижнего берега разреза к оси  $z$  на постоянный (вдали от ядра дислокации) вектор Бюргерса  $\mathbf{b}$  с последующей склейкой берегов разреза. Чтобы найти поле смещений краевой дислокации можно решить соответствующую краевую задачу для уравнения равновесия (3.68) [?]. Однако, зная явный вид вектора смещения для клиновой дислокации, мы поступим иначе.

Краевая дислокация представляет собой диполь, состоящий из двух близко расположенных параллельных клиновых дислокаций с положительным  $2\pi\theta$  и отрицательным  $-2\pi\theta$  углом дефицита, как показано на рис. 3.10b. Будем считать, что оси первой и второй клиновой дислокации параллельны оси  $z$  и пересекают плоскость  $x, y$  соответственно в точках с координатами  $(0, h)$  и  $(0, -h)$ . Расстояние между осями клиновых дислокаций равно  $2h$ . Тем самым мы заменили бесконечную среду на цилиндр конечного радиуса  $a \gg h$ . Ниже мы увидим, что окончательные ответы не зависят от  $a$  и могут быть продолжены на все пространство.

Из выражений для поля смещений (3.71) следует, что вдали от начала координат ( $r \gg h$ ) поле смещений клиновых дислокаций с точностью до членов первого порядка

малости по  $\theta$  и  $h/r$  имеет вид

$$u_x^{(1)} \approx -\theta \left[ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} x \ln \frac{r-h \sin \varphi}{\epsilon R} - (y-h) \left( \varphi - \frac{h \cos \varphi}{r} \right) \right], \quad (3.74)$$

$$u_y^{(1)} \approx -\theta \left[ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} (y-h) \ln \frac{r-h \sin \varphi}{\epsilon R} + x \left( \varphi - \frac{h \cos \varphi}{r} \right) \right],$$

$$u_x^{(2)} \approx \theta \left[ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} x \ln \frac{r+h \sin \varphi}{\epsilon R} - (y+h) \left( \varphi + \frac{h \cos \varphi}{r} \right) \right], \quad (3.75)$$

$$u_y^{(2)} \approx \theta \left[ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} (y+h) \ln \frac{r+h \sin \varphi}{\epsilon R} + x \left( \varphi + \frac{h \cos \varphi}{r} \right) \right].$$

Поскольку уравнения теории упругости линейны, то для нахождения поля смещений краевой дислокации достаточно сложить поля смещений (3.74) и (3.75). После несложных вычислений с точностью до смещения всей среды как целого на постоянный вектор вдоль оси  $y$ , получим поле смещений для краевой дислокации

$$u_x = b \left[ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{xy}{x^2+y^2} \right], \quad (3.76)$$

$$u_y = -b \left[ \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \ln \frac{r}{\epsilon a} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right],$$

где для модуля вектора Бюргерса введено обозначение

$$b := |\mathbf{b}| = -2h\theta.$$

Этот результат совпадает с выражением для поля смещений, полученного путем прямого решения уравнений теории упругости [?]. Тем самым мы доказали, что краевая дислокация является диполем, состоящим из двух параллельных клиновых дислокаций с углами дефицита противоположных знаков.

Найдем метрику, индуцированной краевой дислокацией. Используя формулу (3.72), в линейном приближении по  $\theta$  и  $h/r$  получим метрику в плоскости  $x, y$

$$dl^2 = \left( 1 + \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \frac{b}{r} \sin \varphi \right) (dr^2 + r^2 d\varphi^2) - \frac{2b \cos \varphi}{1-\sigma} dr d\varphi. \quad (3.77)$$

Заметим, что индуцированная метрика для краевой дислокации не зависит от радиуса цилиндра  $a$  и, следовательно, может быть продолжена на всю плоскость  $x, y$ .

## 3.8 Линейные дислокации в геометрической теории дефектов

Теперь опишем простейшие дислокации в рамках геометрической теории дефектов и сравним полученные результатами с теми, которые были получены в теории упругости в разделе 3.7.

### 3.8.1 Параллельные клиновые дислокации

В настоящем разделе описано произвольное распределение параллельных прямолинейных клиновых дислокаций в рамках геометрической теории дефектов. Решение этой задачи в теории упругости неизвестно.

При отсутствии дисклинаций ( $R_{\mu\nu i}^j = 0$ )  $\mathbb{SO}(3)$  связность является чистой калибровкой, и уравнения равновесия для  $\mathbb{SO}(3)$  связности (3.29) тождественно удовлетворяются. Явный вид  $\mathbb{SO}(3)$  связности в этом случае однозначно определяется полем спиновой структуры  $\omega^{ij}$ . В силу лоренцевой калибровки (3.44) поле  $\omega^{ij}$  удовлетворяет уравнениям главного кирального поля. Решение этой системы уравнений задает тривиальную  $\mathbb{SO}(3)$  связность. Таким образом, при отсутствии дисклинаций задача сводится к решению уравнений Эйнштейна для репера в упругой калибровке и решению модели главного кирального поля для описания спиновой структуры. После этого можно вычислить тензор кручения по формуле (??), который определяет поверхностную плотность вектора Бюргерса. Для простоты положим  $\omega_\mu^{ij} = 0$ .

Поскольку дисклинации отсутствуют (тензор кривизны равен нулю), то мы имеем пространство абсолютного параллелизма. Тогда вся геометрия определяется репером  $e_\mu^i$ , который однозначно задает тензор кручения (??) при нулевой  $\mathbb{SO}(3)$  связности. Здесь мы предполагаем, что тривиальная  $\mathbb{SO}(3)$  связность равна нулю. Репер  $e_\mu^i$  удовлетворяет трехмерным уравнениям Эйнштейна с евклидовой сигнатурой метрики, которые следуют из выражения для свободной энергии (3.35) при  $R_{\mu\nu j}^i = 0$ ,

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} = -\frac{1}{2}T_{\mu\nu}. \quad (3.78)$$

Здесь в правую часть уравнений Эйнштейна мы добавили источник дислокаций  $T_{\mu\nu}$  (в гравитации, это – тензор энергии-импульса материи).

Отметим, что без источника дислокаций модель была бы тривиальной. Действительно, при  $T_{\mu\nu} = 0$  из уравнений Эйнштейна (3.78) следует, что скалярная кривизна и тензор Риччи равны нулю:  $\tilde{R} = 0$ ,  $\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$ . Поскольку в трехмерном пространстве полный тензор кривизны взаимно однозначно определяется тензором Риччи (??), то отсюда следует, что без источников он также обращается в нуль. Обращение в нуль полного тензора кривизны и означает тривиальность модели, поскольку в этом случае дефектов просто нет. Аналогичное утверждение хорошо известно в гравитации. Обычно его формулируют следующим образом: “Трехмерная гравитация не описывает динамических, т.е. распространяющихся, степеней свободы”.

Для наших целей необходимо найти решение уравнений Эйнштейна (3.78) для произвольного числа клиновых дислокаций. Уравнения Эйнштейна представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Точных решений, даже в трехмерном пространстве, известно не так много. Замечательное точное решение, описывающее произвольное статическое распределение точечных частиц хорошо известно в трехмерной гравитации для метрики лоренцевой сигнатурой  $(+ - -)$  [?, ?, ?]. Получим аналог этого решения для евклидовой сигнатурой метрики и покажем, что в геометрической теории дефектов оно описывает произвольное распределение параллельных клиновых дислокаций. Тем самым сначала мы рассмотрим общий случай произвольного числа клиновых дислокаций, а затем подробно остановимся на интересующем нас примере одной клиновой дислокации. Это сделано намеренно, поскольку решение в более общем случае не вносит существенных усложнений. В то же время произвольное распределение клиновых дислокаций представляет гораздо больший интерес для приложений. Так, в предыдущем разделе было показано, что краевая дислокация представляется диполем, состоящим из двух параллельных клиновых дислокаций разных знаков.

Рассмотрим упругую среду с произвольным распределением параллельных клиновых дислокаций. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось  $z := x^3$  была параллельна осям дислокаций, а оси  $\{x^\alpha\} = \{x, y\}$ ,  $\alpha = 1, 2$  были перпендику-

лярны оси  $z$ . Тогда метрика примет блочно диагональный вид

$$ds^2 = dl^2 + N^2 dz^2, \quad (3.79)$$

где

$$dl^2 := g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

– двумерная метрика на плоскости  $x, y$ . Благодаря трансляционной симметрии вдоль оси  $z$  двумерная метрика  $g_{\alpha\beta}(x, y)$  и функция  $N(x, y)$  не зависят от  $z$ . При этом мы не предполагаем никакой вращательной симметрии.

Отвлекаясь от физической аргументации, можно сказать проще. Рассмотрим блочно диагональную метрику вида (3.79), которая обладает трансляционной инвариантностью вдоль оси  $z$ . А затем покажем, что соответствующее решение уравнений Эйнштейна действительно описывает произвольное распределение параллельных клиновых дислокаций.

Тензор кривизны для метрики (3.79) имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^\delta &= R_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\delta}, & \tilde{R}_{\alpha z\gamma}^z &= \frac{1}{N} \nabla_\alpha \nabla_\gamma N, \\ \tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}^z &= \tilde{R}_{\alpha z\gamma}^\delta = 0, \end{aligned}$$

где  $R_{\alpha\beta\gamma}^{(2)\delta}$  – тензор кривизны для двумерной метрики  $g_{\alpha\beta}$ , и  $\nabla_\alpha$  – двумерная ковариантная производная с символами Кристоффеля также для двумерной метрики  $g_{\alpha\beta}$ . Тензор Риччи с скалярная кривизна имеют следующие компоненты:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta}^{(2)} + \frac{1}{N} \nabla_\alpha \nabla_\beta N, \\ \tilde{R}_{\alpha z} &= 0, \\ \tilde{R}_{zz} &= N \nabla^\alpha \nabla_\alpha N, \\ \tilde{R} &= R^{(2)} + \frac{2}{N} \nabla^\alpha \nabla_\alpha N, \end{aligned}$$

где  $\nabla^\alpha := g^{\alpha\beta} \nabla_\beta$ .

Выберем источник дислокаций в следующем виде

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \frac{4\pi}{\sqrt{g^{(2)}}} \sum_{i=1}^N \theta_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \\ T_{\alpha\beta} &= T_{\alpha z} = T_{z\alpha} = 0, \end{aligned} \quad (3.80)$$

где  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) := \delta(x - x_i) \delta(y - y_i)$  – двумерная  $\delta$ -функция на плоскости  $x, y$  с носителем в точке  $\mathbf{r}_i(x_i, y_i)$ . Появление множителя  $g^{(2)} := \det g_{\alpha\beta}$  перед знаком суммы связано с тем, что  $\delta$ -функция с точки зрения общих преобразований координат является не функцией, а скалярной плотностью. Ниже показано, что решение уравнений Эйнштейна с таким источником описывает  $N$  клиновых параллельных дислокаций с углами дефицита  $\theta_i$ , которые пересекают плоскость  $x, y$  в точках  $(x_i, y_i)$ . В трехмерной гравитации такой источник соответствует частицам с массами  $m_i := 2\pi\theta_i$ , покоящимся в точках  $\mathbf{r}_i$ .

Уравнения Эйнштейна (3.78) с источником (3.80) для блочно диагональной метрики (3.79) сводятся к четырем уравнениям:

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta N - g_{\alpha\beta} \nabla^\gamma \nabla_\gamma N = 0, \quad (3.81)$$

$$-\frac{1}{2} N^3 R^{(2)} = -\frac{2\pi}{\sqrt{g^{(2)}}} \sum_{i=1}^N \theta_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (3.82)$$

где  $R^{(2)}$  – двумерная скалярная кривизна.

Метрика вида (3.79) все еще инвариантна относительно преобразований координат на плоскости  $x, y$ . Используя эту оставшуюся инвариантность, зафиксируем конформную калибровку на плоскости (локально это всегда возможно)

$$g_{\alpha\beta} = e^{2\phi} \delta_{\alpha\beta}, \quad (3.83)$$

где  $\phi(x, y)$  – некоторая функция.

В конформной калибровке уравнение (3.81) принимает вид

$$\partial_\alpha \partial_\beta N = 0.$$

При постоянных граничных условиях для  $N$  на границе плоскости  $x, y$  это уравнение имеет единственное решение  $N = \text{const}$ . Изменив масштаб координаты  $z$ , можно положить  $N = 1$  без ограничения общности. Тогда уравнение (3.82) сводится к уравнению Пуассона

$$\Delta\phi = 2\pi \sum_i \theta_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (3.84)$$

которое имеет хорошо известное общее решение (см., например, [?])

$$\phi = \sum_i \theta_i \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| + \frac{1}{2} \ln C, \quad C = \text{const} > 0.$$

Следовательно, метрика в плоскости  $x, y$  имеет вид

$$dl^2 = C \prod_i |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^{2\theta_i} (dr^2 + r^2 d\varphi^2), \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad (3.85)$$

где полярные координаты  $r, \varphi$  покрывают всю плоскость  $\mathbb{R}^2$  и не более того (что важно!). Любое решение уравнений Эйнштейна определено с точностью до выбора системы координат, поскольку уравнения ковариантны. Воспользуемся этим и положим  $C = 1$ , чего всегда можно добиться путем выбора масштаба  $r$ .

Таким образом, метрика

$$ds^2 = \prod_i |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^{2\theta_i} (dr^2 + r^2 d\varphi^2) + dz^2 \quad (3.86)$$

является точным решением нелинейных уравнений Эйнштейна, описывающим, как мы увидим, произвольное распределение параллельных клиновых дислокаций. Физический смысл данного решения будет ясен из дальнейшего рассмотрения.

Отметим, что переход к непрерывному распределению дислокаций в геометрическом подходе прост. Для этого вместо  $\delta$ -образных источников в правую часть уравнений Эйнштейна нужно подставить непрерывное распределение источников дислокаций. Простейшие примеры будут рассмотрены в разделе 3.8.4.

В заключение данного раздела вычислим плотность энергии произвольного распределения клиновых дислокаций. По определению она равна интегралу от плотности свободной энергии

$$\begin{aligned} E := \int dx dy dz \sqrt{g} \tilde{R} &= \int dz \int dx dy N^2 \det \sqrt{g^{(2)}} \left( R^{(2)} + \frac{2}{N} \nabla^\alpha \nabla_\alpha N \right) = \\ &= \int dz \int dx dy 4\pi \sum_i \theta_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = 4\pi \int dz \sum_i \theta_i, \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством  $N = 1$  и уравнением равновесия (3.82). Таким образом, линейная плотность энергии клиновых дислокаций с точностью до постоянной равна сумме углов дефицита всех дислокаций.

### 3.8.2 Клиновая дислокация в геометрическом подходе

Чтобы показать, что метрика (3.85) действительно описывает произвольное распределение клиновых дислокаций, рассмотрим подробнее одну клиновую дислокацию с источником в начале координат,

$$T_{zz} := \frac{4\pi}{\sqrt{g^{(2)}}} \theta \delta(\mathbf{r}). \quad (3.87)$$

Соответствующая двумерная метрика (3.85) при  $C = 1$  имеет вид

$$dl^2 = r^{2\theta} (dr^2 + r^2 d\varphi^2). \quad (3.88)$$

Перейдем в новую систему координат

$$\hat{r} := \frac{1}{\alpha} r^\alpha, \quad \hat{\varphi} := \alpha \varphi, \quad \alpha := 1 + \theta, \quad (3.89)$$

в которой метрика становится евклидовой

$$dl^2 = d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\hat{\varphi}^2. \quad (3.90)$$

Однако теперь область изменения полярного угла отличается от  $2\pi$ :  $0 < \hat{\varphi} < 2\pi\alpha$ , и покрывает плоскость  $x, y$  с вырезанным или добавленным клином  $2\pi\theta$ , что зависит от знака угла дефицита  $\theta$ .

Поскольку в новой системе координат  $\hat{r}, \hat{\varphi}$  метрика совпадает с евклидовой, то здесь мы имеем евклидову плоскость с вырезанным или добавленным клином, т.к. угол  $\hat{\varphi}$  меняется в интервале  $(0, 2\pi\alpha)$ . Переход к координатам  $r, \varphi$  (3.89) обозначает склейку берегов образовавшегося клина, что соответствует конусу. Поэтому обе метрики (3.88) и (3.90) описывают один и тот же геометрический объект – коническую особенность. Очевидно, что тензоры кручения и кривизны равны нулю всюду, за исключением начала координат.

Возникновение конической особенности в точности совпадает с созданием клиновой дислокации в теории дефектов. Нетрудно убедиться в том, что общее решение (3.85) описывает произвольное распределение конических особенностей с углами дефицита  $\theta_i$ , расположенными в точках  $\mathbf{r}_i$ . Следовательно, это решение описывает произвольное распределение параллельных клиновых дислокаций.

В дальнейшем нам понадобится еще один вид метрики конической особенности. Для этого совершим преобразование координат

$$f := \alpha \hat{r}, \quad \varphi := \frac{1}{\alpha} \hat{\varphi}. \quad (3.91)$$

Тогда метрика (3.90) примет вид

$$dl^2 = \frac{1}{\alpha^2} df^2 + f^2 d\varphi^2, \quad \alpha := 1 + \theta, \quad (3.92)$$

где  $0 < f < \infty$  и  $0 < \varphi < 2\pi$ . Это – еще одна часто используемая форма метрики для конической особенности.

С качественной точки зрения создание клиновой дислокации совпадает с определением конической особенности. Однако существует количественное расхождение, поскольку метрика (3.92) зависит только от угла дефицита  $\theta$  и не может совпадать

с индуцированной метрикой (3.73), полученной в рамках теории упругости. Это расхождение связано с тем, что в теории упругости после вырезания клина и склейки берегов разреза (создания конической сингулярности) мы требуем, чтобы среда пришла в равновесие, т.е. вектор смещения в положении равновесия удовлетворял уравнениям равновесия. В то же время для конической особенности плоскость  $x, y$  после склейки может быть деформирована произвольным образом. С формальной точки зрения это проявляется в том, что индуцированная метрика (3.73), полученная в рамках теории упругости, явно зависит от коэффициента Пуассона, который отсутствует в теории гравитации.

Для решения этой проблемы в [?] была предложена упругая калибровка. Выберем упругую калибровку (3.43), как самую простую в случае клиновой дислокации. Эту задачу можно решать двумя способами. Во-первых, калибровочное условие можно подставить непосредственно в уравнения Эйнштейна. Во-вторых, можно найти решение в какой-то удобной системе координат, а затем найти такое преобразование координат, чтобы было выполнено калибровочное условие.

Поскольку точное решение для метрики известно (3.92), то проще следовать второму пути. Метрике (3.92) можно поставить в соответствие репер

$$e_r^{\hat{r}} = \frac{1}{\alpha}, \quad e_{\varphi}^{\hat{\varphi}} = f.$$

Здесь шляпка над индексом означает, что он относится к ортонормальной системе координат, а индекс без шляпки является координатным. Компоненты этого репера являются квадратными корнями из соответствующих компонент метрики и поэтому имеют симметричное линейное приближение (3.41). Поскольку клиновая дислокация инвариантна относительно вращений в плоскости  $x, y$ , то совершим преобразование радиальной координаты  $f \mapsto f(r)$ . После преобразования компоненты репера примут вид

$$e_r^{\hat{r}} = \frac{f'}{\alpha}, \quad e_{\varphi}^{\hat{\varphi}} = f, \quad (3.93)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $r$ . Репер, соответствующий евклидовой метрике в цилиндрической системе координат, выберем в виде

$$\overset{\circ}{e}_r^{\hat{r}} = 1, \quad \overset{\circ}{e}_{\varphi}^{\hat{\varphi}} = r. \quad (3.94)$$

Ему соответствуют символы Кристоффеля  $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\rho}$  и  $\text{SO}(3)$  связность  $\overset{\circ}{\omega}_{\mu i}^j$ , которые определяют ковариантную производную. Выпишем только нетривиальные компоненты:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Gamma}_{r\varphi}^{\varphi} &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{1}{r}, & \overset{\circ}{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r &= -r, \\ \overset{\circ}{\omega}_{\varphi\hat{r}}^{\hat{\varphi}} &= -\overset{\circ}{\omega}_{\varphi\hat{\varphi}}^{\hat{r}} = 1. \end{aligned}$$

Подстановка репера (3.93) в калибровочное условие (3.43) приводит к дифференциальному уравнению Эйлера на функцию перехода

$$\frac{f''}{\alpha} + \frac{f'}{\alpha r} - \frac{f}{r^2} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left( \frac{f''}{\alpha} + \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} \right) = 0. \quad (3.95)$$

Его общее решение зависит от двух постоянных  $C_{1,2}$ :

$$f = C_1 r^{\gamma_1} + C_2 r^{\gamma_2}, \quad (3.96)$$

где показатели степени  $\gamma_{1,2}$  определяются квадратным уравнением

$$\gamma^2 + 2\gamma\theta b - \alpha = 0, \quad b := \frac{\sigma}{2(1-\sigma)},$$

которое при  $\theta > -1$  имеет действительные корни разных знаков: положительный корень  $\gamma_1$  и отрицательный корень  $\gamma_2$ .

График функции  $b(\sigma)$  приведен на рис. 3.11 слева. Напомним, что на коэффициент Пуассона имеются термодинамические ограничения  $-1 \leq \sigma \leq 1/2$  [?]. Поэтому значения  $b$  ограничены отрезком  $-1/4 \leq b \leq 1/2$ .

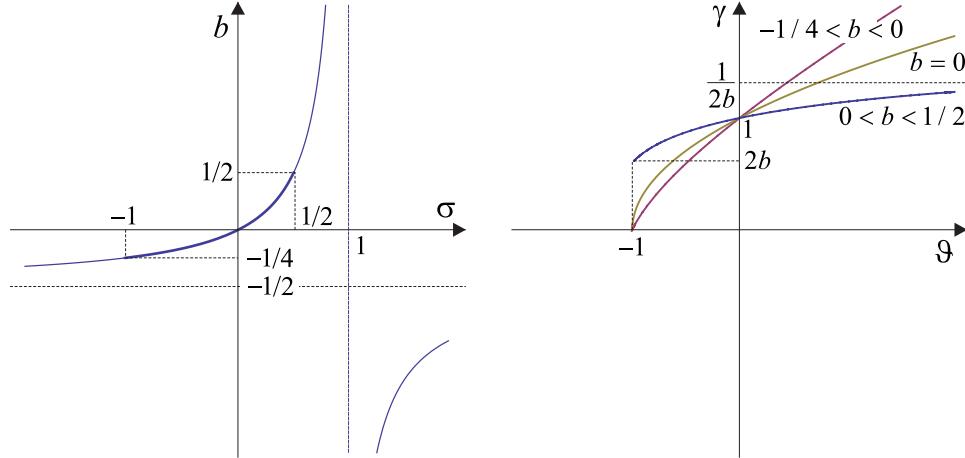


Рис. 3.11: Слева. График функции  $b(\sigma)$ . Справа. Графики функций  $\gamma(\theta)$  для отрицательных  $-1/4 < b < 0$ , нулевого  $b = 0$  и положительных значений  $0 < b < 1/2$ .

Для фиксирования постоянных интегрирования наложим граничные условия на репер

$$e_r^{\hat{r}}|_{r=a} = 1, \quad e_\varphi^{\hat{\varphi}}|_{r=0} = 0. \quad (3.97)$$

Первое граничное условие соответствует последнему граничному условию на вектор смещения (3.70) (отсутствие внешних сил на поверхности цилиндра), а второе – отсутствию угловой составляющей у тензора деформации в ядре дислокации. Уравнения (3.97) задают постоянные интегрирования

$$C_1 = \frac{\alpha}{\gamma_1 a^{\gamma_1-1}} \quad C_2 = 0. \quad (3.98)$$

Таким образом, полученный репер определяет метрику

$$dl^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^{2\gamma-2} \left(dr^2 + \frac{\alpha^2 r^2}{\gamma^2} d\varphi^2\right), \quad (3.99)$$

где мы, для простоты, отбросили у положительного корня  $\gamma_1$  индекс:

$$\gamma := -\theta b + \sqrt{\theta^2 b^2 + 1 + \theta} > 0.$$

Это и есть решение поставленной задачи. Найденное решение справедливо при всех углах дефицита  $\theta$  и всех  $0 < r < a$ . Полученная метрика зависит от трех постоянных:  $\theta$ ,  $\sigma$  и  $a$ . Зависимость от угла дефицита  $\theta$  появилась благодаря тому, что он входит в правую часть уравнений Эйнштейна (3.78). Зависимость от коэффициента Пуассона

возникла вследствие упругой калибровки (3.43), и, наконец, зависимость от радиуса цилиндра следует из граничного условия (3.97).

На рис. 3.11 справа приведены графики функций  $\gamma(\theta)$  для отрицательных  $-1/4 < b < 0$ , нулевого  $b = 0$  и положительных значений  $0 < b < 1/2$ . Для положительных значений  $b$  график функции имеет асимптоту  $\gamma = 1/(2b)$  при  $\theta \rightarrow \infty$ .

Если клиновая дислокация отсутствует, то  $\theta = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$ , и метрика (3.99) переходит в евклидову метрику  $dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ , что и следовало ожидать.

Если выполнено равенство

$$\gamma = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\theta(1 + \theta)}{1 - \sigma} = 0, \quad (3.100)$$

то метрика клиновой дислокации (3.99) примет вид

$$dl^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^{2(\alpha-1)} (dr^2 + r^2 d\varphi^2).$$

Эта метрика отличается от метрики (3.88) только на постоянный множитель, который всегда можно абсорбировать за счет растяжки радиальной координаты. Поскольку на коэффициент Пуассона существует ограничение  $-1 \leq \sigma \leq 1/2$ , то второе уравнение (3.100) имеет два решения:  $\theta = 0$  и  $\theta = -1$ . В первом случае дислокация отсутствует, а второй случай является предельным и соответствует удалению всего вещества, что также не представляет интереса.

Сравним метрику (3.99), полученную в рамках геометрического подхода, с индуцированной метрикой из теории упругости (3.73). Во-первых, она имеет более простой вид. Во-вторых, в линейном приближении по  $\theta$  справедливо равенство

$$\gamma \approx 1 + \theta \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}, \quad (3.101)$$

и метрика (3.99), как нетрудно проверить, действительно совпадает с метрикой (3.73), полученной в рамках теории упругости. Мы видим, что индуцированная метрика (3.73) является только линейным приближением для метрики, полученной в геометрической теории дефектов, которая, к тому же, имеет более простой вид. Вне рамок теории возмущений мы наблюдаем существенные различия. В частности, метрика (3.73) сингулярна в начале координат, в то время как метрика (3.99), найденная вне рамок теории возмущений, регулярна.

Тензоры напряжений и деформаций связаны между собой законом Гука (3.3). Поскольку тензор деформаций является линейным приближением для индуцированной метрики, то возникает экспериментальная возможность проверки формулы (3.99). Для этого необходимо измерить поле напряжений для одиночной клиновой дислокации. Тем самым геометрическая теория дефектов может быть экспериментально подтверждена или опровергнута.

Задача восстановления поля смещений по заданной метрике сводится к решению дифференциальных уравнений (3.6), в правую часть которых необходимо подставить метрику (3.99), с граничными условиями (3.70). На этой задаче мы останавливаться не будем. Отметим, что в геометрической теории дефектов сложный этап нахождения вектора смещений там, где он существует, просто отсутствует и не является необходимым.

### 3.8.3 Конформные отображения

Для упрощения формул все вычисления настоящего раздела проведены в конформной калибровке для двумерной части метрики. Поэтому результаты не зависят от коэффициента Пуассона.

В рамках геометрической теории дефектов можно решить задачу описания произвольного числа параллельных клиновых дислокаций с помощью теории функций комплексного переменного. Рассмотрим трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  с декартовой системой координат  $x, y, Z$ . Пусть произвольное число  $N$  параллельных клиновых дислокаций с углами дефицита  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , расположены параллельно оси  $Z$ . Введем на плоскости  $x, y$  комплексные координаты  $z := x + iy$ . Пусть дислокации пересекают плоскость  $x, y$  в точках  $z_i$ . Тогда нетривиальная двумерная часть метрики (3.86) на плоскости комплексного переменного  $z$  примет вид

$$dl^2 = dz d\bar{z} \prod_i [(z - z_i)(\bar{z} - \bar{z}_i)]^{\theta_i}, \quad (3.102)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Процесс создания клиновых дислокаций можно описать, если найти такое преобразование координат, где метрика станет евклидовой. Это преобразование является конформным отображением комплексной плоскости  $z \mapsto w(z)$ . Нетрудно проверить, что евклидова метрика

$$dl^2 = dw d\bar{w}, \quad (3.103)$$

после преобразования

$$w := u + iv = e^{i\phi} \int_{z_0}^z d\zeta \prod_i (\zeta - z_i)^{\theta_i} + C. \quad (3.104)$$

где  $z_0$  – некоторая фиксированная точка и  $\phi \in \mathbb{R}$  и  $C \in \mathbb{C}$  – произвольные числа, переходит в метрику (3.102). Контур интегрирования в (3.104) не должен пересекать и содержать петли вокруг точек  $z_i$ . При  $\theta_i > -1$  интеграл в правой части сходится. Ниже мы проанализируем этот интеграл в нескольких простых случаях.

Если все клиновые дислокации пересекают плоскость  $z$  в точках, лежащих на оси  $x$ , т.е.  $\operatorname{im} z_i = 0$ , то интеграл (3.104) хорошо известен в теории функции комплексного переменного и называется *интегралом Кристоффеля–Шварца* (см., например, [?]). Он конформно отображает верхнюю полуплоскость  $z > 0$  на многоугольник, одна вершина которого лежит в бесконечности, а остальные – в точках  $w_i$ . Каждая точка  $z_i$  отображается в вершину  $w_i$  с внутренним углом  $\pi(1 + \theta_i)$ . В общем случае, когда  $\operatorname{im} z_i \neq 0$  для некоторых дислокаций, конформное отображение (3.104) является более сложным.

Полный угол дефицита (или заряд), нормированный на  $2\pi$ , равен

$$\Theta := \sum_{i=1}^N \theta_i. \quad (3.105)$$

Из физических соображений вытекает, что  $\Theta > -1$ , потому что нельзя удалить больше вещества, чем все  $\mathbb{R}^3$ . Полный вектор Бюргерса (дипольный момент) и квадру-

польный момент, нормированные на  $2\pi$ , имеют вид

$$B := \sum_{i=1}^N \theta_i z_i, \quad (3.106)$$

$$M := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (\theta_i \theta_j - \theta_i \delta_{ij}) z_i z_j = \frac{1}{2} B^2 - \frac{1}{2} \sum_i \theta_i z_i^2. \quad (3.107)$$

В данном определении полный вектор Бюргерса и квадрупольный момент рассматриваются как комплексные числа. В следующем разделе мы определим вектор Бюргерса как вектор, который имеет такую же абсолютную величину  $|B|$ , но отличается от вектора, соединяющего начало координат с точкой  $B$  в комплексной плоскости.

Интеграл (3.104) имеет разные асимптотики при  $z \rightarrow \infty$  в зависимости от полного угла дефицита. Выпишем три первых члена разложения для возможных значений  $\Theta$ :

$$w \approx e^{i\phi} \left( \frac{1}{1+\Theta} z^{1+\Theta} - \frac{B}{\Theta} z^\Theta + \frac{M}{\Theta-1} z^{\Theta-1} \right) + C, \quad \Theta \neq 0, 1, \quad (3.108)$$

$$w \approx e^{i\phi} \left( z - B \ln z - \frac{M}{z} \right) + C, \quad \Theta = 0, \quad (3.109)$$

$$w \approx e^{i\phi} \left( \frac{1}{2} z^2 - Bz + M \ln z \right) + C, \quad \Theta = 1. \quad (3.110)$$

При  $\Theta \neq 0, 1, 2, \dots$  логарифмических слагаемых в разложении нет. В случае  $\Theta = 0$  в веществе не добавляется и не удаляется из среды. При этом логарифм появляется при векторе Бюргерса. Квадрупольное слагаемое имеет логарифмический вид для  $\Theta = 1$ . Значения  $\Theta = 2, 3, \dots$  определяют положение слагаемого с логарифмом в разложении  $w(z)$  в высших членах разложения, которые отброшены.

Разложения (3.108)–(3.110) показывают, что любая экстремаль, уходящая в бесконечность в плоскости  $z$  также уходит в бесконечность в плоскости  $w$ . В таких случаях экстремали, очевидно, являются полными. Если экстремаль не уходит в бесконечность, то она также полна, т.к. либо замкнута, либо может быть продолжена до бесконечного значения канонического параметра внутри ограниченной области (при этом предполагается, что экстремали продолжаются через коническую особенность естественным образом).

Поведение функции  $w(z)$  на больших расстояниях в основном приближении определяется первыми слагаемыми в разложениях (3.108)–(3.110). В этом случае двумерная часть метрики принимает вид

$$dl^2 = dw d\bar{w} = (z\bar{z})^\Theta dz d\bar{z},$$

что совпадает с метрикой (3.88) для отдельной клиновой дислокации, записанной в комплексных координатах. Поэтому в дальнейшем мы рассмотрим детально только дипольное и квадрупольное приближение.

Интеграл (3.104) задает конформное отображение между комплексной плоскостью  $z$  (сечение среды, содержащей произвольное число клиновых дислокаций) и плоскостью  $w$  (сечение среды с евклидовой метрикой до создания дислокаций). Плоскость  $w$  имеет разрезы, наглядно показывающие процесс создания дислокаций. Ниже мы рассмотрим несколько простейших случаев, описывающих небольшое число клиновых дислокаций.

Интеграл Кристоффеля–Шварца зависит от двух постоянных  $\phi$  и  $C$ . Для определенности, предположим, что точка  $z_1$  всегда совпадает с началом координат плоскости  $z$ , и ни одна из точек  $z_i$ ,  $i = 2, 3, \dots$ , не лежит на отрицательной части вещественной оси. Тогда постоянные  $\phi$  и  $C$  можно выбрать таким образом, чтобы образ  $w_1$  совпал с началом координат плоскости  $w$ , и отрицательная часть оси  $x$  отображалась в отрицательную часть вещественной оси  $w$ .

### Клиновая дислокация

Простейший пример отображения Кристоффеля–Шварца (3.104) дает клиновая дислокация, описанная в разделе 3.8.2. В этом случае мы имеем только одну ось дислокации, расположенную в начале координат

$$z_1 = 0, \quad \theta_1 = \theta.$$

Интеграл Кристоффеля–Шварца для клиновой дислокации явно берется

$$w = \frac{e^{-i\pi\theta}}{1 + \theta} z^{1+\theta}. \quad (3.111)$$

Соответствующее конформное отображение показано на рис. 3.12. Интеграл Кристоффеля–Шварца отображает верхнюю полуплоскость переменного  $z$  на двуугольник, одна вершина которого расположена в бесконечности, а вторая – в начале координат  $w_1 = 0$ . Внутренний угол двуугольника равен  $\pi(1 + \theta)$ . Если продолжить конформное отображение на нижнюю полуплоскость, то вся плоскость  $z$  с разрезом вдоль положительной вещественной оси отображается на плоскость  $w$ , из которой удален клин с углом дефицита  $2\pi\theta$  при  $-1 < \theta < 0$ .

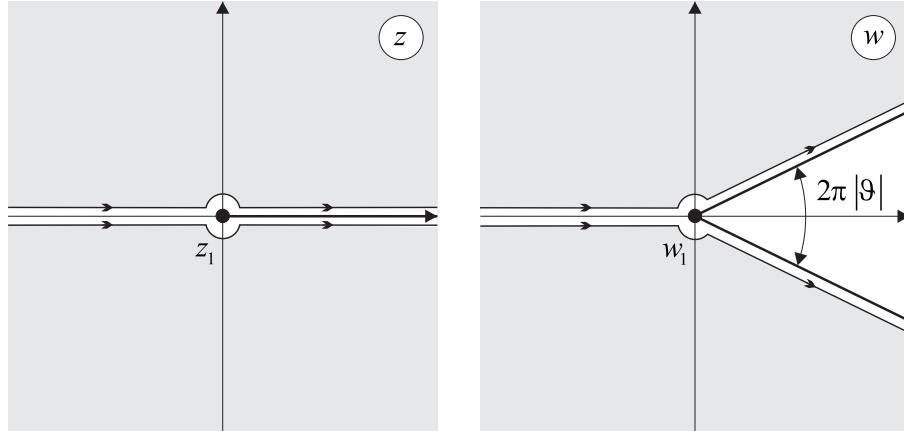


Рис. 3.12: Конформное отображение Кристоффеля–Шварца для клиновой дислокации углом дефицита  $\theta < 0$ .

Конформное отображение Кристоффеля–Шварца отображает верхнюю полуплоскость переменного  $z$  на двуугольник, одна вершина которого расположена в бесконечности, а вторая – в начале координат  $w_1 = 0$ . Внутренний угол двуугольника равен  $\pi(1 + \theta)$ . Если продолжить конформное отображение на нижнюю полуплоскость, то вся плоскость  $z$  с разрезом вдоль положительной вещественной оси отображается на плоскость  $w$ , из которой удален клин с углом дефицита  $2\pi\theta$  при  $-1 < \theta < 0$ . Этот пример конформного отображения явно следует процессу создания клиновой дислокации. Мы берем бесконечную упругую среду (плоскость  $w$ ), вырезаем клин с углом  $2\pi|\theta|$  для отрицательных  $\theta < 0$  и отождествляем точки разреза, соответствующие одной и той же точке в плоскости  $z$ . Для положительных углов дефицита  $\theta > 0$  необходимо сделать разрез в плоскости  $w$ , раздвинуть берега разреза и вставить клин вещества без упругих напряжений.

### Краевая дислокация

Диполь, состоящий из двух клиновых дислокаций с углами дефицита противоположного знака, см. раздел 3.7.3, характеризуется постоянным вектором Бюргерса  $\mathbf{B}$ , который мы определим немного позже. Для того, чтобы построить соответствующее конформное отображение, выберем следующее положение клиновых дислокаций:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, & z_2 &= h, \\ \theta_1 &= -\theta, & \theta_2 &= \theta, \end{aligned} \quad (3.112)$$

где  $\operatorname{im} h = 0$ . Для определенности положим  $0 < \theta < 1$ . Тогда интеграл Кристоффеля–Шварца (3.104) принимает вид

$$w = \int_0^z d\zeta \left( \frac{\zeta - h}{\zeta} \right)^\theta. \quad (3.113)$$

Здесь постоянные  $\phi$  и  $C$  выбраны таким образом, что  $w_1(z_1) = 0$ . Положение второй вершины в верхней полуплоскости  $w$  (см. рис. 3.13) выражается через гамма-

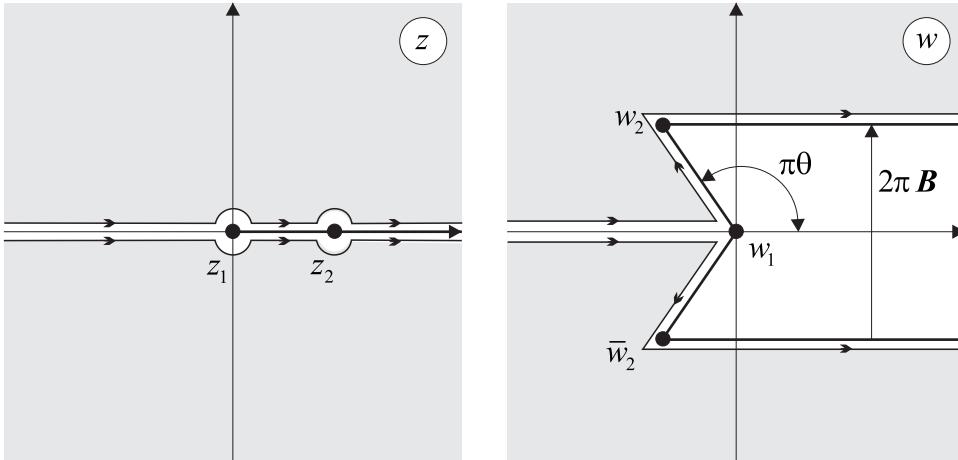


Рис. 3.13: Конформное отображение Кристоффеля–Шварца для диполя из двух клиновых дислокаций, которые представляют одну краевую дислокацию

функцию

$$w_2 = \int_0^h d\zeta \left( \frac{\zeta - h}{\zeta} \right)^\theta = h e^{i\pi\theta} \int_0^1 dx \left( \frac{1-x}{x} \right)^\theta = h e^{i\pi\theta} \Gamma(1-\theta) \Gamma(1+\theta). \quad (3.114)$$

Напомним, что гамма-функцией называется решение следующего функционального уравнения [?]

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \Gamma(1) = 1. \quad (3.115)$$

Для нее справедливо следующее интегральное представление

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}, \quad \operatorname{im} t = 0. \quad (3.116)$$

На рис. 3.13 показано конформное отображение для  $1/2 < \theta < 1$ . На плоскости  $z$  мы имеем разрез вдоль положительной части вещественной оси. Верхняя полуплоскость отображается на треугольник в верхней полуплоскости  $w$ , одна вершина

которого лежит в бесконечности. Нижняя полуплоскость  $z$  отображается симметрично на треугольник в нижней полуплоскости  $w$ . Вся же плоскость переменного  $z$  отображается на плоскость  $w$ , из которой удалена полоса, как показано на рисунке. Определим вектор Бюргерса, как вектор, соединяющий две точки  $w_-$  и  $w_+$ , которые соответствуют нижнему и верхнему берегам разреза для одной точки на плоскости  $z$ . Для краевой дислокации с  $x > z_2$  – это постоянный вектор. Длина нормированного вектора равна

$$2\pi|\mathbf{B}| := w_+ - w_- = 2\operatorname{im} w_2. \quad (3.117)$$

Это определение пригодно для произвольного распределения клиновых дислокаций. В случае краевой дислокации будем считать, что вектор Бюргерса имеет начало в точке  $w_-$  и конец – в  $w_+$ .

В общем случае разрез можно определить как ломаную, соединяющую последовательность точек  $z_1, \dots, z_N, \infty$ , включающую бесконечно удаленную точку. Конечно, соответствующий вектор Бюргерса может быть непостоянным.

Используя выражение (3.114) и свойства гамма-функций, мы получаем вектор Бюргерса для краевой дислокации:

$$2\pi|\mathbf{B}| = 2h\Gamma(1-\theta)\Gamma(1+\theta)\sin(\pi\theta) = 2\pi h\theta.$$

Этот замечательный результат показывает, что нормированный вектор Бюргерса равен произведению  $h\theta$ . Заметим, что это точный результат для диполя из двух клиновых дислокаций, и он совпадает с определением (3.106) в разложении интеграла Кристоффеля–Шварца на больших расстояниях для произвольного распределения клиновых дислокаций.

Теперь получим двумерную часть метрики краевой дислокации в конформной калибровке (3.83) на больших расстояниях  $r \gg h$ . Из уравнения (3.113) вытекает равенство дифференциалов

$$dw = \left(\frac{z-h}{z}\right)^\theta dz.$$

Поэтому метрика на больших расстояниях принимает вид

$$dl^2 = dwd\bar{w} = \left(\frac{(z-h)(\bar{z}-h)}{z\bar{z}}\right)^\theta dzd\bar{z} \approx \left(1 - \frac{2B\cos\theta}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\varphi^2), \quad (3.118)$$

где  $B = h\theta$  – модуль нормированного вектора Бюргерса, и мы учли только первую поправку. Эта метрика отличается от метрики (3.77) для краевой дислокации, полученной в рамках теории упругости, потому что записана в конформной, а не в упругой калибровке. Кроме того вектор Бюргерса в рассматриваемом случае параллелен оси  $y$ , а в предыдущем – оси  $x$ .

Сравним конформное отображение для диполя из двух клиновых дислокаций с конформным отображением (3.109) в дипольном приближении, возникающем при  $\Theta = 0$  и  $B \neq 0$ ,

$$w = z - B \operatorname{ln} z + i\pi B, \quad (3.119)$$

где, для определенности, мы зафиксировали постоянные. Элементарный анализ дает конформное отображение, показанное на рис. 3.14. Здесь верхняя полуплоскость  $z$  отображается на верхнюю полуплоскость  $w$  с горизонтальным разрезом от  $w_2$  до бесконечности, как показано на рисунке. Начало координат  $z_1 = 0$  отображается в бесконечно удаленную точку  $w_1(z_1) = \infty$ . Это конформное отображение имеет

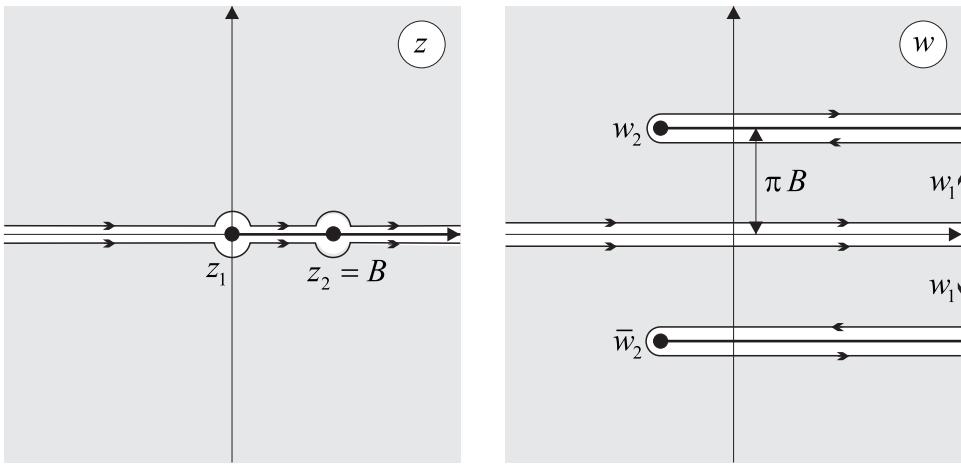


Рис. 3.14: Конформное отображение в дипольном приближении (краевая дислокация).

менее прозрачный физический смысл, зато является более универсальным, в том смысле, что не зависит от деталей распределения клиновых дислокаций на малых расстояниях.

### Квадрупольная дислокация

Чистое квадрупольное приближение можно реализовать с помощью четырех клиновых дислокаций:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, & z_2 &= h & z_3 &= l & z_4 &= l + h, \\ \theta_1 &= -\theta, & \theta_2 &= \theta, & \theta_3 &= \theta & \theta_4 &= -\theta, \end{aligned}$$

где  $h, l$  и  $\theta$  некоторые положительные постоянные. Для определенности, предположим, что  $l > h$  и  $0 < \theta < 1$ . Для такого распределения клиновых дислокаций только квадрупольный момент отличен от нуля:

$$\Theta = 0, \quad B = 0, \quad M = \theta l h.$$

Соответствующее конформное отображение задается интегралом Кристоффеля–Шварца

$$w = \int_0^z d\zeta \left[ \frac{(\zeta - h)(\zeta - l)}{\zeta(\zeta - l - h)} \right]^\theta. \quad (3.120)$$

Его нельзя вычислить в элементарных функциях, но можно проанализировать качественно. Расположение вершин многоугольника в плоскости  $w$  задается сходящимися интегралами:

$$\begin{aligned} w_2 &= h e^{i\pi\theta} \int_0^1 dx \left[ \frac{(1-x)(p-x)}{x(p+1-x)} \right]^\theta, \\ w_3 &= w_2 + (l-h) \int_0^1 dx \left[ \frac{x(1-x)}{(q+x)(q+1-x)} \right]^\theta, \\ w_4 &= w_3 + h e^{-i\pi\theta} \int_0^1 dx \left[ \frac{(1-x)(p-x)}{x(p+1-x)} \right]^\theta, \end{aligned}$$

где

$$p := \frac{l}{h} > 1, \quad q := \frac{h}{l-h} > 1.$$

При этом  $w(z_1) = 0$ . Отсюда следует, что четвертая вершина лежит на вещественной оси:  $\operatorname{im} w_4 = 0$ . Нижняя полуплоскость отображается симметрично. Соответствующее конформное отображение показано на рис. 3.15. Оно имеет ясную физическую

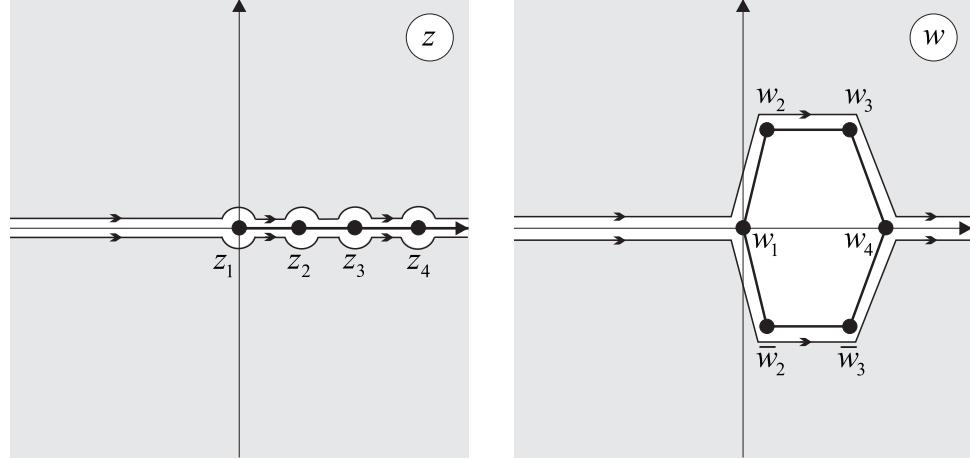


Рис. 3.15: Конформное отображение для четырех клиновых дислокаций, представляющих квадрупольную дислокацию.

интерпретацию: квадрупольная дислокация возникает после удаления шестиугольной призмы из бесконечной среды и склейки точек разреза, лежащих на одной вертикали.

В квадрупольном приближении  $\Theta = 0$ ,  $B = 0$ , и  $M \neq 0$ , и конформное отображение (3.109) для произвольного распределения клиновых дислокаций принимает вид

$$w = z - \frac{M}{z}, \quad (3.121)$$

где, для определенности, мы зафиксировали постоянные. Чтобы описать данное конформное отображение, посмотрим во что переходят окружности  $z = r e^{i\varphi}$  на плоскости  $w$ :

$$w = r e^{i\varphi} - \frac{M}{r} e^{-i\varphi} = \left( r - \frac{M}{r} \right) \cos \varphi + i \left( r + \frac{M}{r} \right) \sin \varphi, \quad r = \text{const.}$$

Перепишем данное уравнение для вещественной и мнимой части

$$\begin{aligned} u &= \left( r - \frac{M}{r} \right) \cos \varphi, \\ v &= \left( r + \frac{M}{r} \right) \sin \varphi, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{u}{a} \right)^2 + \left( \frac{v}{b} \right)^2 = 1,$$

где введены постоянные

$$a := r - \frac{M}{r}, \quad b := r + \frac{M}{r}.$$

Отсюда следует, что конформное отображение (3.121) переводит окружности в эл-

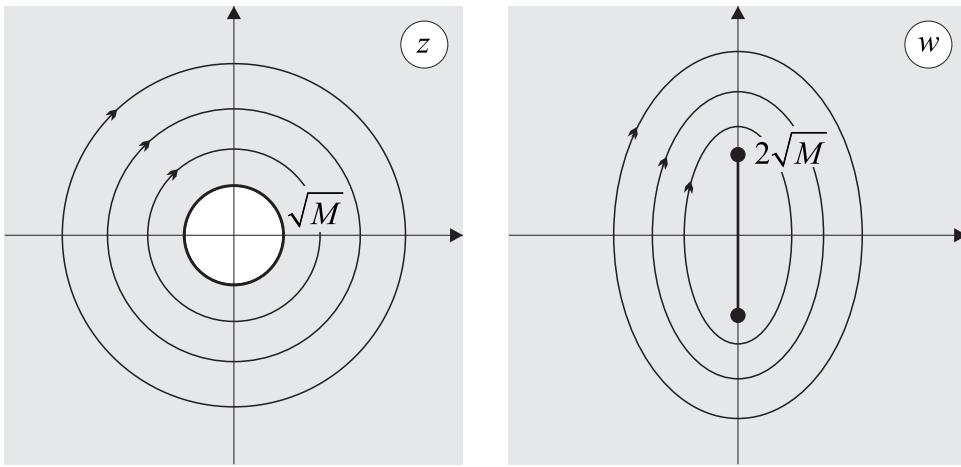


Рис. 3.16: Конформное отображение для квадрупольного приближения.

липсы, как показано на рис. 3.16. Окружности, радиус которых превышает  $\sqrt{M}$  отображаются в эллипсы с сохранением ориентации, т.е. проходятся в одну сторону, и внешняя часть комплексной плоскости  $|z| > \sqrt{M}$  отображается на всю плоскость  $w$  с разрезом вдоль мнимой оси. Внутренние окружности  $0 < |z| < \sqrt{M}$  также отображаются в эллипсы, которые тоже покрывают всю плоскость  $w$ , но ориентация при этом меняется. Мы видим, что функция (3.121) отображает всю плоскость  $z$  на Риманову поверхность, состоящую из двух экземпляров плоскости  $w$ , которые сшиты вдоль разреза. Читатель без труда может представить себе создание квадрупольной дислокации.

### 3.8.4 Непрерывное распределение линейных дислокаций

Одним из основных преимуществ геометрического подхода является возможность описания непрерывного распределения дислокаций и дисклинаций. Для простоты формул мы будем использовать не упругую калибровку, а конформную калибровку для двумерной части метрики (3.83).

#### Клиновые дислокации

В качестве первого примера рассмотрим вращательно симметричное распределение параллельных клиновых дислокаций (см. раздел 3.8.1). Предположим, что они однородно распределены внутри диска радиуса  $a$ , перпендикулярного линиям дислокаций, со следующим источником

$$T_{zz} := \frac{2\rho}{\sqrt{g^{(2)}}}, \quad (3.122)$$

где мы выписали единственную нетривиальную компоненту и

$$\rho(r) := \begin{cases} q, & r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Нормированный полный угол дефицита для такого распределения равен

$$\Theta = \frac{1}{2}qa^2.$$

Трехмерные уравнения Эйнштейна (3.78) с источником (3.122) анализируются так же, как и для параллельных клиновых дислокаций в разделе 3.8.1. В результате для конформного множителя  $\phi$  двумерной части метрики получаем единственное уравнение

$$\Delta\phi = \rho(r).$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi} \int d\vec{s} \rho(\vec{s}) \ln |\vec{s} - \vec{r}|.$$

Интеграл в правой части берется:

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{q}{2}a^2 \ln a - \frac{qa^2}{4} + \frac{qr^2}{4}, & r \leq a, \\ \frac{q}{2}a^2 \ln r, & r > a. \end{cases} \quad (3.123)$$

Вне дислокаций интервал принимает вид

$$dl^2 = r^{qa^2} (dr^2 + r^2 d\varphi^2). \quad (3.124)$$

Это значит, что рассматриваемое непрерывное распределение клиновых дислокаций снаружи имеет тот же вид, что и одна клиновая дислокация (??) с углом дефицита  $\Theta$ . Поэтому траектории фононов на больших расстояниях выглядят так же, как для одной клиновой дислокации. Этот результат трудно предугадать заранее, т.к. уравнения Эйнштейна нелинейны, и принципа суперпозиции для решений в общем случае нет. Заметим, что метрика (3.124) определяет точное решение трехмерных уравнений Эйнштейна (после добавления  $dz^2$ ).

### Краевые дислокации

В разделе 3.7.3 мы доказали, что краевая дислокация представляет собой диполь, состоящий из двух клиновых дислокаций противоположного знака. Для определенности выберем расположение дислокаций в том виде (3.112), как это было сделано при анализе конформных отображений. Тогда уравнения Эйнштейна сводятся к уравнению Пуассона для конформного множителя

$$\Delta\phi = 2\pi\theta\delta(\mathbf{r} - \mathbf{h}) - 2\pi\theta\delta(\mathbf{r}), \quad \theta > 0, \quad (3.125)$$

где мы ввели двумерный вектор  $\mathbf{h} := (h, 0)$ , и необходимо рассмотреть предел  $h \rightarrow 0$  при условии  $2\pi|\mathbf{B}| = 2\pi h\theta = \text{const}$ . Для вычисления предела преобразуем правую часть уравнения. Пусть  $f(\mathbf{r}) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  – пробная функция [?]. Тогда справедливы равенства:

$$\int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{h}) - \delta(\mathbf{r})] = f(\mathbf{h}) - f(0) \approx (\mathbf{h} \nabla f)|_{\mathbf{r}=0} = - \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) (\mathbf{h} \nabla \delta(\mathbf{r})),$$

где  $\nabla$  – двумерный градиент. Поэтому в пределе  $h \rightarrow 0$  уравнение Пуассона (3.125) принимает вид

$$\Delta\phi = -2\pi\theta(\mathbf{h} \nabla \delta(\mathbf{r})). \quad (3.126)$$

Таким образом, получено уравнение для одной краевой дислокации, расположенной в начале координат.

Если мы имеем непрерывное распределение краевых дислокаций, то после замены  $\delta$ -функции на некоторое распределение уравнение (3.126) примет вид

$$\Delta\phi = -2\pi\mathbf{\nabla}\beta, \quad (3.127)$$

где  $\beta(\mathbf{r})$  – плотность распределения краевых дислокаций. В каждой точке вектор  $\beta$  отличается от вектора Бюргерса соответствующей краевой дислокации направлением, а их модули равны. Для краевой дислокации (3.112) вектор  $\mathbf{h}$  параллелен вектору  $\partial_x$ , а вектор Бюргерса (3.117) – вектору  $\partial_y$ , т.е. они перпендикулярны.

Нетрудно проверить, что к уравнению Пуассона (3.127) приводит следующий источник в трехмерных уравнениях Эйнштейна

$$T_{zz} = -\frac{4\pi\mathbf{\nabla}\beta}{\sqrt{g^{(2)}}},$$

остальные компоненты которого равны нулю.

Рассмотрим простейший случай. Пусть задано распределение  $\beta(\mathbf{r}) := (\beta_x(\mathbf{r}), \beta_y(\mathbf{r}))$ . Предположим, что векторы Бюргерса всех краевых дислокаций направлены вдоль оси  $y$ . Тогда  $\beta_y = 0$ , и мы выберем однородное распределение краевых дислокаций внутри круга радиуса  $a$ :

$$\beta_x = \begin{cases} \beta, & r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases} \quad \beta = \text{const},$$

Для такого распределения

$$\mathbf{\nabla}\beta = -\beta \cos \varphi \delta(a - r),$$

где мы продифференцировали ступеньку по радиусу и получили  $\delta$ -функцию. Тогда решение уравнения (3.127) примет вид

$$\begin{aligned} \phi = - \int_0^\infty dr' r' \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[ -\beta \cos \varphi' \delta(a - r') \right] \frac{1}{2} \ln [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi' - \varphi)] = \\ = \begin{cases} -\pi\beta r \cos \varphi, & r \leq a, \\ -\frac{\pi\beta a^2 \cos \varphi}{r}, & r > a. \end{cases} \quad (3.128) \end{aligned}$$

На больших расстояниях от распределения дислокаций,  $r \gg a$ , пространство описывается асимптотически плоской метрикой

$$dl^2 = e^{-\frac{2\pi\beta a^2 \cos \varphi}{r}} (dr^2 + r^2 d\varphi^2) \approx \left(1 - \frac{2B \cos \varphi}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\varphi^2), \quad (3.129)$$

где

$$B := \beta\pi a^2. \quad (3.130)$$

Мы видим, что модуль полного вектора Бюргерса равен плотности  $\beta$ , умноженной на площадь круга  $\pi a^2$ , что интуитивно ясно. Метрика (3.129) совпадает с метрикой для краевой дислокации (3.118), полученной при рассмотрении конформных отображений. Таким образом, на больших расстояниях в первом приближении непрерывное распределение краевых дислокаций ведет себя так же, как одна краевая дислокация с полным вектором Бюргерса (3.130).

Принцип суперпозиции в данном случае работает только для первого члена разложения линейного элемента. Остальные поправки отличают непрерывное распределение краевых дислокаций от одной краевой дислокации. Вторая поправка легко находится в комплексных координатах. Действительно, конформный множитель (3.128) вне распределения дислокаций приводит к метрике

$$dl^2 = e^{-\frac{2B \cos \varphi}{r}} dz d\bar{z} = e^{-B\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right)} dz d\bar{z}.$$

Ее можно записать в плоском виде  $dl^2 = dw d\bar{w}$ , где

$$w := \int^z d\zeta e^{-\frac{B}{\zeta}} = \int^z d\zeta \left(1 - \frac{B}{\zeta} + \frac{B^2}{2\zeta^2} - \dots\right) \approx z - B \ln z - \frac{B^2}{2z}.$$

Это разложение дает квадрупольную поправку  $M = B^2/2$  к непрерывному распределению краевых дислокаций, что следует из разложения (3.109).

### 3.8.5 Разрезание и склеивание

Рассмотрим евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$ . Произведем произвольные разрезы, деформируем среду каким либо образом вне разрезов и затем произведем склейку, добавив или удалив часть среды в случае необходимости. В результате возникнет дефект упругой среды – одна или несколько дислокаций. Этот процесс можно описать в явном виде с помощью координатных преобразований. Если задано преобразование координат, то можно вычислить индуцированный репер и метрику, соответствующие данной дислокации. Вне разрезов тензоры кручения и кривизны данного репера (метрики) равны нулю, т.к. в этих частях среды имеются только упругие деформации, которые описывают диффеоморфизмы. Следовательно, вне разрезов уравнения равновесия (??) удовлетворены с нулевой правой частью. Они также удовлетворяются на поверхностях склейки, поскольку по предположению склейка репера производится достаточно гладко. Таким образом, источники дислокаций в правой части уравнений равновесия могут возникнуть только на краях разрезов: на линиях (линейные дислокации) и в точках (точечные дислокации). Поскольку размерность носителей источников меньше трех, то они должны иметь  $\delta$ -образный характер.

Это верно для отдельных дислокаций или их конечного числа. Для непрерывного распределения дислокаций нетривиальная правая часть уравнений равновесия может возникнуть на поверхностях или в объеме.

Ниже с помощью координатных преобразований мы опишем пример создания комбинированной клиновой и винтовой дислокации без анализа особенности на линии дислокации.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  с декартовой  $X, Y, Z$  и цилиндрической  $R, \Phi, Z$  системами координат. Евклидова метрика имеет вид

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = dR^2 + R^2 d\Phi^2 + dZ^2. \quad (3.131)$$

Совершим преобразование координат  $R, \Phi, Z \mapsto f, \varphi, z$ , заданное следующими формулами:

$$\begin{aligned} R &:= \frac{f}{\alpha}, \\ \Phi &:= \alpha\varphi, \\ Z &:= z - c\varphi, \quad \alpha > 0, \quad c = \text{const}, \end{aligned} \quad (3.132)$$

где радиальная координата обозначена буквой  $f$ , имея в виду дальнейшее преобразование координат  $f \mapsto r = r(f)$ . В новых координатах евклидова метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha^2} df^2 + (f^2 + c^2) d\varphi^2 + dz^2 - 2c d\varphi dz. \quad (3.133)$$

Эта метрика описывает дислокацию и, по предположению, определена во всем евклидовом пространстве за исключением оси  $z$ :

$$0 < f < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty. \quad (3.134)$$

Данной области определения конечных координат отвечает следующая область определения исходных координат в евклидовом пространстве:

$$0 < R < \infty, \quad 0 < \Phi < 2\pi\alpha, \quad -\infty < z < \infty. \quad (3.135)$$

Обратим внимание на область определения угловой координаты. При  $0 < \alpha < 1$  областью (3.135) является не все, а только часть евклидова пространства. Если  $\alpha > 1$ , то область определения выходит за пределы евклидова пространства.

Теперь можно описать процесс склейки. У нас есть отображение

$$y = (R, \Phi, Z) \mapsto x = (f, \phi, z).$$

В исходном пространстве, точки которого обозначены координатами  $y$ , мы отождествляем те точки среды, которые отображаются в одну точку  $x$  многообразия с дислокациями. В рассматриваемом случае – это точки, лежащие на полуплоскостях  $\Phi = 0$  и  $\Phi = 2\pi\alpha$ , что следует из области определения (3.135). Следовательно, в исходном евклидовом пространстве мы делаем разрез по полуплоскости  $X, Z$ , край которой совпадает с осью  $Z$ , раздвигаем берега разреза на угол  $2\pi\theta$  при  $\theta > 0$ , где  $\alpha := 1 + \theta$ , вставляем в образовавшуюся полость клин того же вещества. Кроме того перед склейкой точки нижнего берега разреза сдвигаются параллельно вдоль оси  $Z$  на вектор Бюргерса  $b := 2\pi c$ , что следует из формул преобразования координат (3.132). Описанный процесс создания комбинированной клиновой и винтовой дислокации показан на рис. 3.17.

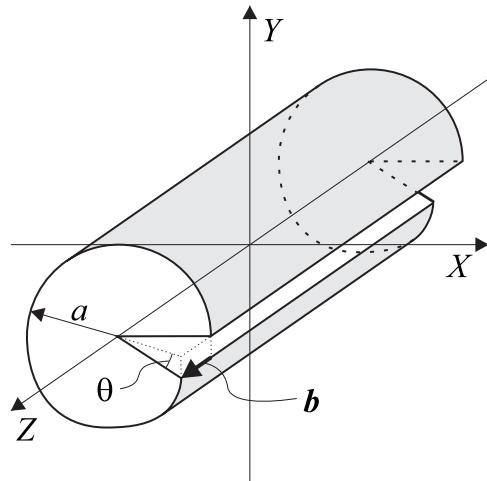


Рис. 3.17: Комбинированная клиновая и винтовая дислокация с углом дефицита  $\theta$  и вектором Бюргерса  $\mathbf{b}$ .

Таким образом, при  $c = 0$  метрика (3.133) описывает клиновую дислокацию, а при  $\alpha = 1$  – винтовую (3.62). Строго говоря, полный вектор Бюргерса для комбинированной дислокации будет переменным. У него есть постоянная компонента  $b := 2\pi c$  вдоль оси  $z$ , соответствующая винтовой дислокации, и переменная компонента  $-2\pi\theta r$ , при  $\theta \ll 1$ , которая соответствует клиновой дислокации.

Мы построили метрику, описывающую комбинированную клиновую и винтовую дислокацию, с помощью процедуры разрезания и склеивания. Для того, чтобы учесть теорию упругости, необходимо переписать полученную метрику в упругой калибровке, рассмотренной в разделе 3.5. Метрике (3.133) поставим в соответствие репер

$$e_\mu^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & f & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.136)$$

для которого линейное приближение по вектору смещения имеет вид (3.41). Теперь сделаем замену радиальной координаты  $f \mapsto r$  так, чтобы удовлетворить упругой калибровке. После подстановки репера (3.136) в калибровочное условие (3.43) для функции  $f(r)$  возникает уравнение Эйлера (3.95) такое же, что и для клиновой дислокации. Его решение при граничных условиях (3.97) имеет тот же вид

$$f = \frac{\alpha}{\gamma a^{\gamma-1}} r^\gamma, \quad (3.137)$$

где

$$\gamma := -\theta\hat{b} + \sqrt{\theta^2\hat{b}^2 + 1 + \theta}, \quad \hat{b} := \frac{\sigma}{2(1-\sigma)},$$

где постоянную  $\hat{b}$  мы пометили шляпкой, чтобы отличать ее от модуля вектора Бюргерса. В итоге получаем метрику в упругой калибровке

$$ds^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^{2\gamma-2} dr^2 + \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{2\gamma-2} \frac{\alpha^2 r^2}{\gamma^2} + c^2\right] d\varphi^2 + dz^2 - 2c d\varphi dz, \quad (3.138)$$

которая описывает комбинированную клиновую и винтовую дислокацию.

Комбинированную клиновую и винтовую дислокацию нетрудно описать в рамках теории упругости. Фактически, все вычисления уже проделаны в разделах 3.7.1 и 3.7.2, где были по отдельности рассмотрены винтовая и клиновая дислокации. Чтобы найти векторное поле смещений в рассматриваемом случае, достаточно просто сложить смещения для клиновой и винтовой дислокаций, т.к. мы рассматриваем линейную теорию упругости.

Напомним, что смещения для клиновой дислокации равны (3.71)

$$u_{\hat{r}}^{\text{wedge}} = -\theta \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} r \ln \frac{r}{ea}, \quad u_{\hat{\varphi}}^{\text{wedge}} = -\theta r \varphi, \quad u_{\hat{z}}^{\text{wedge}} = 0. \quad (3.139)$$

где мы удержали только линейные по  $\theta$  слагаемые, которых достаточно в линейном приближении.

Для винтовой дислокации смещения имеют вид (3.60)

$$u_{\hat{r}}^{\text{screw}} = 0, \quad u_{\hat{\varphi}}^{\text{screw}} = 0, \quad u_{\hat{z}}^{\text{screw}} = c\varphi = \frac{b}{2\pi}\varphi.$$

Полное векторное поле смещений равно сумме

$$u = u^{\text{wedge}} + u^{\text{screw}}$$

и приводит к индуцированной метрике

$$ds^2 = \left(1 + \theta \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma} \ln \frac{r}{a}\right) dr^2 + \left[r^2 \left(1 + \theta \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma} \ln \frac{r}{a} + \theta \frac{1}{1 - \sigma}\right) + c^2\right] d\varphi^2 + dz^2 - 2c d\varphi dz, \quad (3.140)$$

где мы, опять же, удержали только линейные по  $\theta$  слагаемые.

Метрика для комбинированной клиновой и винтовой дислокации (3.140) применима только для малых углов дефицита,  $\theta \ll 1$ , и вблизи края цилиндра,  $r \sim a$ , где малы относительные смещения. Точная метрика (3.138), полученная в рамках геометрической теории дефектов, имеет более простой вид, применима для всех углов дефицита  $\theta > -1$  и для всех значений радиуса  $0 < r < a$ . Нетрудно проверить, что в линейном приближении по  $\theta$  точная метрика воспроизводит метрику (3.140), полученную в рамках теории упругости. Вычисления здесь аналогичны тем, которые были описаны для клиновой дислокации в разделе 3.8.2. Это говорит о преимуществе геометрического подхода.

### 3.9 Рассеяние фононов на клиновых дислокациях

Фононами в твердом теле называются частицы, возникающие при вторичном квантовании волновых уравнений для упругих колебаний. Поэтому, строго говоря, задача о рассеянии фононов на дислокациях является квантовомеханической. Ниже мы рассмотрим только классические аспекты этой задачи.

Волновое уравнение для функции  $w(t, x)$  в среде со статическим распределением дислокаций имеет вид

$$g^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta w = 0, \quad (3.141)$$

где  $g^{\alpha\beta}$  – метрика, обратная к метрике

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -g_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (3.142)$$

и  $\tilde{\nabla}$  – ковариантная производная. Выше мы обозначаем четырехмерные координаты греческими буквами из начала алфавита  $\{x^\alpha\} := \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ , а буквами из середины греческого алфавита – только пространственные координаты  $\{x^\mu\} := \{x^1, x^2, x^3\}$ . По четырехмерной метрике (3.142) можно вычислить символы Кристоффеля (??), которые определяют систему нелинейных обыкновенных уравнений для экстремалей  $x^\alpha(\tau)$  (линий экстремальной длины, которые в римановой геометрии совпадают с геодезическими, см. раздел ??). Для метрики блоочно диагонального вида (3.142) эти уравнения расщепляются:

$$\ddot{x}^0 = 0, \quad (3.143)$$

$$\ddot{x}^\mu = -\tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho, \quad (3.144)$$

где точки обозначают дифференцирование по каноническому параметру и  $\tilde{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu$  – трехмерные символы Кристоффеля, построенные по трехмерной метрике  $g_{\mu\nu}$ , которая, напомним, для статического распределения дефектов зависит только от пространственных координат. Пусть  $\{x^\alpha(\tau)\}$  – произвольная экстремаль в четырехмерном пространстве-времени. Тогда для метрики (3.142) ее естественная проекция на пространство  $\{x^\alpha(\tau)\} \mapsto \{0, x^\mu(\tau)\}$  также является экстремалью, но уже для пространственной части метрики  $g_{\mu\nu}$ .

Уравнения для экстремалей (3.143), (3.144) инвариантны относительно линейных преобразований канонического параметра  $\tau$ . Поэтому из уравнения (3.143) следует, что, не ограничивая общности, канонический параметр можно отождествить с временем:  $\tau = ct = x^0$ , где  $c$  – скорость распространения колебаний.

При анализе асимптотик решений волнового уравнения (3.141) полезны представления о фронтах волны и лучах, как это делается в геометрической оптике [?]. Мы не будем останавливаться на математических аспектах этого подхода, который нетривиален и сложен [?], и дадим лишь физическое описание. В эйкональном (высокочастотном) приближении (см. раздел ??) фононы распространяются вдоль лучей, совпадающих с нулевыми экстремалами для четырехмерной метрики  $g_{\alpha\beta}$ . Форма лучей, которые мы отождествляем с траекториями фононов, определяется трехмерной метрикой  $g_{\mu\nu}$ . Это значит, что в эйкональном приближении траектории поперечных и продольных фононов (см. раздел 3.11) в среде с дефектами одинаковы и определяются уравнениями (3.144). Отличие сводится к тому, что скорости распространения поперечных и продольных фононов различны и равны соответственно  $c_t$  и  $c_L$ .

Заметим, что экстремали  $x(t)$  являются бихарактеристиками к волновому уравнению (3.141) (см. раздел ??).

Другой подход к анализу экстремалей основан на принципе наименьшего действия. В разделе ?? было показано, что уравнения (3.144) следуют из лагранжиана

$$L = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \quad (3.145)$$

который равен кинетической энергии точечной частицы с единичной массой, движущейся по риманову многообразию. Конечно, при этом мы отождествили канонический параметр с временной координатой. Мы видим, что и фононы, и точечные частицы движутся вдоль одних и тех же траекторий. Разница сводится только к скорости движения. Хотя член с потенциальной энергией в лагранжиане (3.145) отсутствует, движение частиц нетривиально, т.к. метрика явно зависит от точки многообразия. Уравнение (3.144) представляет собой второй закон Ньютона, в котором сила квадратична по скорости. В связи с этим движение фононов в присутствии дислокаций сильно отличается от ньютона движения частиц в потенциальном поле. Например, в дальнейшем мы покажем наличие нового типа замкнутых траекторий.

В случаях, когда симметрий задачи недостаточно для нахождения достаточного числа интегралов движения, на помощь приходит уравнение Гамильтона–Якоби (см. раздел ??). Лагранжиан (3.145) приводит к гамильтониану

$$H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu,$$

где  $g^{\mu\nu}$  – обратная метрика и  $p_\mu := \partial L / \partial \dot{x}^\mu$  – канонический импульс. Тогда уравнение Гамильтона–Якоби для функции действия  $S(x, t)$  принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0. \quad (3.146)$$

Для укороченной функции действия (см. раздел ??)

$$W(x) := S(x, t) + Et, \quad E = \text{const},$$

уравнение Гамильтона–Якоби упрощается

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial W}{\partial x^\mu}\frac{\partial W}{\partial x^\nu} = E. \quad (3.147)$$

Здесь  $E$  обозначает полную (в рассматриваемом случае кинетическую) энергию фона. Это уравнение решено в разделе 3.9.3 для произвольного распределения  $N$  параллельных клиновых дислокаций.

### 3.9.1 Рассеяние на одной клиновой дислокации

При наличии одной клиновой дислокации метрика пространства в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(\frac{r}{a}\right)^{2\gamma-2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha^2 r^2}{\gamma^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{2\gamma-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.148)$$

где нетривиальная часть метрики в плоскости  $r, \varphi$  была получена ранее (3.99). Обратная метрика также является блочно диагональной

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma^2}{\alpha^2 r^2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Символы Кристоффеля для метрики (3.148) вычисляются по формулам (??). В результате получаем, что только четыре символа Кристоффеля отличны от нуля:

$$\tilde{\Gamma}_{rr}^r = \frac{\gamma - 1}{r}, \quad \tilde{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r = -\frac{\alpha^2 r}{\gamma}, \quad \tilde{\Gamma}_{r\varphi}^\varphi = \tilde{\Gamma}_{\varphi r}^\varphi = \frac{\gamma}{r}.$$

В эйкональном приближении фононы распространяются вдоль экстремалей  $x^\mu(t)$  (здесь мы положили скорость фононов равной единице,  $c = 1$ ), определяемых уравнениями (3.144). В рассматриваемом случае эти уравнения принимают вид

$$\ddot{r} = -\frac{\gamma - 1}{r} \dot{r}^2 + \frac{\alpha^2}{\gamma} r \dot{\varphi}^2, \quad (3.149)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2\gamma}{r} \dot{r} \dot{\varphi}, \quad (3.150)$$

$$\ddot{z} = 0, \quad (3.151)$$

где точка обозначает дифференцирование по времени  $t$ . Из последнего уравнения следует, что фононы двигаются вдоль оси  $z$  с постоянной скоростью, что соответствует трансляционной инвариантности метрики вдоль  $z$ . Это значит, что рассеяние фононов на клиновой дислокации, как и следовало ожидать, сводится к двумерной задаче в плоскости  $r, \varphi$ .

Систему уравнений для  $r(t)$  и  $\varphi(t)$  (3.149) и (3.150) можно явно проинтегрировать. С этой целью найдем два первых интеграла. Во-первых, для любой метрики уравнения для экстремалей имеют интеграл

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \text{const.}$$

Отсюда следует равенство

$$r^{2\gamma-2} \dot{r}^2 + \frac{\alpha^2}{\gamma^2} r^{2\gamma} \dot{\varphi}^2 = C_0 = \text{const} > 0. \quad (3.152)$$

Во-вторых, инвариантность метрики относительно вращений вокруг оси  $z$  приводит к существованию дополнительного интеграла. Он строится следующим образом. Инвариантности метрики соответствует вектор Киллинга, который в цилиндрических координатах имеет простой вид  $K = \partial_\varphi$ . Непосредственной проверкой можно доказать, что

$$g_{\mu\nu} K^\mu \dot{x}^\nu = \text{const.}$$

В рассматриваемом случае это приводит к закону сохранения

$$r^{2\gamma} \dot{\varphi} = C_1 = \text{const.} \quad (3.153)$$

Исследуем форму экстремалей  $r = r(\varphi)$ . Из уравнений (3.152), (3.153) можно найти первые производные

$$\dot{r} = \pm r^{-2\gamma+1} \sqrt{C_0 r^{2\gamma} - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} C_1^2}, \quad (3.154)$$

$$\dot{\varphi} = C_1 r^{-2\gamma}. \quad (3.155)$$

Допустимые значения радиальной координаты  $r$ , при которых подкоренное выражение неотрицательно, будут найдены позже. Отсюда следует уравнение, определяющее форму нерадиальных ( $C_1 \neq 0$ ) экстремалей,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \pm r \sqrt{\frac{C_0}{C_1^2} r^{2\gamma} - \frac{\alpha^2}{\gamma^2}}. \quad (3.156)$$

Это уравнение легко интегрируется, и в результате получаем явную формулу для экстремалей:

$$\left( \frac{r}{r_m} \right)^{2\gamma} \sin^2 [\alpha(\varphi + \varphi_0)] = 1, \quad (3.157)$$

где

$$r_m := \left( \frac{C_1 \alpha}{\sqrt{C_0} \gamma} \right)^{1/\gamma} = \text{const} > 0, \quad \varphi_0 = \text{const}.$$

Постоянная  $r_m$  положительна и определяет минимальное расстояние, на которое экстремаль подходит к ядру дислокации, т.е.  $r \geq r_m$ . Только при этих значениях  $r$  подкоренное выражение в (3.156) неотрицательно. Постоянная интегрирования  $\varphi_0$  произвольна и соответствует инвариантности задачи относительно вращений вокруг оси дислокации.

Уравнения для экстремалей (3.149), (3.150) имеют также вырожденные решения

$$\frac{1}{\gamma} r^\gamma = \pm \sqrt{C_0} (t + t_0), \quad \varphi = \text{const}, \quad t_0 = \text{const}, \quad (3.158)$$

которые соответствуют радиальному движению фононов. Такие траектории неустойчивы в том смысле, что вблизи них нет нерадиальных экстремалей.

Отметим, что экстремали в виде окружности ( $r = \text{const}$ ) отсутствуют как следствие уравнения (3.149), хотя интегралы движения (3.152), (3.153) и допускают такое решение. Это связано с тем, что при получении первого интеграла (3.152) уравнение (3.149) умножается на  $\dot{r}$ .

Проанализируем форму нерадиальных экстремалей (3.157). Для каждой экстремали радиус  $r$  сначала убывает от бесконечности до минимального значения  $r_m$ , а

затем возрастает от  $r_m$  до бесконечности. При этом, не ограничивая общности, можно считать, что аргумент синуса в (3.157) меняется 0 до  $\pi$ . Это следует из того, что в среде до создания дислокаций экстремалами являются прямые линии. Таким образом, получаем область изменения полярного угла

$$0 \leq \varphi + \varphi_0 \leq \frac{\pi}{\alpha}. \quad (3.159)$$

Это значит, что экстремаль приходит из бесконечности под углом  $-\varphi_0$  и уходит на бесконечность под углом  $\pi/\alpha - \varphi_0$ . Это соответствует углу рассеяния

$$\chi := \pi - \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi\theta}{1 + \theta}. \quad (3.160)$$

Отметим, что угол рассеяния фононов зависит только от угла дефицита  $\theta$  и не зависит от упругих свойств среды. Угол рассеяния имеет простую физическую интерпретацию. Для положительных  $\theta$  среда разрезается и раздвигается. В образовавшуюся полость вставляется клин из той же среды без упругих напряжений. Затем происходит склейка и клин сжимается. Коэффициент сжатия среды для каждой окружности с центром в начале координат из соображений симметрии равен  $1/(1 + \theta)$ . Поэтому угол рассеяния равен половине угла дефицита, умноженному на коэффициент сжатия:

$$\chi = \frac{2\pi\theta}{2} \times \frac{1}{1 + \theta}.$$

При  $\theta = 0$  дислокация отсутствует и угол рассеяния, как и следовало ожидать, равен нулю.

При положительных углах дефицита угол рассеяния положителен, что соответствует отталкиванию фононов от клиновой дислокации. Соответствующие экстремали показаны на рис. 3.18a, и они имеют асимптоты при  $r \rightarrow \infty$ . Отметим, что

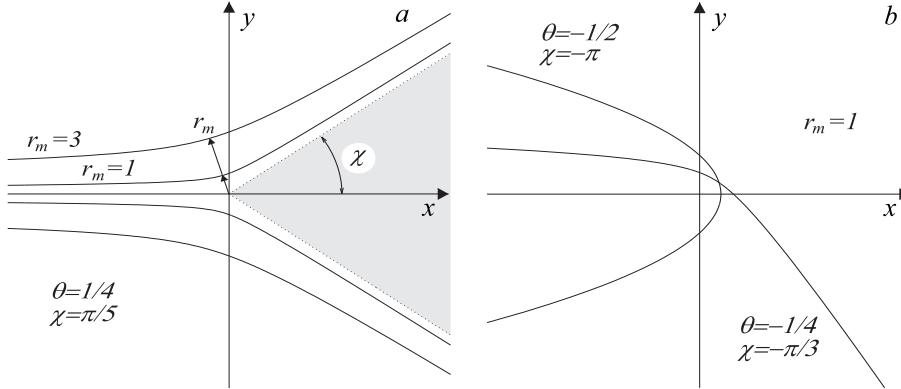


Рис. 3.18: (a) Экстремали для клиновой дислокации с положительным ( $\theta > 0$ ) углом дефицита. Показаны две экстремали и их отражение относительно оси  $x$  для одного значения  $\theta > 0$ , но разных  $r_m$ . (b) Экстремали для клиновой дислокации с отрицательным  $-1/2 \leq \theta < 0$  углом дефицита. Показаны две экстремали для одинаковых значений  $r_m$ , но разных углах дефицита  $\theta < 0$ .

при положительных углах дефицита не каждые две точки плоскости  $r, \varphi$  можно соединить экстремалью, т.е. справа от клиновой дислокации имеется зона, в которую фононы, падающие слева не попадают вовсе (она показана темным).

Все экстремали на рисунках в данном разделе построены численно. Значения угла дефицита  $\theta$ , угла рассеяния  $\chi$  и минимального расстояния до оси дислокации

$r_m$  указаны на рисунках. Для определенности мы выбрали  $\varphi_0 = \pi$ , что соответствует падению фононов слева.

При отрицательных углах дефицита угол рассеяния отрицателен и определяется той же формулой (3.160). Это соответствует притяжению фононов к оси дислокации. На рис. 3.18b показаны две экстремали с одинаковым параметром  $r_m$ , но для двух дислокаций с разными углами дефицита. При  $-1/2 < \theta < 0$  угол рассеяния меняется в пределах от 0 до  $-\pi$  (см. рис. 3.18b). При  $\theta = -1/2$  угол рассеяния равен  $-\pi$ , т.е. фонон возвращается, сделав один облет оси дислокации. Отметим, что при отрицательных углах дефицита фононы не имеют асимптот при  $r \rightarrow \infty$ , т.е. при  $\theta = -1/2$  фононы падают из бесконечности  $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty$  и возвращаются в бесконечность  $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$ .

Если угол дефицита достаточно мал ( $-1 < \theta < -1/2$ ) то фонон делает один или несколько оборотов вокруг дислокации, а затем уходит в бесконечность. Примеры таких траекторий показаны на рисунках 3.19–3.21.

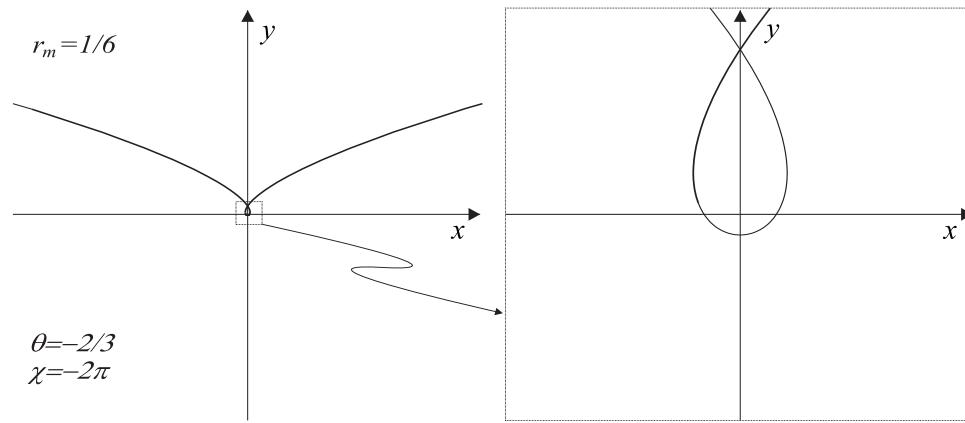


Рис. 3.19: При  $\theta = -2/3$  экстремаль делает один оборот вокруг дислокации, а затем идет вперед в первоначальном направлении. Справа показана увеличенная часть траектории из квадрата вблизи оси дислокации.

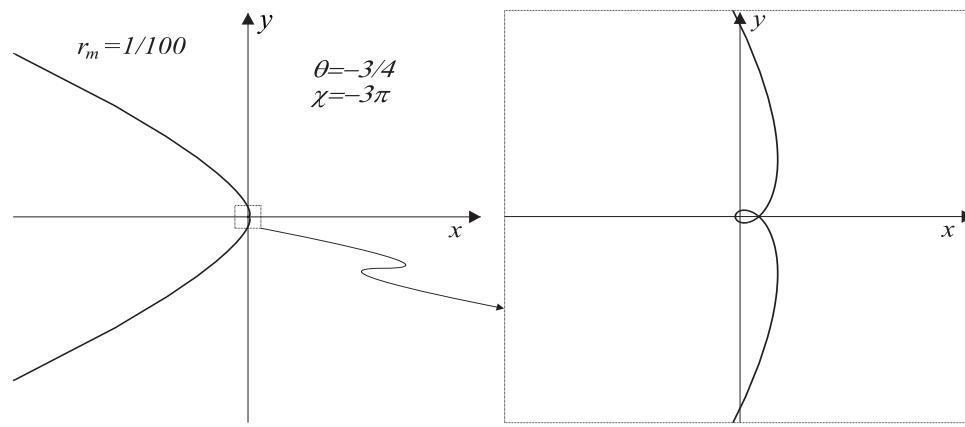


Рис. 3.20: При  $\theta = -3/4$  экстремаль делает полтора оборота вокруг дислокации, а затем возвращается назад. Справа показана увеличенная часть траектории из квадрата вблизи оси дислокации.

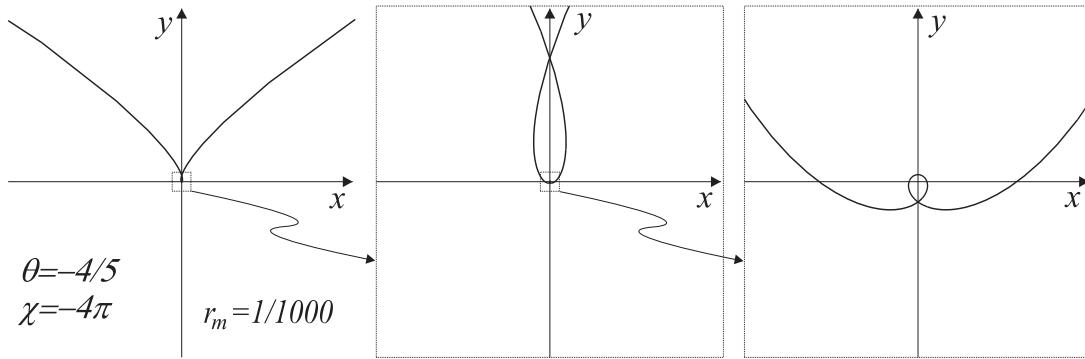


Рис. 3.21: При  $\theta = -4/5$  экстремаль делает два оборота вокруг дислокации, а затем идет вперед в первоначальном направлении. Справа показана последовательно увеличенная часть траектории из двух квадратов вблизи оси дислокации.

Рассмотрим асимптотику нерадиальных экстремалей при  $r \rightarrow \infty$ . В соответствии с уравнением (3.154) вдали от ядра дислокации

$$\dot{r} \approx \pm \sqrt{C_0} r^{-\gamma+1} \quad \Rightarrow \quad r \sim t^{1/\gamma}.$$

Отсюда следует, что зависимость радиуса от времени такая же, как и для радиальных экстремалей (3.158). Поскольку  $\gamma > 0$ , то бесконечное значение  $r$  соответствует бесконечному значению времени  $t$ . Это значит что плоскость  $r, \varphi$  с заданной метрикой (3.148) полна при  $r \rightarrow \infty$ . Начало координат (ось дислокации) является сингулярной точкой (коническая особенность). В нее попадают только радиальные экстремали при конечном значении времени.

Интегралы движения (3.152), (3.153) имеют простой физический смысл. Уравнения для экстремалей (3.144) следуют из вариационного принципа для лагранжиана (3.145), описывающего движение свободной безмассовой точечной частицы по риманову многообразию в нетривиальной метрикой  $g_{\mu\nu}(x)$ . При этом метрика рассматривается как заданное внешнее поле, по которому варьирование не проводится.

Энергия, соответствующая лагранжиану (3.145), равна

$$E = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^{2\gamma-2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left( \frac{r}{a} \right)^{2\gamma-2} r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \dot{z}^2.$$

Если метрика, как в нашем случае, не зависит от времени явно, то энергия сохраняется ( $E = \text{const}$ ) и для движения в плоскости  $r, \varphi$  ее численное значение пропорционально интегралу движения  $C_0$ .

Для клиновой дислокации метрика не зависит от полярного угла  $\varphi$ , и лагранжиан инвариантен относительно вращений:  $\varphi \mapsto \varphi + \text{const}$ . Согласно первой теореме Нетер (см. раздел ??) этой инвариантности соответствует сохранение углового момента

$$J = -\frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left( \frac{r}{a} \right)^{2\gamma-2} r^2 \dot{\varphi} = \text{const}.$$

Отсюда следует, что постоянная интегрирования  $C_1$  пропорциональна угловому моменту.

Отметим, что поведение экстремалей качественно отличается от траекторий точечных частиц, двигающихся в плоском пространстве с евклидовой метрикой  $\delta_{\mu\nu}$  во

внешнем потенциальном поле  $U(x)$ . Нетрудно доказать, что траектории точечных частиц, описываемых лагранжианом

$$L = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - U$$

не могут совпадать с экстремалями (3.144) ни для какой функции  $U(x)$ .

### 3.9.2 Космические струны и множественные образы

Метрика для клиновой дислокации с отрицательным углом дефицита,  $\theta < 0$ , совпадает с пространственной частью метрики космической струны [?]. Интересно отметить, что метрика космической струны была найдена совершенно другим путем, как решение четырехмерных уравнений Эйнштейна в линейном приближении. Тем не менее метрика, по существу, одна и та же, и, следовательно, экстремали, найденные в предыдущем разделе, описывают также распространение световых лучей в пространстве-времени при наличии космической струны. Хорошо известным следствием наличия космической струны является возникновение двойного изображения звезды, находящейся за космической струной, см. рис. 3.22 слева. В настоящем

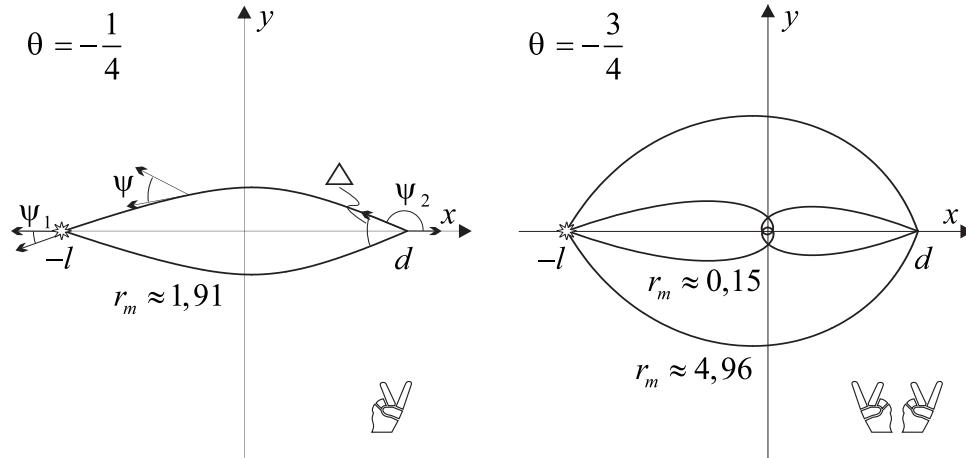


Рис. 3.22: Двойной образ звезды, находящейся за космической струной с небольшим, по модулю, углом дефицита (слева). Если угол дефицита близок к  $-2\pi$ , тогда звезда может иметь произвольное четное число образов. Справа показана ситуация, когда звезда имеет четыре образа, два из которых созданы лучами света, делающими один полный оборот вокруг космической струны.

разделе получена общая формула для углового разделения образов. Первоначально угловое разделение образов было получено для малых углов в системе координат, где экстремали являются прямыми линиями (т.е. до того, как создана дислокация). Мы получим общую формулу справедливую для всех значений углов и в системе координат, связанной с дислокацией.

Предположим, что звезда, струна и наблюдатель находятся на одной прямой (оси абсцисс  $x$ ). Пусть струна находится в начале координат, а звезда и наблюдатель находятся на расстояниях  $l$  и  $d$  от струны соответственно, как показано на рис. 3.22. Обозначим полярные координаты на плоскости  $x, y$  через  $r, \varphi$ . Угол  $\psi$  между касательным вектором к лучу света и радиальным направлением определяется следующим равенством

$$\operatorname{tg} \psi = r \frac{d\varphi}{dr}, \quad (3.161)$$

что ясно из рисунка. Правую часть равенства можно вычислить, используя уравнение (3.157) для формы экстремали, которое перепишем в виде

$$\Phi := \left( \frac{r}{r_m} \right)^{2\gamma} \sin^2 [\alpha(\varphi + \varphi_0)] - 1 = 0. \quad (3.162)$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, получим выражение для производной

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\partial\Phi/\partial\varphi}{\partial\Phi/\partial r} = -\frac{\alpha}{\gamma} r \frac{\cos [\alpha(\varphi + \varphi_0)]}{\sin [\alpha(\varphi + \varphi_0)]}$$

Теперь равенство (3.161) примет вид

$$\operatorname{tg} \psi = -\frac{\gamma}{\alpha} \operatorname{tg} [\alpha(\varphi + \varphi_0)]. \quad (3.163)$$

В дальнейшем полученное соотношение будет использовано для определения углового разделения образов звезды для наблюдателя.

Уравнение экстремали (3.162) зависит от двух параметров:  $r_m$  и  $\varphi_0$ . Эти параметры можно выразить через расстояния  $l$  от звезды до космической струны и  $d$  от космической струны до наблюдателя. Для заданной экстремали положения звезды и наблюдателя определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \left( \frac{l}{r_m} \right)^{2\gamma} \sin^2 \phi_1 &= 1, \\ \left( \frac{d}{r_m} \right)^{2\gamma} \sin^2 \phi_2 &= 1, \end{aligned} \quad (3.164)$$

где введены обозначения

$$\phi_1 := \alpha(\pi + 2\pi m + \phi_0), \quad \phi_2 := \alpha\phi_0. \quad (3.165)$$

Выше целое число  $m = 0, 1, 2, \dots$  обозначает число оборотов, которое совершают луч света вокруг космической струны по пути от звезды до наблюдателя. Разность углов  $\phi_1$  и  $\phi_2$  должна быть меньше  $\pi$ , т.к. в противном случае звезда и наблюдатель пересекались бы разными ветвями экстремали. Это следует из формулы (3.159). Поэтому неравенство

$$\alpha\pi(1 + 2m) < \pi \quad (3.166)$$

ограничивает максимальное число обходов луча света вокруг космической струны. Формулы (3.164) неявно выражают постоянные  $r_m$  и  $\varphi_0$  через  $l$  и  $d$ .

Угловое разделение образов равно  $\Delta := 2(\pi - \psi_2)$ , что ясно из рис. 3.22 слева. Поэтому из формулы (3.163) вытекает равенство

$$\operatorname{tg} \left( \pi - \frac{\Delta}{2} \right) = -\frac{\gamma}{\alpha} \operatorname{tg} \phi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \phi_2 = \frac{\alpha}{\gamma} \operatorname{tg} \frac{\Delta}{2}. \quad (3.167)$$

Из равенств (3.164) следует уравнение

$$d^\gamma |\sin \phi_2| = l^\gamma |\sin [\phi_2 + \alpha\pi(1 + 2m)]|, \quad (3.168)$$

где угол  $\phi_2$  связан с угловым разделением образов  $\Delta$  равенством (3.167). Таким образом, мы получили общую неявную формулу, которая позволяет определить угловое

разделение образов звезды по параметрам космической струны  $\gamma$  и  $\alpha$ , а также расстояниям  $l$  и  $d$ .

Для малых отрицательных углов дефицита,  $-\theta \ll 1$ , справедливы равенства:

$$\alpha := 1 + \theta, \quad \gamma \approx 1 + \theta \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)},$$

где мы воспользовались формулой (3.101). Из неравенства (3.166) следует  $m = 0$ , т.е. наблюдатель видит только два образа звезды: один сверху, а другой снизу космической струны. В дальнейшем мы увидим, что при этом угловое разделение мало и имеет порядок  $\Delta \sim \theta$ . Поэтому из равенства (3.167) следует, что угол  $\phi_2 \sim \theta$ , а для постоянных  $\alpha$  и  $\gamma$  можно использовать нулевой приближение  $\alpha \approx \gamma \approx 1$ . Таким образом, для малых углов дефицита уравнение (3.168) принимает вид

$$d \sin \frac{\Delta}{2} = -l \sin \left( \frac{\Delta}{2} + \pi\theta \right).$$

Поскольку  $\Delta$  и  $\theta$  имеют один порядок малости, то отсюда вытекает выражение для углового разделения образов звезды при малых углах дефицита космической струны

$$\Delta = \frac{l}{d + l} 2\pi |\theta|. \quad (3.169)$$

Это – хорошо известная формула [?]. Совпадение ответов является нетривиальным результатом, т.к. угловые разделения получены в разных системах координат. В разделе 3.8.3 было показано, что эти системы координат связаны конформным преобразованием, которое сохраняет углы.

Отметим, что в линейном приближении угловое разделение образов (3.169) не зависит от упругих свойств пространства.

В общем случае, если угол дефицита достаточно мал, то наблюдатель видит только два образа звезды. Допустим, что угол дефицита близок к  $-2\pi$ . Тогда неравенство (3.166) будет выполнено для всех  $m = 0, 1, \dots, M$ , где  $M$  – некоторое максимальное значение. Поэтому наблюдатель будет видеть  $2(1 + M)$  образов звезды: два образа, созданные лучами света, которые не делают ни одного оборота, два образа для лучей света, делающими один оборот и т.д. На рис. 3.22 справа показана звезда с четырьмя образами для  $\theta = -3/4$ . Для такого угла дефицита каждая экстремаль делает один полный оборот вокруг космической струны перед тем, как уйти в бесконечность. Однако две экстремали достигают наблюдателя до того, как сделают оборот. Они характеризуются большим значением параметра  $r_m$ .

### 3.9.3 Общий подход к анализу параллельных клиновых дислокаций

Прямое интегрирование уравнений для экстремалей для метрики (3.102) представляет значительные трудности, потому что в плоскости  $x, y$  нет вектора Киллинга. Тем не менее описать рассеяние фононов можно для асимптотических форм метрики.

В общем случае интеграл (3.104) задает решение уравнения Гамильтона–Якоби для экстремалей (3.146)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0, \quad (3.170)$$

где

$$S := \sqrt{2E} \sqrt{(w - c)(\bar{w} - \bar{c})} - Et, \quad c := a + ib = \text{const},$$

и  $E$  – энергия частицы (фона). Для евклидовой метрики (3.103) экстремалями являются прямые линии,

$$(u - a) \sin \gamma = (v - b) \cos \gamma, \quad (3.171)$$

или

$$(w - c) e^{-i\gamma} = (\bar{w} - \bar{c}) e^{i\gamma}, \quad (3.172)$$

проходящие через точку  $(a, b)$  под углом  $\gamma$ . Для того, чтобы найти траекторию фона в исходной декартовой системе координат, уравнение (3.171) надо просто переписать в системе координат  $x, y$ . В общем случае это сделать нельзя, т.к. интеграл (3.104) не берется. Однако можно проанализировать асимптотику траекторий на больших расстояниях (задача рассеяния)  $|z| \gg |z_1|$ . Ниже мы проанализируем рассеяние фононов для дипольного и квадрупольного приближения.

### Дипольное приближение

Рассмотрим произвольное распределение клиновых дислокаций. Если полный угол дефицита равен нулю,  $\Theta = 0$ , а полный вектор Бюргерса отличен от нуля,  $B \neq 0$ , тогда поведение экстремалей на больших расстояниях определяется дипольным слагаемым в разложении (3.109). Двумерный интервал в плоскости  $z$ , соответствующий конформному отображению (3.119), в полярных координатах  $r, \varphi$  имеет вид

$$dl^2 = \left(1 - B \frac{2 \cos \varphi}{r}\right) (dr^2 + r^2 d\varphi^2) \quad (3.173)$$

и является асимптотически плоским. Экстремали (3.171) определяются равенством

$$r \sin(\varphi - \gamma) + B(\ln r \sin \gamma + \varphi \cos \gamma) - a \sin \gamma + b \cos \gamma = 0, \quad (3.174)$$

где координаты  $w = (u, v)$  выражены через  $z = (r, \varphi)$  с помощью равенства (3.119). В дипольном приближении рассеяние определяется вектором Бюргерса, и, следовательно, траектории фононов зависят от угла, под которым они уходят в бесконечность. Мы рассмотрим два случая. При  $\gamma = 0$  траектории на больших расстояниях перпендикулярны вектору Бюргерса. В этом случае уравнение (3.174) сводится к равенству

$$\frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \frac{y + b}{B},$$

и экстремали параметризуются одной постоянной  $b$ . На рис. 3.23 экстремали показаны для  $b = 0$  и  $b > 0$ . Экстремали для отрицательных  $b < 0$  получаются их тех, что изображены на рисунке справа, отражением  $y \mapsto -y$ . Экстремали имеют горизонтальные асимптоты на бесконечности, которые сдвинуты на вектор Бюргерса  $\pi B$ ,  $B > 0$ . Таким образом, рассеяние сводится к сдвигу траекторий фононов на вектор Бюргерса и задержки по времени. Отметим наличие возвращающихся траекторий для фононов, падающих справа. Если фононы падают слева, то рассеяние назад отсутствует. Это значит, что дислокация невидима для фононов, падающих слева и перпендикулярно вектору Бюргерса.

Экстремали, параллельные вектору Бюргерса в бесконечности, имеют другое поведение и показаны на рис. 3.24. Они соответствуют значению  $\gamma = \pi/2$  и определены уравнением

$$x^2 + y^2 = \exp \left(2 \frac{x + a}{B}\right). \quad (3.175)$$

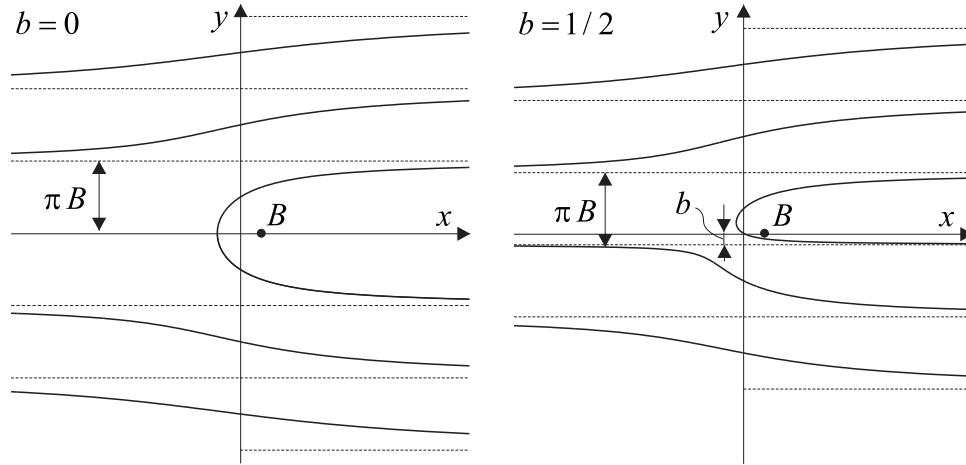


Рис. 3.23: Экстремали для краевой дислокации с  $b = 0$  и  $b = 1/2$ , которые перпендикулярны вектору Бюргерса на бесконечности. Для всех  $b \neq 0$  возвращающиеся экстремали проходят через линию дислокации.

В этом случае экстремали параметризуются одной произвольной постоянной  $a$ . На бесконечности экстремали не имеют асимптот, и поэтому удаленный наблюдатель может почувствовать наличие дислокации, т.к. экстремали не являются прямыми линиями. Рассеяние фононов также сопровождается задержкой по времени. Для  $a = a_0$ , где

$$a_0 := B \ln B,$$

экстремаль имеет точку самопересечения, расположенную в точке  $(B, 0)$  комплексной плоскости  $z$ . Если  $a > a_0$ , то экстремали имеют по одной ветви. При  $a < a_0$  решение уравнения (3.175) содержит две ветви. Одна ветвь начинается и заканчивается в бесконечности, а другая является замкнутой и окружает линию дислокации. На самом деле эта ветвь может не быть замкнутой, если скорость фонона вдоль оси  $x^3$  отлична от нуля. В таком случае она будет представлять собой спираль.

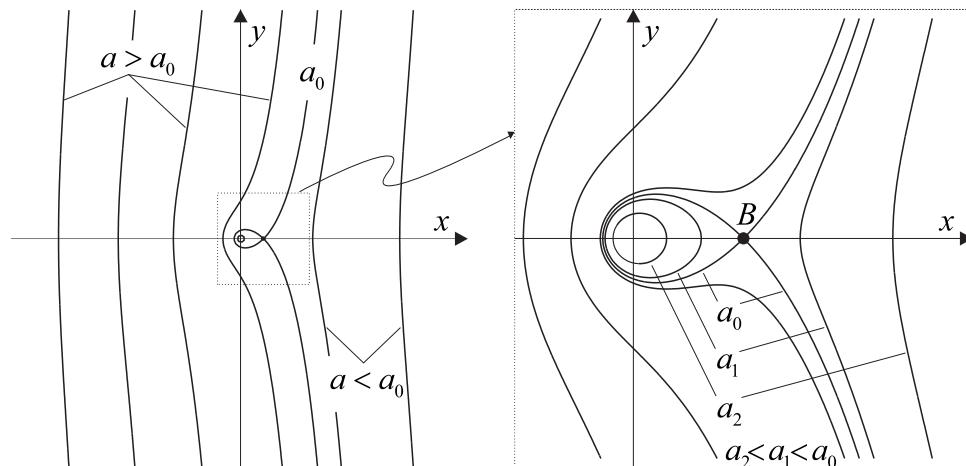


Рис. 3.24: Экстремали для краевой дислокации, которые параллельны вектору Бюргерса на бесконечности. Справа показана увеличенная центральная часть. Для  $a < a_0$  экстремали имеют по две ветви.

Напомним, что экстремали построены для дипольного приближения, и поэтому можно ожидать качественного согласия только вдали от ядра дислокации.

### Квадрупольное приближение

В квадрупольном приближении  $\Theta = 0$ ,  $B = 0$ ,  $M \neq 0$ , и конформное отображение (3.109) на больших расстояниях принимает вид

$$w = z - \frac{M}{z}. \quad (3.176)$$

Без потери общности положим  $\operatorname{im} M = 0$  и предположим, что  $M > 0$ . Для отрицательных значений  $M$  всю картину рассеяния нужно повернуть на угол  $\pi$ . Двумерная часть метрики для конформного отображения (3.176) в полярных координатах  $r, \varphi$  равна

$$dl^2 = \left(1 + 2M \frac{\cos(2\varphi)}{r^2}\right) (dr^2 + r^2 d\varphi^2). \quad (3.177)$$

Она стремится к евклидовой метрике на бесконечности  $r \rightarrow \infty$  быстрее, чем в дипольном приближении. В квадрупольном приближении уравнение для экстремалей (3.171) сводится к равенству

$$r \sin(\varphi - \gamma) + \frac{M}{r} \sin(\varphi + \gamma) - a \sin \gamma + b \cos \gamma = 0. \quad (3.178)$$

В бесконечности это уравнение определяет прямые линии, и поэтому все экстремали имеют асимптоты.

Рассмотрим два случая. Экстремали, параллельные оси  $x$  на бесконечности, соответствуют значению  $\gamma = 0$  и определяются уравнением

$$x^2 + y^2 = -\frac{My}{y + b}, \quad (3.179)$$

где  $b \neq 0$  – произвольный параметр. Для отрицательных значений  $b < 0$  все экстремали расположены в верхней полуплоскости и показаны на рис. 3.25 слева. Экстремали для положительных  $b > 0$  получаются из экстремалей для  $b < 0$  путем отражения  $y \mapsto -y$ . Для  $-2\sqrt{M} < b < 0$  экстремаль имеет только одну ветвь, идущую от  $x = -\infty$  до  $x = +\infty$  и касающуюся оси  $x$  в начале координат. Если  $b = -2\sqrt{M}$ , то экстремаль имеет точку самопересечения, расположенную в точке  $x = 0, y = \sqrt{M}$ . При  $b < -2\sqrt{M}$  экстремаль имеет две ветви. Одна бесконечная ветвь идет от  $x = -\infty$  до  $x = +\infty$  и не касается оси абсцисс. Вторая ветвь является замкнутой и проходит через начало координат. Все бесконечные экстремали имеют одинаковые асимптоты  $y = -b$  слева и справа при  $x \rightarrow \pm\infty$ , и все рассеяние сводится только к задержке во времени.

Экстремали, параллельные оси ординат  $y$  в бесконечности, соответствуют значению  $\gamma = \pi/2$  и определяются уравнением.

$$x^2 + y^2 = \frac{Mx}{x - a}.$$

Оно отличается от уравнения (3.179) знаком правой части и заменой  $x \leftrightarrow y$ . Здесь постоянная  $M$  также предполагается положительной. Для  $a = 0$  экстремаль представляет собой окружность радиуса  $\sqrt{M}$ . Для положительных значений  $a > 0$  экстремали показаны на рис. 3.25 справа. Экстремали для отрицательных  $a < 0$  получаются отражением  $x \mapsto -x$ . Каждая экстремаль имеет две ветви. Одна ветвь является бесконечной и идет от  $y = -\infty$  до  $y = +\infty$  с одинаковой асимптотикой  $x = a$ . Вторая ветвь замкнута, лежит внутри окружности на другой полуплоскости и проходит через начало координат. В этом случае рассеяние также сводится только к задержке во времени.

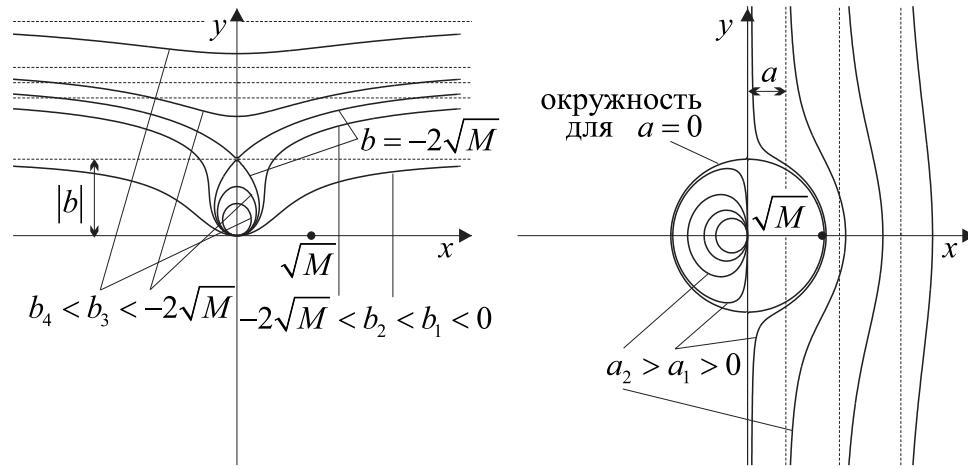


Рис. 3.25: Экстремали для квадрупольного приближения. Слева показаны экстремали, параллельные оси абсцисс  $x$ , а справа – параллельные оси ординат  $y$  в бесконечности. Каждая экстремаль при  $b < -2\sqrt{M}$  имеет две ветви.

## 3.10 Цилиндрическая дислокация

В настоящем разделе мы рассмотрим новый тип дислокаций – цилиндрические, у которых  $\delta$ -образная особенность сосредоточена на поверхности цилиндра. Этот вид дислокаций интересен тем, что индуцированная метрика, полученная в рамках теории упругости, в частности совпадает с метрикой в геометрической теории дефектов, где она является точным решением уравнений Эйнштейна. Кроме того, будет показано, что цилиндрическая дислокация может иметь физические приложения, т.к. представляет собой континуальную модель двустенных нанотрубок.

### 3.10.1 Цилиндрическая дислокация в теории упругости

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  (бесконечную однородную и изотропную упругую среду или эфир в общей теории относительности) с декартовой системой координат  $x^i, y^i, i = 1, 2, 3$ . Евклидова метрика, как всегда, обозначена через  $\delta_{ij} := \text{diag}(+++)$ . Основной переменной в теории упругости является векторное поле смещений  $u^i(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , которое характеризует смещение точек среды (3.1). В отсутствии внешних сил законы Ньютона (3.2) и Гука (3.3) сводятся к системе уравнений второго порядка (3.5) с некоторыми граничными условиями, которые определяются рассматриваемой задачей.

Поставим задачу для цилиндрической дислокации, показанной на рис. 3.26a. Эта дислокация возникает в результате следующей процедуры. Мы вырезаем толстую трубку вещества между двумя параллельными цилиндрами радиусов  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ), осью которых является ось  $z := x^3$ , сдвигаем цилиндры симметрично друг к другу и затем склеиваем их. После установления равновесия поверхность склейки также представляет собой цилиндр радиуса  $r_*$ , который необходимо найти, благодаря вращательной и трансляционной симметрии.

По нашему соглашению рис. 3.26a изображает отрицательную цилиндрическую дислокацию, т.к. часть вещества удалена,  $r_1 < r_2$ . Эту процедуру можно инвертировать, добавив часть вещества к  $\mathbb{R}^3$  как показано на рис. 3.26b. В этом случае цилиндрическая дислокация будет положительной,  $r_1 > r_2$ .

Описание цилиндрической дислокации в рамках теории упругости естественно

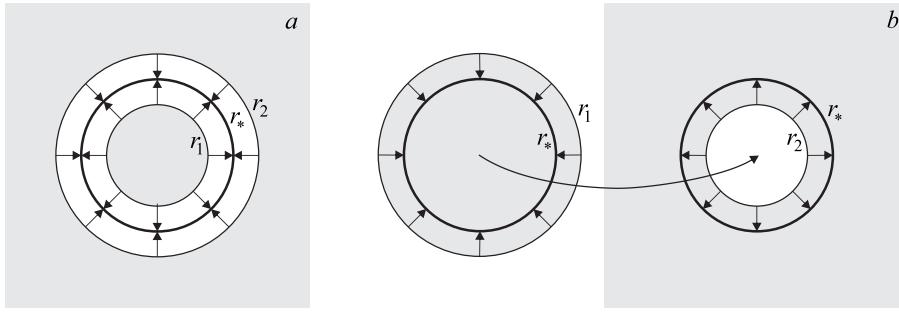


Рис. 3.26: Отрицательная (a) и положительная (b) цилиндрические дислокации.

проводить в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Обозначим компоненты поля смещений относительно ортонормального базиса через  $u^{\hat{r}}, u^{\hat{\varphi}}$  и  $u^{\hat{z}}$ . В рассматриваемом случае две компоненты равны нулю,  $u^{\hat{\varphi}} = 0, u^{\hat{z}} = 0$ , благодаря симметрии задачи, а радиальная компонента зависит только от радиуса  $u^{\hat{r}}(r)$ . Для простоты индекс этой компоненты писать не будем,  $u^{\hat{r}}(r) = u(r)$ .

Границные условия для цилиндрической дислокации имеют вид

$$u|_{r=0} = 0, \quad u|_{r=\infty} = 0, \quad \left. \frac{du_{\text{in}}}{dr} \right|_{r=r_*} = \left. \frac{du_{\text{ex}}}{dr} \right|_{r=r_*}. \quad (3.180)$$

Первые два условия являются геометрическими, а третье означает равенство упругих сил на поверхности склейки. Буквы “in” и “ex” обозначают векторное поле смещений соответственно на внутренней (internal) и внешней (external) частях среды.

Кроме этого граничные условия необходимо дополнить условием сплошности среды

$$r_1 + u_{\text{in}}(r_*) = r_2 + u_{\text{ex}}(r_*) \Leftrightarrow l := r_2 - r_1 = u_{\text{in}}(r_*) - u_{\text{ex}}(r_*), \quad (3.181)$$

где  $l$  – расстояние между исходными цилиндрами (толщина удаленного вещества).

В рассматриваемом случае уравнения теории упругости (3.5) легко решаются. Лапласиан от радиальной компоненты (только он отличен от нуля) и дивергенция в цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta u_{\hat{r}} &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u_{\hat{r}}) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi}^2 u_{\hat{r}} + \partial_z^2 u_{\hat{r}} - \frac{1}{r^2} u_{\hat{r}} - \frac{2}{r^2} \partial_{\varphi} u_{\hat{\varphi}}, \\ \partial_i u^i &= \frac{1}{r} \partial_r (r u_{\hat{r}}) + \frac{1}{r} \partial_{\varphi} u_{\hat{\varphi}} + \partial_z u_{\hat{z}}, \end{aligned}$$

где индексы опущены с помощью евклидовой метрики:  $u_{\hat{r}} = u^{\hat{r}}, u_{\hat{\varphi}} = u^{\hat{\varphi}}$  и  $u_{\hat{z}} = u^{\hat{z}}$ . Угловая  $\varphi$  и  $z$  компоненты уравнений (3.5) тождественно удовлетворяются, а радиальная компонента сводится к уравнению

$$\partial_r \left[ \frac{1}{r} \partial_r (r u) \right] = 0, \quad (3.182)$$

которое имеет общее решение

$$u = ar - \frac{b}{r}, \quad a, b = \text{const},$$

зависящее от двух постоянных интегрирования  $a$  и  $b$ . Из первых двух граничных условий (3.180) вытекает, что решения внутри и снаружи поверхности склейки равны

$$\begin{aligned} u_{\text{in}} &= ar, \quad a > 0, \\ u_{\text{ex}} &= -\frac{b}{r}, \quad b > 0. \end{aligned} \quad (3.183)$$

Знаки постоянных интегрирования соответствуют отрицательной цилиндрической дислокации, изображенной на рис. 3.26a. Для положительной цилиндрической дислокации, рис. 3.26b, постоянные имеют противоположные знаки:  $a < 0$  и  $b < 0$ . Третье граничное условие (3.180) определяет радиус цилиндра, вдоль которого проходит склейка,

$$r_*^2 = \frac{b}{a}. \quad (3.184)$$

После простых алгебраических вычислений с учетом условия сплошности (3.181) постоянные интегрирования можно выразить через радиусы:

$$a = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} = \frac{l}{2r_*}, \quad b = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4} = \frac{lr_*}{2}, \quad (3.185)$$

где

$$l = r_2 - r_1, \quad r_* = \frac{r_2 + r_1}{2}$$

– толщина удаленной трубы вещества и радиус поверхности склеивания. Первое выражение (3.185) накладывает ограничение на область значений постоянной интегрирования  $0 < |a| < 1$ , т.к.  $r_1 > 0$  и  $r_2 > 0$ . Для отрицательной и положительной цилиндрической дислокации соответственно  $l > 0$  и  $l < 0$ . Мы видим, что поверхность склейки находится в точности посередине радиусов  $r_1$  и  $r_2$ . Итак, уравнение (3.183) с постоянными интегрирования (3.185) дает полное решение для цилиндрической дислокации в рамках линейной теории упругости. Мы ожидаем, что оно справедливо при малых относительных деформациях:  $l/r_1 \ll 1$ ,  $l/r_2 \ll 1$ .

Отметим, что результат, полученный в рамках теории упругости, не зависит от коэффициента Пуассона. В этом смысле цилиндрическая дислокация является чисто геометрическим дефектом, который не зависит от упругих свойств среды.

Теперь вычислим геометрические характеристики риманова многообразия, соответствующего цилиндрическому дефекту. С геометрической точки зрения упругие деформации (3.1) представляют собой диффеоморфизм областей евклидова пространства. Исходная среда описывается декартовыми координатами  $y^i$  и евклидовой метрикой  $\delta_{ij}$ . Возврат отображения  $x \mapsto y$  индуцирует нетривиальную метрику на евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , соответствующем цилиндрической дислокации. В декартовых координатах она имеет вид

$$g_{ij}(x) = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \delta_{kl}.$$

Мы используем криволинейные цилиндрические координаты и поэтому изменим обозначения. Обозначим индексы относительно криволинейной системы координат греческими буквами  $x^\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ . Тогда индуцированная метрика для цилиндрической дислокации равна

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu} \delta_{\rho\sigma} \quad (3.186)$$

где  $\overset{\circ}{g}_{\rho\sigma}$  – евклидова метрика, записанная в цилиндрических координатах. Обозначим цилиндрические координаты точки среды до того как была создана дислокация через  $\{y, \varphi, z\}$ , где буква  $y$  без индекса обозначает радиальную координату. Поскольку при создании дислокации координаты  $\varphi$  и  $z$  фиксированной точки среды не меняются, то диффеоморфизм описывается одной функцией от радиуса:  $y = r - u(r)$ , где

$$u(r) := \begin{cases} ar, & r < r_*, \\ -\frac{b}{r}, & r > r_*. \end{cases} \quad (3.187)$$

Эта функция имеет скачок  $ar_* + b/r_* = l$  при переходе через разрез и поэтому не является непрерывной. В связи с этим при вычислении геометрических объектов необходимо проявлять осторожность. С этой целью введем функцию

$$v(r) := \begin{cases} a, & r \leq r_*, \\ \frac{b}{r^2}, & r \geq r_*, \end{cases} \quad (3.188)$$

которая непрерывна на поверхности склейки. Графики функций  $u$  и  $v$  приведены на рис. 3.27

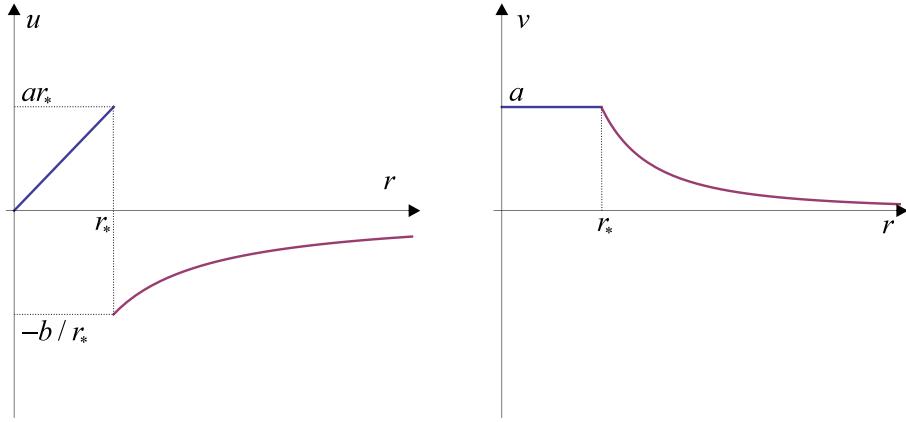


Рис. 3.27: Графики функций  $u$  и  $v$ . Функция  $u$  имеет скачок  $l$  на поверхности склейки при  $r_*$ , а функция  $v$  непрерывна, но имеет скачок производной.

Функция  $v$  отличается от производной по радиусу  $r$  от векторного поля смещений  $u(r)$ , определенного равенством (3.187), на  $\delta$ -функцию:

$$u' = v - l\delta(r - r_*). \quad (3.189)$$

Индуцированная метрика вне поверхности склейки задана выражением (3.186) и неопределена на поверхности склейки. Поэтому мы определяем метрику цилиндрической дислокации следующим образом

$$ds^2 := (1 - v)^2 dr^2 + (r - u)^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (3.190)$$

Ей соответствует элемент объема

$$\sqrt{g} = (1 - v)(r - u), \quad \text{где} \quad g := \det g_{\mu\nu}.$$

Метрика (3.190) отличается от формальной подстановки  $y = r - u(r)$  в евклидову метрику  $ds^2 = dy^2 + y^2 d\varphi^2 + dz^2$  на квадрат  $\delta$ -функции в  $g_{rr}$  компоненте. Эта

процедура необходима в геометрической теории дефектов, т.к. в противном случае вектор Бюргерса нельзя выразить через поверхностный интеграл (см. раздел 3.2). Таким образом, радиальная компонента метрики  $g_{rr}(r) = (1 - v)^2$  цилиндрической дислокации является непрерывной функцией, а угловая компонента  $g_{\varphi\varphi} = (r - u)^2$  имеет скачок на поверхности склейки.

Итак, мы решили уравнения линейной теории упругости (3.5) с граничными условиями (3.180), (3.181), которые описывают цилиндрическую дислокацию. Вектор смещения (3.187) и, следовательно, индуцированная метрика (3.190) не зависят от упругих свойств среды (коэффициента Пуассона). Это демонстрирует универсальный характер цилиндрических дислокаций.

Теперь вычислим геометрические характеристики цилиндрической дислокации. Компоненты метрики являются недифференцируемыми функциями, и, следовательно, вычисления, включающие дифференцирование и умножение в общем случае не определены. Поэтому мы проведем вычисления таким образом как будто все компоненты метрики являются достаточно гладкими функциями, а затем убедимся, что все неопределенные слагаемые в конечном ответе благополучно сокращаются. Это означает, что какую бы регуляризацию мы не выбрали, конечный ответ от нее не зависит.

Сначала вычислим символы Кристоффеля. Только четыре их компоненты отличны от нуля:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{rrr} &= -v'(1 - v), \\ \tilde{\Gamma}_{r\varphi\varphi} &= \tilde{\Gamma}_{\varphi r\varphi} = [1 - v + l\delta(r - r_*)](r - u), \\ \tilde{\Gamma}_{\varphi\varphi r} &= -[1 - v + l\delta(r - r_*)](r - u),\end{aligned}$$

где использовано соотношение (3.189). Отличные от нуля компоненты символов Кристоффеля с одним верхним индексом имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{rr}^r &= -\frac{v'}{1 - v}, \\ \tilde{\Gamma}_{r\varphi}^\varphi &= \tilde{\Gamma}_{\varphi r}^\varphi = \frac{1 - v + l\delta(r - r_*)}{r - u}, \\ \tilde{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{[1 - v + l\delta(r - r_*)](r - u)}{(1 - v)^2}.\end{aligned}$$

Заметим, что если бы мы не отбросили  $\delta$ -функцию в  $g_{rr}$  компоненте метрики (3.190), то на нее пришлось бы делить, что является неопределенной операцией.

Из компонент тензора кривизны только одна отлична от нуля

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{r\varphi r\varphi} &= \partial_r \tilde{\Gamma}_{\varphi r\varphi} + \tilde{\Gamma}_{rr}^r \tilde{\Gamma}_{\varphi\varphi r} - \tilde{\Gamma}_{\varphi r}^\varphi \tilde{\Gamma}_{r\varphi\varphi} = \\ &= l(r - u) \left[ \delta'(r - r_*) + \frac{v'}{1 - v} \delta(r - r_*) \right],\end{aligned}\tag{3.191}$$

где

$$\delta'(r - r_*) := \partial_r \delta(r - r_*)$$

— производная  $\delta$ -функции. Неопределенные слагаемые с квадратами  $\delta^2(r - r_*)$  в тензоре кривизны благополучно сократились. Нетривиальная компонента тензора кривизны (3.191) все еще остается неопределенной, потому что коэффициент при  $\delta'$  и  $\delta$ -функции имеет разрыв. Мы видим, что тензор кривизны (3.191) равен нулю всюду

за исключением поверхности склейки, как и должно быть и с математической, и с физической точек зрения (3.191).

Еще раз отметим важное обстоятельство. Предписание отбросить  $\delta$ -функцию из  $g_{rr}$  компоненты метрики для цилиндрической дислокации (3.190), которое было продиктовано физическими соображениями (равенство сил на обоих берегах разреза), определяет правильный путь проведения математических вычислений.

У тензора Риччи две нетривиальных компоненты:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{rr} &= \frac{l}{r-u} \left[ \delta'(r-r_*) + \frac{v'}{1-v} \delta(r-r_*) \right], \\ \tilde{R}_{\varphi\varphi} &= \frac{l(r-u)}{(1-v)^2} \left[ \delta'(r-r_*) + \frac{v'}{1-v} \delta(r-r_*) \right].\end{aligned}$$

Скалярная кривизна равна

$$\tilde{R} = \frac{2l}{(r-u)(1-v)^2} \left[ \delta'(r-r_*) + \frac{v'}{1-v} \delta(r-r_*) \right].$$

Уравнения Эйнштейна,

$$\sqrt{g} \left( \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} \right) = -\frac{1}{2} T_{\mu\nu}, \quad (3.192)$$

тождественно удовлетворяются за исключением  $zz$  компоненты,

$$2l \left( \frac{1}{1-v} \delta'(r-r_*) + \frac{v'}{(1-v)^2} \delta(r-r_*) \right) = T_{zz}, \quad (3.193)$$

где  $T_{zz}$  – источник цилиндрической дислокации (аналог тензора энергии-импульса полей материи в общей теории относительности). Используя тождество

$$f(r) \delta'(r-r_*) = f(r_*) \delta'(r-r_*) - \partial_r f \delta(r-r_*),$$

справедливое для произвольной дифференцируемой функции  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$  на вещественной положительной полупрямой, сингулярную часть можно переписать в виде

$$T_{zz} = \frac{2l}{1-v(r_*)} \delta'(r-r_*) = \frac{4lr_*}{2r_*-l} \delta'(r-r_*). \quad (3.194)$$

Мы видим, что все неопределенные слагаемые в уравнениях Эйнштейна сократились. В общем случае, если компоненты метрики не являются непрерывными функциями, компоненты тензора кривизны содержат квадраты  $\delta$ -функций и произведения  $\delta$ -функций на скачки и, следовательно, математически не определены. Поэтому сокращение всех неопределенных слагаемых в уравнениях Эйнштейна является исключительным случаем. Не смотря на то, что символы Кристоффеля и компоненты тензора кривизны являются неопределенными, тензор энергии-импульса корректно определен. Такая же ситуация имеет место для распределения клиновых дислокаций с множителем  $\sqrt{g}$  для определения тензора энергии-импульса (3.192). Множитель  $\sqrt{g}$  возникает из-за того, что  $\delta$ -функция является не функцией, а скалярной плотностью.

В уравнениях Эйнштейна (3.192) мы переопределили тензор энергии-импульса (источник) по сравнению с тем, как он был определен в общей теории относительности (??). В настоящем разделе это не тензор, а тензорная плотность. Это существенно при работе с обобщенными функциями.

### 3.10.2 Цилиндрическая дислокация в геометрической теории дефектов

В предыдущем разделе мы описали цилиндрическую дислокацию и доказали, что индуцированная метрика является точным решением уравнений Эйнштейна. Однако остался открытым вопрос о том, что уравнения геометрической теории дефектов имеют еще какие либо решения для цилиндрической дислокации при том же источнике. Поэтому в настоящем разделе мы опишем цилиндрическую дислокацию без привлечения теории упругости. С этой целью мы решим уравнения равновесия, следующие из вариационного принципа для действия (3.36) в системе координат, определенной упругой (3.43) и лоренцевой (3.44) калибровочными условиями.

Пусть цилиндрическая дислокация описывается источником  $T_{\mu\nu}$ , явный вид которого будет определен позже.

Цилиндрическая дислокация соответствует упругой среде без спиновой структуры и поэтому без дисклинаций. В этом случае тензор кривизны равен нулю  $R_{\mu\nu}^{ij} = 0$  (но не тензор  $\tilde{R}_{\mu\nu}^{ij}$ !), уравнения равновесия, полученные вариацией действия (3.36) по связности  $\omega_{\mu}^{ij}$  выполнены, и мы можем положить  $R^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$  в действии (3.36). После этого действие варьируется по реперу  $e_{\mu}^i$ , и возникают уравнения Эйнштейна (3.192).

Для цилиндрической дислокации метрика имеет два вектора Киллинга,  $\partial_z$  и  $\partial_{\varphi}$  в цилиндрической системе координат, которые соответствуют инвариантности относительно трансляций вдоль оси  $z$  и вращениям в плоскости  $x, y$ . Для решения уравнений Эйнштейна выберем метрику в диагональном виде

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A^2 & 0 & 0 \\ 0 & B^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.195)$$

где  $A(r)$  и  $B(r)$  – две неизвестные положительные функции от радиуса. Хотя это не самый общий вид метрики, совместимой с симметрией задачи, его будет достаточно для наших целей. Соответствующий репер также можно выбрать в диагональном виде:

$$e_r^{\hat{r}} = A, \quad e_{\varphi}^{\hat{\varphi}} = B, \quad e_z^{\hat{z}} = 1, \quad (3.196)$$

где координатные индексы обозначены  $\{\mu\} = (r, \varphi, z)$ , а индексы относительно ортогонального базиса помечены шляпкой:  $\{i\} = (\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z})$ . Мера объема имеет вид

$$\sqrt{g} = AB.$$

Если бы упругая калибровка (3.43) не использовалась, то оставшуюся свободу в выборе радиальной координаты можно было бы использовать для дальнейшего упрощения вида метрики. Например, можно было бы положить  $A = 1$ .

Последующие вычисления будут проведены так, как будто функции  $A$  и  $B$  являются достаточно гладкими, а полученные в дальнейшем разрывы будут оправданы тем, что все неопределенные слагаемые в уравнениях для  $A$  и  $B$  сократятся.

Символы Кристоффеля для метрики (3.195) имеют четыре нетривиальные компоненты:

$$\tilde{\Gamma}_{rr}^r = \frac{A'}{A}, \quad \tilde{\Gamma}_{r\varphi}^{\varphi} = \tilde{\Gamma}_{\varphi r}^{\varphi} = \frac{B'}{B}, \quad \tilde{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r = -\frac{BB'}{A^2},$$

где штрих обозначает производную по радиусу. Тензор кривизны имеет только одну отличную от нуля компоненту

$$\tilde{R}_{r\varphi r\varphi} = BB'' - \frac{A'BB'}{A}.$$

Нетривиальные компоненты тензора Риччи и скалярная кривизна имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{rr} &= \frac{B''}{B} - \frac{A'B'}{AB}, \\ \tilde{R}_{\varphi\varphi} &= \frac{BB''}{A^2} - \frac{A'BB'}{A^3}, \\ \tilde{R} &= \frac{2}{AB} \left( \frac{B''}{A} - \frac{A'B'}{A^2} \right).\end{aligned}$$

Мы полагаем, что источник имеет только одну отличную от нуля компоненту

$$T_{zz} := L\delta'(r - r_*), \quad (3.197)$$

где  $L$  и  $r_*$  – две постоянных, которые характеризуют силу и положение цилиндрической дислокации. Этот вид источника продиктован результатами, полученными в рамках теории упругости (3.194). В общем случае вид источника может быть произволен, и ему соответствует свои репер и метрика. Это будет решением другой задачи, возможно, с непрерывным распределением параллельных дислокаций с вращательной симметрией.

Нетрудно проверить, что  $rr$ ,  $\varphi\varphi$ , а также недиагональные компоненты уравнений Эйнштейна (3.192) для метрики (3.195) тождественно удовлетворяются. Компонента  $zz$  сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{B'}{A} \right)' = \frac{1}{2} L\delta'(r - r_*). \quad (3.198)$$

Это – *линейное* неоднородное дифференциальное уравнение по отношению к комбинации компонент метрики  $B'/A$ . Поэтому рассмотрение сингулярного источника (3.197) оправдано. Данное уравнение определено для положительных непрерывных  $A(r)$  и имеет общее решение

$$B' = \frac{1}{2} A(r_*) L\delta(r - r_*) + c_1 A, \quad c_1 = \text{const}, \quad (3.199)$$

где  $c_1$  – постоянная интегрирования. Полученное решение можно еще раз проинтегрировать

$$B = \frac{1}{2} A(r_*) L\theta(r - r_*) + c_1 \int_0^r ds A(s) + c_2, \quad c_2 = \text{const}, \quad (3.200)$$

где  $\theta$  – функция ступеньки:

$$\theta(r - r_*) := \begin{cases} 0, & r \leq r_*, \\ 1, & r > r_*. \end{cases} \quad (3.201)$$

Таким образом, мы нашли решение уравнений Эйнштейна для цилиндрической дислокации. Оно зависит от одной произвольной непрерывной положительной функции  $A(r)$  и двух постоянных интегрирования  $c_{1,2}$ . Произвольная постоянная функция  $A$  в решении отражает наличие остаточной свободы в выборе радиальной координаты и определяется упругой калибровкой. По существу, уравнения Эйнштейна с источником (3.197) определяют только скачок компоненты репера  $e_\varphi^\hat{\varphi}$ . Произвольная функция  $e_r^{\hat{r}} = A(r)$  описывает свободу в выборе радиальной координаты.

Теперь мы наложим упругую калибровку (3.43). В цилиндрических координатах плоский репер можно выбрать диагональным с компонентами

$$\overset{\circ}{e}_r \overset{\hat{r}}{=} 1, \quad \overset{\circ}{e}_\varphi \overset{\hat{\varphi}}{=} r, \quad \overset{\circ}{e}_z \overset{\hat{z}}{=} 1.$$

Он определяет плоские символы Кристоффеля  $\overset{\circ}{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$  и  $\mathbb{SO}(3)$  связность  $\overset{\circ}{\omega}_{\mu i}^j$ , которые имеют следующие нетривиальные компоненты (см. раздел ??):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Gamma}_{r\varphi}^\varphi &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, & \overset{\circ}{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r &= -r, \\ \overset{\circ}{\omega}_{\varphi\hat{r}}^{\hat{\varphi}} &= -\overset{\circ}{\omega}_{\varphi\hat{\varphi}}^{\hat{r}} = 1. \end{aligned}$$

Подстановка репера (3.196) в калибровочное условие (3.43) дает дифференциальное уравнение Эйлера для функции  $A(r)$

$$A' + \frac{A}{r} - \frac{B}{r^2} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left( A' + \frac{B'}{r} - \frac{B}{r^2} \right) = 0, \quad (3.202)$$

где функция  $B(r)$  задана равенством (3.200).

Мы ищем классическое решение данного уравнения внутри поверхности склейки,  $A_{\text{in}}$ , и вне ее,  $A_{\text{ex}}$ , со следующими “асимптотически свободными” граничными условиями:

$$B_{\text{in}}|_{r=0} = 0, \quad 0 < A_{\text{in}}|_{r=0} < \infty, \quad B_{\text{ex}}|_{r \rightarrow \infty} = r. \quad (3.203)$$

Граничные условия в нуле  $r = 0$  такие же, как и для евклидовой метрики. Кроме того, на поверхности склейки мы накладываем граничные условия:

$$A_{\text{in}}|_{r=r_*} = A_{\text{ex}}|_{r=r_*}, \quad B_{\text{in}}|_{r=r_*} + \frac{LA(r_*)}{2} = B_{\text{ex}}|_{r=r_*}. \quad (3.204)$$

Первое условие спивки обеспечивает равенство нормальных упругих сил. Второе условие является следствием уравнения (3.200) и дает скачок  $e_\varphi^{\hat{\varphi}}$  компоненты репера. Условия спивки (3.203) и (3.204) аналогичны граничным условиям (3.180) в теории упругости.

Подстановка выражения для  $B$  из равенства (3.200) в первое условие спивки (3.203) определяет одну из постоянных интегрирования:  $c_2 = 0$ .

Уравнение (3.202) проще решить относительно  $B$  вместо  $A$ . Внутри и снаружи поверхности склейки  $B' = c_1 A$  как следствие уравнения (3.199). Тогда уравнение (3.202) сводится к условию

$$\frac{B''}{c_1} + \frac{B'}{c_1 r} - \frac{B}{r^2} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left( \frac{B''}{c_1} + \frac{B'}{r} - \frac{B}{r^2} \right) = 0. \quad (3.205)$$

Это уравнение Эйлера совпадает с уравнением для клиновой дислокации (3.95), где роль угла дефицита конической особенности играет разность  $c_1 - 1$ . Оно имеет общее решение

$$B = D_1 r^{\gamma_1} + D_2 r^{\gamma_2}, \quad D_{1,2} = \text{const}, \quad (3.206)$$

зависящее от двух постоянных интегрирования  $D_{1,2}$ , и где постоянные  $\gamma_{1,2}$  являются корнями квадратного уравнения

$$\gamma^2 + \frac{(c_1 - 1)\sigma}{1 - \sigma} \gamma - c_1 = 0.$$

При  $c_1 > 0$  это уравнение имеет два вещественных корня противоположных знаков: положительный корень  $\gamma_1$  и отрицательный  $\gamma_2$ .

В области интегрирования мы имеем равенство  $D_2 = 0$  и  $\gamma_1 = 1$  как следствие первых двух условий (3.203), при этом равенство  $\gamma_1 = 1$  эквивалентно условию  $c_1 = 1$  для  $\sigma \neq 1/2$ . Следовательно, решение уравнений Эйнштейна во внутренней области имеет вид

$$B_{\text{in}} = D_1 r, \quad A_{\text{in}} = D_1. \quad (3.207)$$

Оно зависит от одной произвольной постоянной  $D_1$ . Итак, два первых граничных условия (3.203) фиксируют две постоянных интегрирования уравнений Эйнштейна,  $c_1 = 1$  и  $c_2 = 0$ , которые одинаковы и для внутренней, и для внешней области, и одну постоянную интегрирования в упругой калибровке,  $D_2 = 0$ .

Для того, чтобы уменьшить число индексов, обозначим постоянные интегрирования в равенстве (3.206) во внешней области новыми буквами:

$$B_{\text{ex}} = E_1 r^{\gamma_1} + E_2 r^{\gamma_2}, \quad E_{1,2} = \text{const.}$$

Постоянная интегрирования  $c_1 = 1$  уже зафиксирована во внутренней области, и поэтому  $\gamma_1 = 1$  и  $\gamma_2 = -1$ . Третье асимптотическое условие (3.203) Определяет  $E_1 = 1$  и дает решение во внешней области:

$$B_{\text{ex}} = r + \frac{E_2}{r}, \quad A_{\text{ex}} = 1 - \frac{E_2}{r^2}, \quad (3.208)$$

которое также зависит от произвольной постоянной  $E_2$ .

Для того, чтобы выразить постоянные  $D_1$  и  $E_2$  через параметры задачи  $L$  и  $r_*$ , характеризующие источник, используем условия спивки решений. Первое условие (3.204) связывает постоянные  $D_1$  и  $E_2$ . Обозначив  $D_1 := 1 - a$  и  $E_2 := b$ , получаем уравнение (3.184). Наконец, второе условие спивки (3.204) приводит к равенству

$$L = 2 \frac{B_{\text{ex}}(r_*) - B_{\text{in}}(r_*)}{A(r_*)} = \frac{4lr_*}{2r_* - l},$$

где  $l := 2\sqrt{ab}$ , совпадающее с коэффициентом при  $\delta$ -функции в источнике (3.197).

Таким образом, мы решили задачу для цилиндрической дислокации в рамках геометрической теории дефектов. Поле репера определено формулой (3.196), где функции  $A$  и  $B$  заданы равенствами (3.207) и (3.208). Метрика (3.195) в точности совпадает с индуцированной метрикой (3.190), полученной в рамках теории упругости. Важно отметить, что мы получили метрику для цилиндрической дислокации, решив уравнения Эйнштейна в упругой калибровке, ничего не зная о векторном поле смещений. Если нужно, то вектор смещения можно восстановить во внутренней и внешней областях путем решения уравнения

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} = e_\mu^i$$

с соответствующими граничными условиями, где функции  $y^i$  определены равенством (3.1). Это уравнение имеет решение, т.к. тензор кривизны равен нулю,  $\tilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$ .

С геометрической точки зрения, нам просто нужно найти такую систему координат, в которой метрика становится евклидовой. Это легко сделать непосредственно.

Существенная двумерная часть метрики во внутренней и внешней областях имеет вид

$$dl_{\text{in}}^2 = (1-a)^2 dr^2 + (1-a)^2 r^2 d\varphi^2,$$

$$dl_{\text{ex}}^2 = \left(1 - \frac{b}{r}\right)^2 dr^2 + \left(r + \frac{b}{r}\right)^2 d\varphi^2.$$

Вводя новые координаты  $y := (1-a)r$  во внутренней и  $y := r + b/r$  во внешней областях, метрика приводится к евклидову виду  $dl^2 = dy^2 + y^2 d\varphi^2$  в обеих областях. После этого сразу находится вектор смещения (3.187), используя определение (3.1).

Таким образом, мы решили задачу для цилиндрической дислокации в рамках теории упругости и геометрической теории дефектов. Результаты совпадают, хотя это совпадение не является автоматическим. Например, метрика для клиновой дислокации, полученная в рамках геометрического подхода существенно отличается от индуцированной метрики, полученной в рамках теории упругости (см. раздел 3.8.2), и воспроизводит последнюю только в линейном приближении. Это происходит потому что упругая калибровка (3.43) сводится к уравнениям нелинейной теории упругости для вектора смещений.

Возникает естественный вопрос: “Зачем использовать относительно сложный геометрический подход, если теория упругости также работает?” Ответ прост. Теория упругости работает для описания отдельных дефектов или их небольшого числа. Если число дефектов велико, то граничные условия настолько усложняются, что нет никакой надежды на решение данной задачи в рамках теории упругости. Например, мы не знаем решение задачи для произвольного распределения параллельных клиновых дислокаций в рамках теории упругости. В то время как эта же задача имеет простое решение в геометрическом подходе (3.86). Существует еще одно важное оправдание. Допустим, что имеется непрерывное распределение дефектов. Тогда эту задачу невозможно даже поставить в рамках теории упругости, т.к. векторного поля смещений просто не существует. При этом геометрический подход дает простую постановку: мы имеем хорошо определенные выражения для свободной энергии (??) и калибровочных условий (3.43), (??). Единственное отличие по сравнению с отдельными дефектами состоит в том, что надо рассматривать непрерывный источник дефектов  $T_{\mu\nu}$  (тензор энергии-импульса).

Поверхностная плотность вектора Бюргерса задается компонентами тензора кручения (??). Простые вычисления показывают, что тензор кручения для цилиндрической дислокации имеет только одну отличную от нуля компоненту

$$T_{r\varphi}^{\hat{\varphi}} = -T_{\varphi r}^{\hat{\varphi}} = 1 - v + l\delta(r - r_*), \quad (3.209)$$

которая сингулярна на поверхности склейки, и нетривиальна во внутренней и внешней областях. Проекция вектора Бюргерса на ось  $x$  задается интегралом и равна нулю,

$$b^x = - \int_{\mathbb{R}^2} dx^\mu \wedge dx^\nu T_{\mu\nu}^{\hat{\varphi}} \sin \varphi = \int_0^\infty dr r \int_0^{2\pi} d\varphi T_{r\varphi}^{\hat{\varphi}} \sin \varphi = 0.$$

Аналогично, его проекция на произвольную прямую, пересекающую начало координат, также равна нулю. Следовательно, вектор Бюргерса цилиндрической дислокации равен нулю.

### 3.10.3 Цилиндрическая дислокация в общей теории относительности

Основным результатом раздела 3.10.1 является пространственная метрика (3.190), описывающая цилиндрическую дислокацию. Мы доказали, что она удовлетворяет трехмерным уравнениям Эйнштейна (3.192) с источником (3.197). Обобщение этой метрики на четырехмерной случая проводится непосредственно.

Предположим, что цилиндрическая дислокация не двигается, т.е. метрика статична

$$ds^2 = dt^2 - (1 - v)^2 dr^2 - (r - u)^2 d\varphi^2 - dz^2, \quad (3.210)$$

где функции  $v$  и  $u$  определены равенствами (3.188) и (3.187). Компонента  $g_{\varphi\varphi}$  является разрывной, а  $g_{rr}$  – непрерывна, но имеет скачок производной. Нетрудно проверить, что все компоненты символов Кристоффеля и кривизны для метрики (3.210), имеющие хотя бы один временной индекс тождественно равны нулю. Поэтому эта метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна

$$\sqrt{|g|} \left( \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \tilde{R} \right) = -\frac{1}{2} T_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, \quad (3.211)$$

где греческие индексы из начала алфавита пробегают все значения индексов от 0 до 3. Тензор энергии-импульса материи имеет только две неисчезающие компоненты:

$$T_{00} = -T_{zz} = L\delta'(r - r_*). \quad (3.212)$$

Замечательным обстоятельством является тот факт, что все неопределенные слагаемые в левой части уравнения (3.211) для метрики (3.210) сокращаются. Итак, метрика (3.210) удовлетворяет четырехмерным уравнениям Эйнштейна, и ее физический смысл ясен из предыдущего рассмотрения: она описывает цилиндрическую дислокацию.

### 3.10.4 Коническая цилиндрическая дислокация

В предыдущих разделах мы описали цилиндрическую дислокацию в рамках теории упругости и геометрической теории дефектов. Метрика в обоих случаях оказалась идентичной. Ниже мы опишем другой тип цилиндрических дислокаций, которые названы коническими цилиндрическими дислокациями, т.к. они имеют такую же асимптотику на бесконечности как и конические особенности. Эти дислокации описаны в рамках геометрической теории дефектов.

В настоящем разделе постоянные интегрирования обозначены так же, как и в разделе 3.10.2, но имеют другой смысл.

Рассмотрим трехмерные уравнения Эйнштейна с источником, который имеет только одну отличную от нуля компоненту

$$T_{zz} := 2\Theta\delta(r - r_*), \quad \Theta = \text{const}, \quad (3.213)$$

в цилиндрических координатах. В отличие от предыдущего случая мы заменили производную  $\delta$ -функции в формуле (3.197) на саму  $\delta$ -функцию. Будем искать решение, которое обладает трансляционной и вращательной инвариантностью. В дальнейшем мы увидим, что постоянная  $\Theta$  играет роль угла дефицита конической особенности, соответствующей асимптотике  $r \rightarrow \infty$ .

Эта задача эквивалентна статической конической цилиндрической дислокации в общей теории относительности с тензором энергии-импульса

$$T_{00} = -T_{zz} = 2\Theta\delta(r - r_*). \quad (3.214)$$

Физический смысл  $2\Theta$  – это поверхность плотность энергии тонкого цилиндра радиуса  $r_*$ . Для обычной материи  $\Theta > 0$ . Однако мы рассмотрим оба случая, т.к. вычисления не сильно зависят от знака  $\Theta$ .

Выберем метрику в виде (3.195). Тогда вся система уравнений Эйнштейна сводится к одному линейному обыкновенному дифференциальному уравнению (вычисления те же, что и при получении уравнения (3.198))

$$\left(\frac{B'}{A}\right)' = \Theta\delta(r - r_*).$$

Оно легко интегрируется:

$$B' = \Theta A\theta(r - r_*) + c_1 A, \quad (3.215)$$

$$B = \Theta \int_{r_*}^r ds A(s) + c_1 \int_0^r ds A(s) + c_2, \quad c_{1,2} = \text{const}, \quad (3.216)$$

где  $\theta(r - r_*)$  – ступенька (3.201) и  $c_{1,2}$  – постоянные интегрирования. Таким образом, уравнения Эйнштейна определяют компоненту репера  $e_\varphi^\phi := B$  через компоненту  $e_r^r := A$ , которая может быть произвольной положительной функцией. Если функция  $A(r)$  непрерывна, то  $B(r)$  также непрерывна благодаря уравнению (3.216), но ее производная имеет скачок (3.215).

Для того, что зафиксировать решение, наложим упругую калибровку (3.43), которая сводится к уравнению (3.202). Мы ищем решение данного уравнения внутри,  $A_{\text{in}}$ , и вне,  $A_{\text{ex}}$ , поверхности склейки. В теории упругости клиновая дислокация соответствует бесконечному цилинду конечного радиуса,  $0 < r < a$ , т.к. напряжения расходятся в бесконечности (см. раздел 3.7.2). Пусть  $a > r_*$ . Тогда наложим следующие граничные условия:

$$B_{\text{in}}|_{r=0} = 0, \quad 0 < A_{\text{in}}|_{r=0} < \infty, \quad A_{\text{ex}}|_{r=a} = 1. \quad (3.217)$$

Последнее граничное условие означает отсутствие внешних нормальных сил на границе цилиндра. Мы также накладываем условия непрерывной спивки

$$A_{\text{in}}|_{r=r_*} = A_{\text{ex}}|_{r=r_*}, \quad B_{\text{in}}|_{r=r_*} = B_{\text{ex}}|_{r=r_*}. \quad (3.218)$$

Во внутренней области из уравнения (3.215) вытекает равенство  $B' = c_1 A$ . Поэтому упругая калибровка сводится к уравнению (3.205) с теми же граничными условиями, что и для цилиндрической дислокации, рассмотренной ранее. Поэтому  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 0$ , и решение во внутренней области задается той же формулой (3.207), что и раньше.

Во внешней области  $B' = \alpha A$ , где  $\alpha := 1 + \Theta$ , т.к.  $c_1 = 1$ . Общее решение уравнения (3.205) имеет вид

$$B_{\text{ex}} = E_1 r^{\gamma_1} + E_2 r^{\gamma_2},$$

где  $\gamma_1 > 0$  и  $\gamma_2 < 0$  являются корнями квадратного уравнения

$$\gamma^2 + \frac{\Theta\sigma}{1-\sigma}\gamma - \alpha = 0, \quad \alpha := 1 + \Theta. \quad (3.219)$$

Третье граничное условие (3.217),

$$\frac{E_1\gamma_1}{\alpha}a^{\gamma_1-1} + \frac{E_2\gamma_2}{\alpha}a^{\gamma_2-1} = 1, \quad (3.220)$$

приводит к соотношению между  $E_1$  и  $E_2$  при заданном  $a$ .

После этого постоянные  $D_1$  и  $E_2$  определяются через  $\Theta$  и  $r_*$  условиями спивки (3.218)

$$\frac{E_1\gamma_1}{\alpha}r_*^{\gamma_1-1} + \frac{E_2\gamma_2}{\alpha}r_*^{\gamma_2-1} = D_1, \quad (3.221)$$

$$E_1r_*^{\gamma_1} + E_2r_*^{\gamma_2} = D_1r_*. \quad (3.222)$$

На практике, мы сначала решаем уравнения (3.221) и (3.222),

$$\begin{aligned} E_1 &= D_1 \frac{\alpha - \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} r_*^{-\gamma_1+1}, \\ E_2 &= -D_1 \frac{\alpha - \gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} r_*^{-\gamma_2+1}. \end{aligned} \quad (3.223)$$

Затем постоянная  $D_1$  находится путем подстановки этих решений в равенство (3.220),

$$D_1 = \frac{\alpha}{\gamma_1 \frac{\alpha - \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left(\frac{a}{r_*}\right)^{\gamma_1-1} - \gamma_2 \frac{\alpha - \gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left(\frac{a}{r_*}\right)^{\gamma_2-1}}. \quad (3.224)$$

Таким образом, решение для конической цилиндрической дислокации имеет вид

$$ds^2 = A^2 dr^2 + B^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (3.225)$$

где

$$A = \begin{cases} D_1, & 0 \leq r \leq r_*, \\ \frac{1}{\alpha}(E_1\gamma_1 r^{\gamma_1-1} + E_2\gamma_2 r^{\gamma_2-1}), & r_* \leq r \leq a, \end{cases} \quad (3.226)$$

$$B = \begin{cases} D_1 r, & 0 \leq r \leq r_*, \\ E_1 r^{\gamma_1} + E_2 r^{\gamma_2}, & r_* \leq r \leq a, \end{cases} \quad (3.227)$$

где постоянные  $D_1, E_{1,2}$  с помощью формул (3.223), (3.224) выражаются через постоянные  $\Theta, r_*$ , и  $a$ , определяющие задачу. Все компоненты метрики являются непрерывными функциями, а первая производная функции  $B$  имеет скачок  $\Theta$  на поверхности склейки  $r = r_*$ .

Теперь дадим физическую интерпретацию постоянной  $\Theta$ . Предположим, что радиус цилиндра  $a$  является большим,  $a \gg r_*$ . Тогда вблизи внешней поверхности цилиндра  $r \sim a$  постоянные примерно равны

$$\begin{aligned} D_1 &\approx \frac{\alpha(\gamma_1 - \gamma_2)}{\gamma_1(\alpha - \gamma_2)} \left(\frac{r_*}{a}\right)^{\gamma_1-1}, \\ E_1 &\approx \frac{\alpha}{\gamma_1 a^{\gamma_1-1}}, \end{aligned}$$

и метрика (3.225) асимптотически принимает вид

$$ds^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^{2\gamma_1-2} \left(dr^2 + \frac{\alpha^2}{\gamma_1^2} r^2 d\varphi^2\right) + dz^2. \quad (3.228)$$

Это в точности метрика конической дислокации (3.99) с углом дефицита  $\Theta$ . Таким образом, постоянная  $\Theta$ , стоящая перед  $\delta$ -функцией в источнике (3.213), совпадает с углом дефицита среды, которая удалена,  $-2\pi < \Theta < 0$ , или добавлена,  $\Theta > 0$ .

С физической точки зрения мы нашли метрику для конической цилиндрической дислокации, которая определяет упругие напряжения вокруг дефекта. Заметим, что это решение зависит от упругих постоянных, характеризующих среду, в отличие от метрики (3.190), полученной ранее. Метрика является решением поставленной задачи даже без нахождения векторного поля смещений. Однако нахождение вектора смещений инструктивно и помогает представить процесс создания дислокации.

Во внутренней области двумерная часть метрики (3.225) имеет вид

$$dl_{in}^2 = D_1^2 dr^2 + D_1^2 r^2 d\varphi^2.$$

В терминах новой радиальной координаты  $y := D_1 r$  метрика становится евклидовой,

$$dl_{in}^2 = dy^2 + y^2 d\varphi^2, \quad (3.229)$$

причем поверхность склейки  $r = r_*$  соответствует следующим значениям координат  $r_1 = y(r_*) = D_1 r_*$ . Это означает, что цилиндр  $y \leq r_1$  в евклидовом пространстве  $y, \varphi, z$  отображается на внутреннюю область конической цилиндрической дислокации. Векторное поле смещений (3.1) при этом имеет только одну отличную от нуля компоненту  $u^r = r - y = (1 - D_1)r$ .

Двумерная часть метрики во внешней области имеет вид

$$dl_{ex}^2 = \frac{1}{\alpha^2} (E_1 \gamma_1 r^{\gamma_1-1} + E_2 \gamma_2 r^{\gamma_2-1})^2 dr^2 + (E_1 r^{\gamma_1} + E_2 r^{\gamma_2})^2 d\varphi^2.$$

Преобразование к новым координатам,

$$y := \frac{1}{\alpha} (E_1 r^{\gamma_1} + E_2 r^{\gamma_2}), \quad \varphi' := \alpha \varphi, \quad (3.230)$$

приводит метрику к евклидову виду

$$dl_{ex}^2 = dy^2 + y^2 d\varphi'^2.$$

Новые координаты имеют следующую область определения

$$r_2 < y < \infty, \quad 0 < \varphi' < 2\pi\alpha,$$

где

$$r_2 := \frac{1}{\alpha} (E_1 r_*^{\gamma_1} + E_2 r_*^{\gamma_2}).$$

Это значит, что внешность цилиндра  $y > r_2$  евклидова пространства с вырезанным углом  $2\pi\alpha < \varphi' < 2\pi$  отображается на внешнюю часть конической цилиндрической дислокации. В этой области векторное поле смещений имеет две нетривиальные компоненты:

$$u^r = r - \frac{1}{\alpha} (E_1 r^{\gamma_1} + E_2 r^{\gamma_2}), \quad u^\varphi = -r\Theta\varphi,$$

что вытекает из преобразования координат (3.230). Напомним, что  $u^\varphi := ru^\varphi$ .

Нетрудно проверить, что длина внутренней окружности равна длине оставшейся дуги от внешней окружности,  $2\pi r_1 = 2\pi r_2\alpha$ , в соответствии с равенством (3.222). Это обеспечивает непрерывность компоненты метрики  $g_{\varphi\varphi}$  на поверхности склейки.

Процесс создания конической цилиндрической дислокации показан на рис. 3.28. Для отрицательного угла дефицита  $\Theta$  мы берем евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  с цилиндрической системой координат  $y, \varphi', z$ , вырезаем из него толстостенную трубу  $r_1 < y < r_2$  и клин с углом  $2\pi\alpha < \varphi' < 2\pi$  из наружной части среды. Затем склеиваем края разрезов так, как показано на рисунке. После этого среда приходит в некоторое равновесное состояние в соответствии с упругой калибровкой, которое называется *конической цилиндрической дислокацией*.

Для положительного угла дефицита клин добавляется к внешней части среды. Поэтому внутренний цилиндр перед склейкой необходимо сжать, т.к. в этом случае  $r_1 > r_2$ .

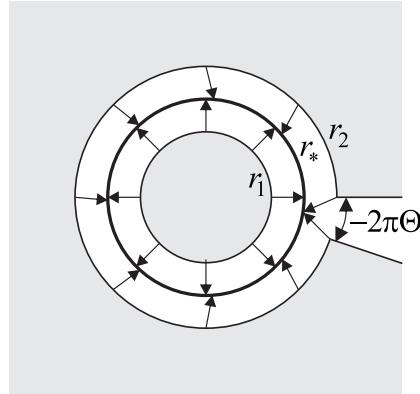


Рис. 3.28: Коническая цилиндрическая дислокация с отрицательным углом дефицита  $\Theta$ .

Вероятно, эту задачу можно решить в рамках теории упругости, хотя решение не известно и представляется непростым из-за сложных граничных условий. В любом случае решение в рамках линейной теории упругости будет воспроизводить только линейное приближение, поскольку упругая калибровка (3.43) соответствует нелинейной теории упругости. Данный пример показывает, что некоторые задачи проще решаются в рамках геометрического подхода.

Не просто представить себе пространство-время как топологическое произведение вещественной прямой  $t \in \mathbb{R}$  с цилиндром конечного радиуса  $a$ , снабженного метрикой (3.225), потому что оно геодезически неполно (геодезическая достигает края цилиндра за конечное собственное время). Однако выражение для метрики (3.225) имеет смысл для всех значений радиуса  $0 < r < \infty$ . Поэтому решение для метрики можно продолжить на все пространство-время

$$ds^2 = dt^2 - A^2 dr^2 - B^2 d\varphi^2 - dz^2,$$

где  $t, z \in \mathbb{R}$ ,  $0 < r < \infty$  и  $0 < \varphi < 2\pi$ . Это – решение четырехмерных уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса (3.214), описывающим статическую коническую цилиндрическую дислокацию. Эта метрика записана в упругой калибровке и поэтому явно зависит от коэффициента Пуассона  $\sigma$  вселенной. Если этот объект существует в природе, то, в принципе, коэффициент Пуассона вселенной можно измерить. Таким образом геометрическая теория дефектов дает возможность измерить упругие постоянные вселенной.

### 3.10.5 Асимптотически плоская клиновая дислокация

Процесс создания дислокации из предыдущего раздела можно обратить. Возьмем бесконечный стержень среды цилиндрической формы радиуса  $r_1$  и вырежем из него клин с углом  $\Theta$  как показано на рис. 3.29. После склейки получим стержень с конической дислокацией периметр сечения которого равен  $2\pi(1 + \Theta)$ . Затем вырежем из бесконечной среды цилиндр меньшего радиуса  $r_2 < r_1$  таким образом, чтобы длина окружности  $2\pi r_2$  была равна периметру стержня, и вставим стержень внутрь,

$$2\pi\alpha r_1 = 2\pi r_2, \quad \alpha := 1 + \Theta. \quad (3.231)$$

В результате получим асимптотически плоскую коническую дислокацию, причем равенство (3.231) обеспечивает непрерывность  $g_{\varphi\varphi}$  компоненты метрики.

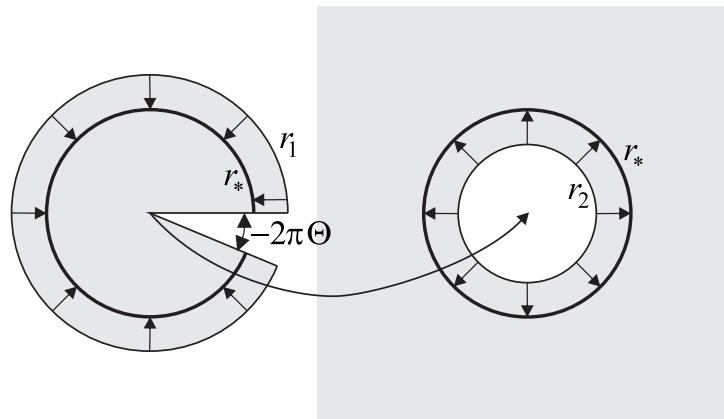


Рис. 3.29: Асимптотически плоская коническая особенность для отрицательного угла дефицита  $\Theta$ .

Если рассматривать этот дефект в гравитации, то у нас есть космическая струна, окруженная цилиндрической оболочкой материи таким образом, что пространство-время вдали от струны является асимптотически плоским.

Теперь опишем асимптотически плоскую клиновую дислокацию в рамках геометрической теории дефектов. Источник для этого дефекта отличается знаком от источника для конической цилиндрической дислокации:

$$T_{zz} = -2\Theta\delta(r - r_*). \quad (3.232)$$

Кроме того, будут изменены граничные условия. В дальнейшем мы покажем, что для противоположного знака источника уравнения Эйнштейна не имеют решений, которые были бы плоскими вне поверхности склейки  $r > r_*$ . Поэтому решение с отрицательным углом дефицита,  $\Theta < 0$ , имеет физический смысл в общей теории относительности.

Интегрирование уравнений Эйнштейна аналогично случаю конической цилиндрической дислокации, рассмотренной в предыдущем разделе,

$$B = -\Theta \int_{r_*}^r ds A(s) + c_1 \int_0^r ds A(s) + c_2.$$

Наложим следующие граничные условия на линии дислокации и в бесконечности:

$$B_{\text{in}}|_{r=0} = 0, \quad \frac{r A_{\text{in}}}{B_{\text{in}}}|_{r=0} = \frac{\gamma_1}{\alpha}, \quad A_{\text{ex}}|_{r=\infty} = 1, \quad (3.233)$$

где  $\gamma_1$  – положительный корень уравнения (3.219). Таким образом, правая часть второго уравнения выражена только через угол дефицита  $\Theta$  и коэффициент Пуассона. Первые два граничных условия соответствуют конической особенности на оси  $z$ , где метрика должна иметь вид (3.228). Третье граничное условие соответствует асимптотически плоской метрике.

Поставленные граничные условия (3.233) отличаются от граничных условий (3.217), которые были поставлены для конической цилиндрической дислокации в предыдущем разделе.

Условие сшивки решений на цилиндре радиуса  $r_*$  – это условие непрерывности (3.218) такое же, как и для конической цилиндрической дислокации.

Во внутренней области имеют место равенства:

$$A_{\text{in}} = \frac{B'_{\text{in}}}{c_1},$$

$$B_{\text{in}} = D_1 r^{\gamma_1} + D_2 r^{\gamma_2}, \quad D_{1,2} = \text{const},$$

и первые два граничных условия (3.233) определяют три постоянных интегрирования:

$$c_1 = \alpha, \quad c_2 = 0, \quad D_2 = 0.$$

Во внешней области

$$B'_{\text{ex}} = -\Theta A_{\text{ex}} + \alpha A_{\text{ex}} = A_{\text{ex}},$$

и мы видим необходимость выбора отрицательного знака в источнике (3.232) для асимптотической плоскости. Таким образом, внешнее решение имеет вид

$$A_{\text{ex}} = E_1 - \frac{E_2}{r^2},$$

$$B_{\text{ex}} = E_1 r + \frac{E_2}{r}, \quad E_{1,2} = \text{const}.$$

Третье граничное условие (3.233) определяет  $E_1 = 1$ .

Оставшиеся свободными постоянные  $D_1$  и  $E_2$  определяются требованием непрерывности решения (3.218),

$$D_1 r_*^{\gamma_1} = r_* + \frac{E_2}{r_*},$$

$$\frac{D_1 \gamma_1 r_*^{\gamma_1-1}}{\alpha} = 1 - \frac{E_2}{r_*^2}.$$

Эти уравнения легко решаются:

$$D_1 = \frac{2\alpha}{\alpha + \gamma_1} r_*^{-\gamma_1+1},$$

$$E_2 = \frac{\alpha - \gamma_1}{\alpha + \gamma_1} r_*^2.$$

В итоге мы получаем следующие выражения для существенной двумерной части метрики внутри и вне поверхности склейки:

$$dl_{\text{in}}^2 = \frac{4\gamma_1^2}{(\alpha + \gamma_1)^2} \left( \frac{r}{r_*} \right)^{2\gamma_1-2} \left( dr^2 + \frac{\alpha^2}{\gamma_1^2} r^2 d\varphi^2 \right), \quad (3.234)$$

$$dl_{\text{ex}}^2 = \left[ 1 - \frac{\alpha - \gamma_1}{\alpha + \gamma_1} \left( \frac{r_*}{r} \right)^2 \right]^2 dr^2 + \left[ 1 + \frac{\alpha - \gamma_1}{\alpha + \gamma_1} \left( \frac{r_*}{r} \right)^2 \right]^2 r^2 d\varphi^2. \quad (3.235)$$

Их компоненты являются непрерывными на поверхности склейки, и внешняя часть является асимптотически евклидовой.

Преобразование к декартовым координатам, где метрика имеет вид  $dl^2 = dy^2 + y^2 d\varphi^2$  является различным для внутренней и внешней области. Внутри поверхности склейки оно имеет вид

$$y := \frac{2r_*}{\alpha + \gamma_1} \left( \frac{r}{r_*} \right)^{\gamma_1}, \quad \varphi' := \alpha \varphi.$$

Отсюда следует, что мы имеем коническую особенность с углом дефицита  $\Theta$  и

$$r_1 = \frac{2r_*}{\alpha + \gamma_1}.$$

Вне поверхности склейки преобразование координат имеет вид

$$y := r + \frac{\alpha - \gamma_1}{\alpha + \gamma_1} \frac{r_*^2}{r}, \quad \varphi' := \varphi,$$

и

$$r_2 = \frac{2\alpha r_*}{\alpha + \gamma_1}.$$

Для отрицательного угла дефицита,  $\Theta < 0$ ,  $\alpha < 1$ , справедливо неравенство  $r_2 < r_1$  как это следует из элементарных геометрических построений.

Таким образом, задача с  $\delta$ -образным источником имеет два типа решений. Один тип является плоским внутри поверхности склейки и коническим вне. Другой тип решений для метрики имеет коническую особенность внутри и является плоским вне поверхности склейки. Соответствующие решения в раках теории упругости неизвестны. Скорее всего их можно найти, но не стоит ожидать, что они будут иметь простой вид из-за сложных граничных условий.

### 3.10.6 Непрерывное распределение цилиндрических дислокаций

Для непрерывного распределения цилиндрических дислокаций источник имеет вид

$$T_{zz} = 2f(r), \quad (3.236)$$

где  $f(r)$  – произвольная достаточно гладкая скалярная плотность, зависящая только от радиуса. Как и раньше, эта задача инвариантна относительно трансляций вдоль оси  $z$  и вращений в плоскости  $r, \varphi$ . Уравнения Эйнштейна (3.192) для метрики (3.195) сводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left( \frac{B'}{A} \right)' = f(r),$$

которое легко интегрируется

$$B = \int_0^r ds A(s) \int_0^s dt f(t) + c_1 \int_0^r ds A(s) + c_2, \quad c_{1,2} = \text{const.} \quad (3.237)$$

Одна постоянная интегрирования фиксируется требованием, чтобы длина окружности цилиндра, окружающего ось  $z$ , стремилась к нулю при  $r \rightarrow 0$ . Тогда граничное

условие принимает вид  $B|_{r=0} = 0$ , и, как следствие,  $c_2 = 0$ . Если метрика является конформно евклидовой на оси  $z$ , то тогда возникает второе граничное условие

$$\left. \frac{B'}{A} \right|_{r=0} = 1.$$

Оно фиксирует  $c_1 = 1$ . Это построение проясняет геометрический смысл постоянных интегрирования. Однако можно также рассмотреть более экзотические источники (тензоры энергии-импульса) с другими значениями постоянных  $c_{1,2}$ .

Упругая калибровка для решения (3.237) сводится к уравнению

$$\frac{B''}{F} - \frac{B'f}{F^2} + \frac{B'}{Fr} - \frac{B}{r^2} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left( \frac{B''}{F} - \frac{B'f}{F^2} + \frac{B'}{r} - \frac{B}{r^2} \right) = 0,$$

где

$$F(r) := \int_0^r ds f(s) + c_1$$

– первообразная для источника  $f(r)$ . Это уравнение для заданного источника можно решить по крайней мере численно.

Таким образом мы получили решение для произвольного распределения цилиндрических дислокаций. Эта задача показывает громадное преимущество геометрической теории дефектов перед теорией упругости. Действительно, если источник всюду отличен от нуля,  $f(r) \neq 0$ , тогда кривизна отлична от нуля в силу уравнений Эйнштейна, и векторное поле смещений просто не существует. В то же время в геометрической теории дефектов все хорошо определено, и можно найти метрику (т.е. упругие напряжения) как решение уравнений Эйнштейна в упругой калибровке. Векторное поле смещений может быть построено только в тех областях пространства, где источники отсутствуют,  $f(r) = 0$ , (напомним, что в трех измерениях полный тензор кривизны выражается через тензор Риччи, который равен нулю в силу уравнений Эйнштейна). В этих областях вектор смещений автоматически удовлетворяет уравнениям теории упругости благодаря упругой калибровке.

Таким образом, мы показали, что уравнения Эйнштейна допускают решения с  $\delta$ -образным тензором энергии-импульса. В общем случае компоненты метрики для цилиндрической дислокации являются разрывными функциями и приводят к неопределенным компонентам тензора кривизны. Однако все неопределенные члены в уравнениях Эйнштейна благополучно сокращаются. Последние сводятся к линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям для специальных комбинаций компонент метрики.

В общей теории относительности и геометрической теории дефектов полученные в последних разделах решения описывают тонкие массивные оболочки и цилиндрические дислокации. С математической точки зрения это одна и та же модель, т.к. в обоих случаях метрика удовлетворяет уравнениям Эйнштейна (в отсутствие дисклинаций). Отличие сводится только к упругой калибровке, которая имеет физический смысл в геометрической теории дефектов и явно зависит от коэффициента Пуассона, характеризующего упругие свойства среды. Если мы предположим, что пространство-время заполнено упругим эфиром, то, поскольку метрика явно зависит от коэффициента Пуассона, его можно измерить для вселенной.

### 3.11 Упругие колебания в среде с дислокациями

Среда с дефектами является топологически тривиальным многообразием  $\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^3$ , на котором задана геометрия Римана–Картана. Если в среде присутствуют дислокации, то евклидова метрика меняется на нетривиальную метрику, которая находится из уравнений Эйнштейна

$$\delta_{ij} \mapsto g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^i e_\nu^j \delta_{ij}. \quad (3.238)$$

На этом фоне могут распространяться упругие волны.

Упругие колебания в среде без дефектов описываются зависящим от времени векторным полем  $w^i(t, x)$ , которое удовлетворяет волновому уравнению (см., например, [?])

$$\rho_0 \ddot{w}^i - \mu \Delta w^i - (\lambda + \mu) \partial^i \partial_j w^j = 0, \quad (3.239)$$

где точки обозначают дифференцирование по времени, и  $\rho_0$  – плотность среды, которую будем считать постоянной.

Для описания упругих волн мы ввели новую букву  $w$ , поскольку буква  $u$  была использована для обозначения поля смещений, описывающего дислокации. Полное поле смещений равно сумме  $u + w$  (там, где  $u$  существует). Однако надо помнить, что в геометрической теории дефектов никакого разбиения поля смещений на два слагаемых, которое не является однозначным, нет, т.к. переменная  $u$  просто отсутствует. Вместо этого мы решаем уравнения равновесия и находим сразу репер, который задает нетривиальную метрику (3.238), описывающую распределение дефектов.

Если среда содержит дефекты, то метрика пространства становится нетривиальной (3.238). Предположим, что относительные смещения при упругих колебаниях малы по сравнению с напряжениями, создаваемыми дефектами:

$$\partial_\mu w^i \ll e_\mu^i. \quad (3.240)$$

Тогда в первом приближении будем считать, что упругие колебания распространяются в римановом пространстве с нетривиальной метрикой, созданной дислокациями. При этом мы пренебрегаем изменением метрики, вызванным самими упругими колебаниями. Поэтому для упругих колебаний в среде с дефектами мы постулируем следующее уравнение, которое является ковариантным обобщением (3.239) по пространственным переменным

$$\rho_0 \ddot{w}^i - \mu \tilde{\Delta} w^i - (\lambda + \mu) \tilde{\nabla}^i \tilde{\nabla}_j w^j = 0, \quad (3.241)$$

где  $w^i$  – компоненты векторного поля смещений относительно ортонормального базиса касательного пространства  $e_i$ ,  $\tilde{\Delta} = \tilde{\nabla}^i \tilde{\nabla}_i$  – ковариантный оператор Лапласа–Бельтрами, построенный по реперу  $e_\mu^i$ ,  $\tilde{\nabla}_i$  – оператор ковариантного дифференцирования. Выпишем в явном виде ковариантную производную от поля смещений

$$\tilde{\nabla}_i w^j := e^\mu_i \tilde{\nabla}_\mu w^j = e^\mu_i (\partial_\mu w^j + w^k \tilde{\omega}_{\mu k}^j),$$

где  $\tilde{\omega}_{\mu k}^j$  – связность, построенная при нулевом кручении.

Как уже говорилось в разделе 3.2, поле смещений для дислокаций можно ввести только в тех областях среды, где дефекты отсутствуют. При этом репер определяется полем смещений для дислокации  $e_\mu^i = \partial_\mu u^i$ . Заметим, что малость относительных деформаций для упругих колебаний (3.240) имеет смысл даже в тех областях пространства, где смещения  $u^i$  не определены.

Разложим поле смещений  $w$  ковариантным образом на поперечную (соленоидальную)  $w^{\text{tr}}$  и продольную (потенциальную) части  $w^{\text{L}}$ :

$$w^i = w^{\text{tr}i} + w^{\text{L}i},$$

которые определены следующими равенствами:

$$\tilde{\nabla}_i w^{\text{tr}i} = 0, \quad (3.242)$$

$$\tilde{\nabla}_i w_j^{\text{L}} - \tilde{\nabla}_j w_i^{\text{L}} = 0. \quad (3.243)$$

Разложение векторного поля на продольную и поперечную части в трехмерном пространстве является единственным с точностью до постоянной (см. раздел ??). Напомним, что опускание латинских индексов производится с помощью символов Кронекера,  $w^i = w_i$ , и оно перестановочно с ковариантным дифференцированием. Последнее уравнение (3.243) можно переписать в виде

$$\tilde{\nabla}_i w_j^{\text{L}} - \tilde{\nabla}_j w_i^{\text{L}} = e^{\mu}_i e^{\nu}_j (\tilde{\nabla}_{\mu} w_{\nu}^{\text{L}} - \tilde{\nabla}_{\nu} w_{\mu}^{\text{L}}) = e^{\mu}_i e^{\nu}_j (\partial_{\mu} w_{\nu}^{\text{L}} - \partial_{\nu} w_{\mu}^{\text{L}}) = 0,$$

т.к. переход от латинских индексов к греческим перестановочен с ковариантным дифференцированием, а символы Кристоффеля симметричны по первым двум индексам. Последнее равенство означает, что 1-форма  $dx^{\mu} w_{\mu}^{\text{L}}$  замкнута. Нетрудно проверить, что уравнение (3.241) для упругих колебаний, эквивалентно двум независимым уравнениям для поперечных и продольных колебаний:

$$\frac{1}{c_{\text{T}}^2} \ddot{w}^{\text{tr}i} - \tilde{\Delta} w^{\text{tr}i} = 0, \quad \frac{1}{c_{\text{L}}^2} \ddot{w}^{\text{L}i} - \tilde{\Delta} w^{\text{L}i} = 0, \quad (3.244)$$

где

$$c_{\text{T}}^2 := \frac{\mu}{\rho_0}, \quad c_{\text{L}}^2 := \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}$$

– квадраты скоростей звука поперечных и продольных колебаний.

Для постановки граничных условий для уравнения (3.241) в среде с дислокациями необходимо выражение для тензора деформаций  $\sigma_{ij}$ . При наличии дефектов тензор деформаций является ковариантным обобщением выражения (3.4) из классической теории упругости:

$$\epsilon_{ij} := \frac{1}{2} (e^{\mu}_i \tilde{\nabla}_{\mu} w_j + e^{\mu}_j \tilde{\nabla}_{\mu} w_i). \quad (3.245)$$

### 3.11.1 Крутильные волны в волноводе с клиновой дислокацией

В качестве примера применения геометрической теории дефектов рассмотрим распространение крутильных волн в цилиндрическом волноводе радиуса  $a$  с клиновой дислокацией, изображенном на рис. 3.9. Исходя из симметрии задачи, выберем цилиндрическую систему координат  $r, \varphi, z$ , где ось  $z$  совпадает с осью волновода. Если  $-1 < \theta < 0$ , то клин вырезается из волновода. Дислокация отсутствует, если  $\theta = 0$ . Для положительных углов дефицита,  $\theta > 0$ , клин среды добавляется к цилиндуру.

Из-за наличия дислокации метрика внутри становится неевклидовой (3.99)

$$ds^2 = \left(\frac{r}{a}\right)^{2\gamma-2} \left(dr^2 + \frac{\alpha^2 r^2}{\gamma^2} d\varphi^2\right) + dz^2, \quad (3.246)$$

где  $\alpha := 1 + \theta$ , и введена безразмерная постоянная

$$\gamma := -\theta b + \sqrt{\theta^2 b^2 + 1 + \theta}. \quad (3.247)$$

Константа  $b := \sigma / (2(1 - \sigma))$  определяется безразмерным коэффициентом Пуассона  $\sigma$ , который характеризует упругие свойства среды. Предел

$$\theta \rightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 1, \quad \gamma \rightarrow 1 \quad (3.248)$$

соответствует отсутствию дислокации.

Метрика клиновой дислокации определяет репер  $e_\mu^i$ , который мы выберем диагональным:

$$e_r^{\hat{r}} = \left(\frac{r}{a}\right)^{\gamma-1}, \quad e_\varphi^{\hat{\varphi}} = \left(\frac{r}{a}\right)^{\gamma-1} \frac{\alpha r}{\gamma}, \quad e_z^{\hat{z}} = 1, \quad (3.249)$$

где  $\mu = r, \varphi, z$  и  $i = \hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z}$ . В отсутствие дислокации,  $\gamma = 1, \alpha = 1$ , он определяет обычный ортонормальный репер в касательном пространстве в цилиндрической системе координат. Обратный репер имеет вид

$$e_r^r = \left(\frac{a}{r}\right)^{\gamma-1}, \quad e_\varphi^{\hat{\varphi}} = \left(\frac{a}{r}\right)^{\gamma-1} \frac{\gamma}{\alpha r}, \quad e_z^z = 1. \quad (3.250)$$

Для того, чтобы найти явный вид волнового оператора, необходимо вычислить символы Кристоффеля и компоненты  $\mathbb{SO}(3)$  связности. Прямые вычисления показывают, что только четыре символа Кристоффеля отличны от нуля:

$$\tilde{\Gamma}_{rr}^r = \frac{\gamma - 1}{r}, \quad \tilde{\Gamma}_{r\varphi}^\varphi = \tilde{\Gamma}_{\varphi r}^\varphi = \frac{\gamma}{r}, \quad \tilde{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r = -\frac{\alpha^2 r}{\gamma}. \quad (3.251)$$

Репер (3.249) определяет также компоненты  $\mathbb{SO}(3)$  связности

$$\omega_{\mu i}^j = -\partial_\mu e_\nu^j e_\nu^i + e_\nu^i \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho e_\rho^j.$$

Только две компоненты отличны от нуля:

$$\omega_{\varphi \hat{r}}^{\hat{\varphi}} = -\omega_{\varphi \hat{\varphi}}^{\hat{r}} = \alpha. \quad (3.252)$$

Теперь можно вычислить лапласиан

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} w_i = & g^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}^2 w_i - g^{\mu\nu} \partial_\mu \omega_{\nu i}^j w_j - 2g^{\mu\nu} \omega_{\mu i}^j \partial_\nu w_j - \\ & - g^{\mu\nu} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho (\partial_\rho w_i - \omega_{\rho i}^j w_j) + g^{\mu\nu} \omega_{\mu i}^k \omega_{\nu k}^j w_j. \end{aligned} \quad (3.253)$$

Подстановка явных выражений для символов Кристоффеля (3.251) и  $\mathbb{SO}(3)$  связности (3.252) приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} w_{\hat{r}} = & \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r w_{\hat{r}}) + \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{\gamma^2}{\alpha^2 r^2} \partial_{\varphi\varphi}^2 w_{\hat{r}} + \partial_{zz}^2 w_{\hat{r}} - \\ & - \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{\gamma^2}{r^2} w_{\hat{r}} - 2 \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{\gamma^2}{\alpha r^2} \partial_\varphi w_{\hat{\varphi}}, \\ \tilde{\Delta} w_{\hat{\varphi}} = & \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r w_{\hat{\varphi}}) + \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{\gamma^2}{\alpha^2 r^2} \partial_{\varphi\varphi}^2 w_{\hat{\varphi}} + \partial_{zz}^2 w_{\hat{\varphi}} - \\ & - \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{\gamma^2}{r^2} w_{\hat{\varphi}} + 2 \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{\gamma^2}{\alpha r^2} \partial_\varphi w_{\hat{r}}, \\ \tilde{\Delta} w_{\hat{z}} = & \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r w_{\hat{z}}) + \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{\gamma^2}{\alpha^2 r^2} \partial_{\varphi\varphi}^2 w_{\hat{z}} + \partial_{zz}^2 w_{\hat{z}}. \end{aligned} \quad (3.254)$$

Соответствующее волновое уравнение (3.241) имеет много решений. Простейшее решение описывает распространение крутильных волн, для которых только угловая компонента поля смещений  $w_{\hat{\varphi}}$  отлична от нуля и не зависит от угла  $\varphi$ :

$$w_{\hat{r}} = 0, \quad w_{\hat{\varphi}} = w_{\hat{\varphi}}(t, r, z), \quad w_{\hat{z}} = 0.$$

Легко видеть, что крутильные колебания происходят без сжатия среды, т.к. дилатация равна нулю

$$\epsilon := \tilde{\nabla}_i w^i = 0.$$

Для таких колебаний волновые уравнения  $\tilde{\square} w_{\hat{r}} = 0$  и  $\tilde{\square} w_{\hat{z}} = 0$  тождественно удовлетворяются, и остается одно волновое уравнение для поперечных колебаний

$$\frac{1}{c_T^2} \ddot{w}_{\hat{\varphi}} - \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r w_{\hat{\varphi}}) - \partial_{zz}^2 w_{\hat{\varphi}} + \left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma-2} \frac{\gamma^2}{r^2} w_{\hat{\varphi}} = 0. \quad (3.255)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде плоской волны

$$w_{\hat{\varphi}} = \operatorname{re} (W e^{i(kz - \omega t)}),$$

где  $W(r) \in \mathbb{R}$  – амплитуда волны,  $k \in \mathbb{R}$  – волновой вектор и  $\omega \in \mathbb{R}$  – частота волны. Тогда уравнение (3.255) принимает вид

$$r \partial_r (r \partial_r W) + \kappa^2 a^2 \left(\frac{r}{a}\right)^{2\gamma} W - \gamma^2 W = 0, \quad (3.256)$$

где

$$\kappa^2 := \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2. \quad (3.257)$$

Теперь введем новую радиальную координату

$$r = ar'^{\frac{1}{\gamma}}, \quad 0 < r' < 1.$$

Тогда уравнение (3.257) сводится к уравнению Бесселя

$$r'^2 \frac{d^2 W}{dr'^2} + r' \frac{dW}{dr'} + \lambda^2 r'^2 W - W = 0, \quad (3.258)$$

где

$$\lambda^2 := \frac{\kappa^2 a^2}{\gamma^2}.$$

Общее решение уравнения Бесселя содержит две постоянных интегрирования. Мы требуем, чтобы решение было конечным в нуле  $r = 0$ . Тогда амплитуда волны примет вид

$$W = C J_1 \left( \lambda \left( \frac{r}{a} \right)^\gamma \right), \quad (3.259)$$

where  $C \in \mathbb{R}$  – постоянная интегрирования и  $J_1$  – функция Бесселя первого рода и первого порядка (см., например, [?]).

Если дислокация отсутствует,  $\gamma = 1$ , то решение принимает хорошо известный вид (см., например, [?])

$$W \xrightarrow{\gamma \rightarrow 1} C J_1(\kappa r)$$

Для анализа граничных условий необходимо знать тензор деформаций (3.245). Прямые вычисления дают следующий результат

$$\begin{aligned}\epsilon_{\hat{r}\hat{r}} &= \left(\frac{a}{r}\right)^{\gamma-1} \partial_r w_{\hat{r}}, & \epsilon_{\hat{r}\hat{\varphi}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^{\gamma-1} \left[ \partial_r w_{\hat{\varphi}} + \frac{\gamma}{\alpha r} \partial_{\varphi} w_{\hat{r}} - \frac{\gamma}{r} w_{\hat{\varphi}} \right], \\ \epsilon_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} &= \left(\frac{a}{r}\right)^{\gamma-1} \frac{\gamma}{\alpha r} (\partial_{\varphi} w_{\hat{\varphi}} + \alpha w_{\hat{r}}), & \epsilon_{\hat{r}\hat{z}} &= \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{a}{r}\right)^{\gamma-1} \partial_r w_{\hat{z}} + \partial_z w_{\hat{r}} \right], \\ \epsilon_{\hat{z}\hat{z}} &= \partial_z w_{\hat{z}}, & \epsilon_{\hat{\varphi}\hat{z}} &= \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{a}{r}\right)^{\gamma-1} \frac{\gamma}{\alpha r} \partial_{\varphi} w_{\hat{z}} + \partial_z w_{\hat{\varphi}} \right].\end{aligned}\tag{3.260}$$

Для крутильных волн только две компоненты отличны от нуля:

$$\epsilon_{\hat{r}\hat{\varphi}} = \epsilon_{\hat{\varphi}\hat{r}} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^{\gamma-1} \left[ \partial_r w_{\hat{\varphi}} - \frac{\gamma}{r} w_{\hat{\varphi}} \right].$$

Мы требуем, чтобы поверхность волновода была свободной, т.е. упругие силы на поверхности цилиндра должны обращаться в нуль. Это дает граничное условие

$$\left[ \partial_r w_{\hat{\varphi}} - \frac{\gamma}{r} w_{\hat{\varphi}} \right]_{r=a}.\tag{3.261}$$

Для решения (3.259) это граничное условие принимает вид

$$\lambda J'_1(\lambda) - J_1(\lambda) = 0,$$

где штрих обозначает производную функции Бесселя по аргументу. Учтем равенство

$$J'_1(\lambda) = J_0(\lambda) - \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda).$$

Тогда граничное условие эквивалентно равенству, определяющему дисперсионное соотношение

$$\frac{\kappa a}{\gamma} = \xi \quad \Leftrightarrow \quad \omega = c_{\text{т}} \sqrt{k^2 + \frac{\gamma^2 \xi^2}{a^2}},\tag{3.262}$$

где  $\xi$  – корень уравнения

$$\xi J_0(\xi) = 2J_1(\xi).\tag{3.263}$$

Функции Бесселя  $J_{\nu}$  имеет следующую асимптотику при больших аргументах,  $\xi \gg 1$ ,  $\xi \gg \nu$ ,

$$\begin{aligned}J_0(\lambda) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \cos \left( \lambda - \frac{\pi}{4} \right), \\ J_1(\lambda) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda}} \sin \left( \lambda - \frac{\pi}{4} \right).\end{aligned}$$

Тогда уравнение (3.262) принимает вид

$$\xi \cos \left( \xi - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin \left( \xi - \frac{\pi}{4} \right).$$

Это уравнение имеет счетное число решений, каждое из которых определяет дисперсионное соотношение.

Нетрудно найти фазовую скорость крутильных колебаний  $v := \omega/k$

$$v = c_{\text{т}} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \xi^2}{a^2 k^2}}.\tag{3.264}$$

При этом групповая скорость равна

$$v_g := \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_t^2}{v}. \quad (3.265)$$

Если дислокация отсутствует, то уравнение (3.262) для  $\xi$  остается прежним. Соотношение (3.265) между фазовой и групповой скоростью также остается прежним. Поэтому наличие клиновой дислокации меняет только дисперсионное соотношение (3.262).

Для малых углов дефицита из уравнения (3.247) следует равенство

$$\gamma \approx 1 + \theta \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)}$$

и первая поправка к дисперсионному соотношению имеет вид

$$\omega \approx c_t \sqrt{k^2 + \frac{\xi^2}{a^2}} \left[ 1 + \theta \frac{1 - 2\sigma}{2(1 - \sigma)} \frac{1}{1 + \frac{k^2 a^2}{\xi^2}} \right]. \quad (3.266)$$

Она линейна по углу дефицита.

Таким образом, наличие клиновой дислокации в волноводе приводит к изменению дисперсионного соотношения для крутильных волн. Для положительных углов дефицита  $\gamma > 1$  фазовая скорость возрастает, а групповая – падает как следствие уравнений (3.264) и (3.265). Для отрицательных углов дефицита ситуация противоположна.

### 3.11.2 Крутильные волны в двустенной трубке

#### Двустенная трубка

Сначала опишем двустенную трубку с цилиндрическим дефектом в рамках теории упругости.

Пусть в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  задана цилиндрическая система координат  $\{x^\mu\} = \{r, \varphi, z\}$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ . Рассмотрим две толстостенные трубы  $r_0 \leq r \leq r_1$  и  $r_2 \leq r \leq r_3$ , сделанные из упругого материала, оси которых совпадают с осью  $z$ . Мы предполагаем, что выполнены неравенства  $r_0 < r_1 < r_2 < r_3$  (см. рис. 3.30a, где показано сечение  $z = \text{const}$ ). Теперь создадим двустенную трубку с цилиндрической дислокацией внутри следующим образом. Растинем симметрично внутреннюю трубку и сожмем внешнюю. Затем склеим внешнюю поверхность внутренней трубы с внутренней поверхностью внешней. После этого среда придет в некоторое равновесное состояние. Благодаря вращательной и трансляционной симметрии, мы получим одну двустенную трубку  $r_{\text{in}} \leq r \leq r_{\text{ex}}$ , ось которой совпадает с осью  $z$  (см. рис. 3.30b). Радиусы поверхностных цилиндров отображаются следующим образом:

$$r_0 \mapsto r_{\text{in}}, \quad r_1, r_2 \mapsto r_*, \quad r_3 \mapsto r_{\text{ex}}.$$

Склейка проходит по цилинду радиуса  $r_*$ , где расположена цилиндрическая дислокация, т.к. часть вещества между исходными трубками была удалена.

Полученная таким образом двустенная трубка обладает вращательной и трансляционной инвариантностью.

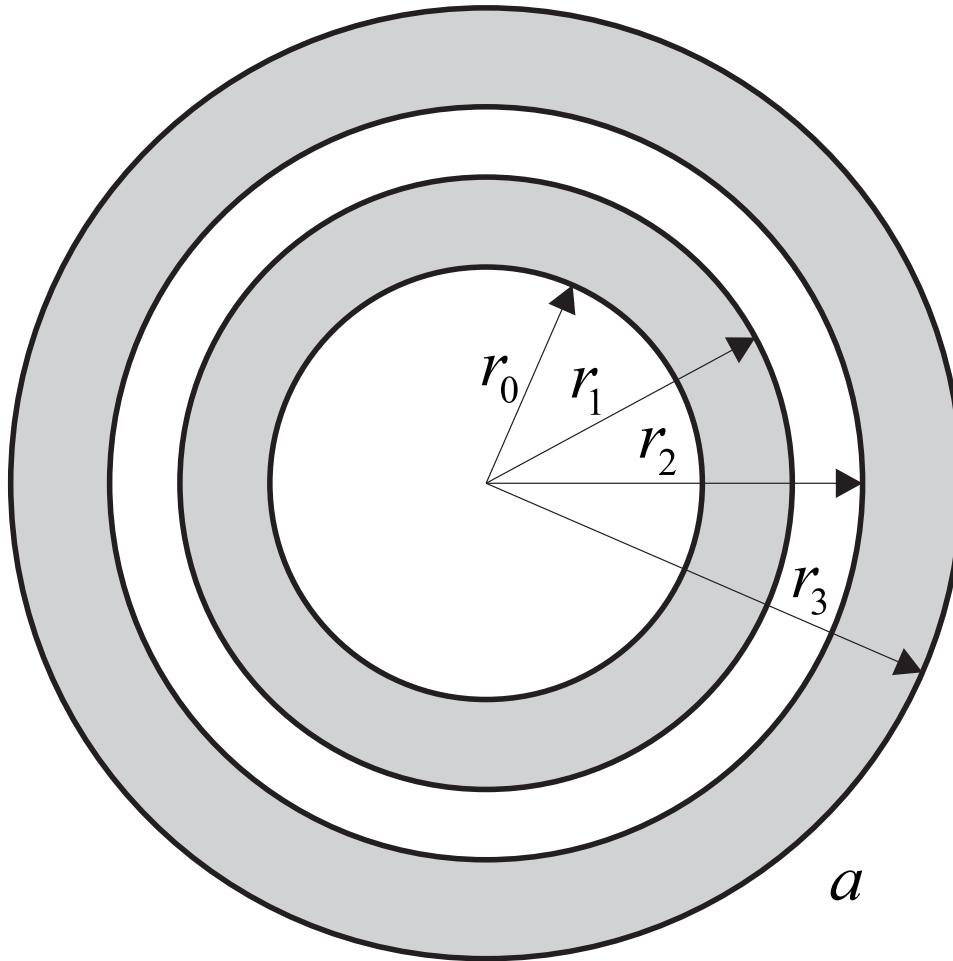


Рис. 3.30: Сечение двустенной трубы  $z = \text{const}$  до (a) и после (b) создания цилиндрической дислокации.

Построенная модель трубы можно рассматривать в качестве континуальной модели двустенной нанотрубки (см. обзоры [?, ?, ?]). Действительно, рассмотрим нанотрубку с двумя слоями атомов. Предположим, что по окружности слоев располагается соответственно 18 и 20 атомов, которые изображены жирными точками на рис. 3.30b. Естественной мерой длины в таком случае является межатомное расстояние. Тогда длина окружности претерпевает скачок, когда мы переходим от одного слоя к другому. В геометрической теории дефектов это означает, что  $g_{\varphi\varphi}$  компонента метрики в цилиндрической системе координат имеет скачок. Соответствующая модель построена ниже.

Для того, чтобы найти радиусы  $r_{\text{in}}$ ,  $r_*$  и  $r_{\text{ex}}$  необходимо решить задачу теории упругости.

Поле смещений определено равенством (3.1). Здесь проявляется преимущество геометрического подхода, т.к. до создания дислокации мы имели несвязное многообразие, а после создания – связное, и поле смещений удобнее рассматривать как функцию от точки среды после создания дефекта. В равновесном состоянии векторное поле смещений удовлетворяет уравнению равновесия

$$(1 - 2\sigma)\Delta u_i + \partial_i \partial_j u^j = 0, \quad (3.267)$$

где  $\sigma$  – коэффициент Пуассона и  $\Delta$  – лапласиан. Для удобства, мы рассматриваем

компоненты поля смещений относительно ортонормального базиса

$$u = u^{\hat{r}} e_{\hat{r}} + u^{\hat{\varphi}} e_{\hat{\varphi}} + u^{\hat{z}} e_{\hat{z}},$$

где

$$e_{\hat{r}} = \partial_r, \quad e_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{r} \partial_{\varphi}, \quad e_{\hat{z}} = \partial_z.$$

Индексы компонент относительно ортонормального базиса шляпкой помечены шляпкой:

$$\{i\} = \{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z}\}, \quad \{\mu\} = \{r, \varphi, z\}.$$

Латинские индексы поднимаются и опускаются с помощью символа Кронекера:  $u_i := u^j \delta_{ji}$ .

Дивергенция и лапласиан имеют следующий вид в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \nabla_i u^i &= \frac{1}{r} \partial_r (r u^{\hat{r}}) + \frac{1}{r} \partial_{\varphi} u^{\hat{\varphi}} + \partial_z u^{\hat{z}}, \\ \Delta u_{\hat{r}} &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u_{\hat{r}}) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} u_{\hat{r}} + \partial_{zz}^2 u_{\hat{r}} - \frac{1}{r^2} u_{\hat{r}} - \frac{2}{r^2} \partial_{\varphi} u_{\hat{\varphi}}, \\ \Delta u_{\hat{\varphi}} &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u_{\hat{\varphi}}) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} u_{\hat{\varphi}} + \partial_{zz}^2 u_{\hat{\varphi}} - \frac{1}{r^2} u_{\hat{\varphi}} + \frac{2}{r^2} \partial_{\varphi} u_{\hat{r}}, \\ \Delta u_{\hat{z}} &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u_{\hat{z}}) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} u_{\hat{z}} + \partial_{zz}^2 u_{\hat{z}}. \end{aligned} \quad (3.268)$$

Из симметрии задачи вытекает, что только радиальная компонента вектора смещений отлична от нуля, и она не зависит от полярного угла  $\varphi$  и координаты  $z$ :

$$\{u^i\} = \{u^{\hat{r}} := u(r), u^{\hat{\varphi}} = 0, u^{\hat{z}} = 0\}.$$

Уравнение (3.267) для нулевых компонент  $u_{\hat{\varphi}}$  и  $u_{\hat{z}}$  выполняется автоматически. Нетрудно проверить, что радиальная производная дивергенции,

$$\partial_{\hat{r}} \partial_j u^j = \partial_{\hat{r}} \left( \frac{1}{r} \partial_r (r u) \right) = \partial_{rr}^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u - \frac{1}{r^2} u,$$

совпадает с лапласианом

$$\Delta u_{\hat{r}} = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u) - \frac{1}{r^2} u = \partial_{rr}^2 u + \frac{1}{r} \partial_r u - \frac{1}{r^2} u.$$

Поэтому радиальная компонента уравнений (3.267) принимает вид

$$\partial_{\hat{r}} \left( \frac{1}{r} \partial_r (r u) \right) = 0. \quad (3.269)$$

Общее решение данного уравнения зависит от двух постоянных интегрирования:

$$u = c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad c_{1,2} = \text{const.}$$

Отметим, что уравнение равновесия (3.269) не зависит от коэффициента Пуассона  $\sigma$ . Это значит, что цилиндрическая дислокация является геометрическим дефектом.

Для определения постоянных интегрирования наложим граничные условия. С этой целью введем обозначение для внутренней и внешней трубок:

$$u = \begin{cases} u_{\text{in}}, & r_{\text{in}} \leq r \leq r_*, \\ u_{\text{ex}}, & r_* \leq r \leq r_{\text{ex}}. \end{cases}$$

Теперь необходимо наложить граничные условия. Мы предполагаем, что поверхность двустенной трубы является свободной, т.е. тензор деформаций на границе равен нулю:

$$\frac{du_{\text{in}}}{dr} \Big|_{r=r_{\text{in}}} = 0, \quad \frac{du_{\text{ex}}}{dr} \Big|_{r=r_{\text{ex}}} = 0. \quad (3.270)$$

Мы также предполагаем, что среды находится в равновесии. Это значит, что на поверхности склейки упругие силы равны:

$$\frac{du_{\text{in}}}{dr} \Big|_{r=r_*} = \frac{du_{\text{ex}}}{dr} \Big|_{r=r_*}. \quad (3.271)$$

Каждое из граничных условий (3.270) определяет одну постоянную интегрирования для внутреннего и внешнего решения:

$$\begin{aligned} u_{\text{in}} &= a \left( r + \frac{r_{\text{in}}^2}{r} \right) > 0, \quad a = \text{const} > 0, \\ u_{\text{ex}} &= -b \left( \frac{1}{r} + \frac{r}{r_{\text{ex}}^2} \right) < 0, \quad b = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (3.272)$$

Знаки постоянных интегрирования  $a$  и  $b$  подобраны таким образом, что поле смещений положительно и отрицательно соответственно для внутренней и внешней трубок. Это согласуется с поставленной задачей.

Подстановка полученных решений (3.272) в условие склейки (3.271) определяет отношение постоянных интегрирования:

$$r_*^2 = r_{\text{ex}}^2 \frac{ar_{\text{in}}^2 + b}{ar_{\text{ex}}^2 + b} \quad \Leftrightarrow \quad b = ar_{\text{ex}}^2 \frac{r_*^2 - r_{\text{in}}^2}{r_{\text{ex}}^2 - r_*^2}. \quad (3.273)$$

Условие сплошности среды имеет вид

$$\begin{aligned} r_* &= r_1 + a \left( r_* + \frac{r_{\text{in}}^2}{r_*} \right), \\ r_* &= r_2 - b \left( \frac{1}{r_*} + \frac{r_*}{r_{\text{ex}}^2} \right). \end{aligned} \quad (3.274)$$

Из этих равенств находим расстояние между начальными трубками, которое характеризует величину дефекта:

$$l := r_2 - r_1 = 2ar_* \frac{r_{\text{ex}}^2 - r_{\text{in}}^2}{r_{\text{ex}}^2 - r_*^2}, \quad (3.275)$$

где было использовано выражение для  $b$  (3.273). После этого определяются все постоянные интегрирования:

$$a = \frac{l}{2r_*} \frac{r_{\text{ex}}^2 - r_*^2}{r_{\text{ex}}^2 - r_{\text{in}}^2}, \quad b = \frac{lr_{\text{ex}}^2}{2r_*} \frac{r_*^2 - r_{\text{in}}^2}{r_{\text{ex}}^2 - r_*^2}. \quad (3.276)$$

Таким образом, найдено векторное поле смещений для двустенной трубы

$$u(r) = \begin{cases} a \left( r + \frac{r_{\text{in}}^2}{r} \right) > 0, & r_{\text{in}} \leq r < r_*, \\ -b \left( \frac{1}{r} + \frac{r}{r_{\text{ex}}^2} \right) < 0, & r_* < r \leq r_{\text{ex}}, \end{cases} \quad (3.277)$$

где постоянные  $a$  и  $b$  определены равенствами (3.276). Качественное поведение этого векторного поля показано на рис. 3.31a. Дифференцирование этого векторного поля в областях  $r_{\text{in}} < r < r_*$ ,  $r_* < r < r_{\text{ex}}$  и его продолжение в точку  $r_*$  по непрерывности дает функцию

$$v(r) := \frac{du}{dr} = \begin{cases} a \left(1 - \frac{r_{\text{in}}^2}{r^2}\right) > 0, & r_{\text{in}} \leq r \leq r_*, \\ b \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_{\text{ex}}^2}\right) > 0, & r_* \leq r \leq r_{\text{ex}}, \end{cases} \quad (3.278)$$

которая показана на рис. 3.31b.

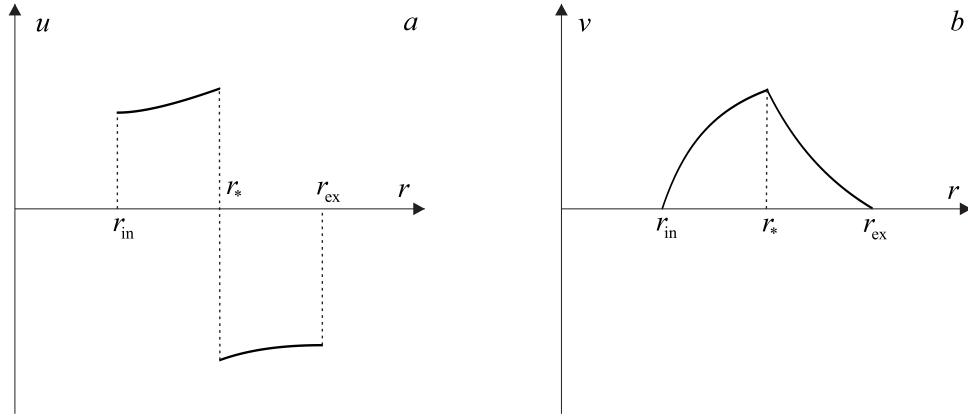


Рис. 3.31: Качественное поведение радиальной компоненты векторного поля смещений для двустенной трубы (a). Производная поля смещений (b).

Отметим, что условие сплошности среды (3.274) приводит к скачку вектора смещений в точке  $r_*$ :

$$l := r_2 - r_1 = u_{\text{in}}(r_*) - u_{\text{ex}}(r_*).$$

Поскольку векторное поле  $u$  имеет скачок в точке  $r_*$ , то формальная производная  $u$  содержит  $\delta(r - r_*)$ . Эта  $\delta$ -функция отбрасывается в геометрической теории дефектов.

Двустенная трубка параметризуется четырьмя постоянными  $r_0, r_1, r_2, r_3$  или  $r_{\text{in}}, r_*, r_{\text{ex}}, l$ . Формулы (3.276) определяют постоянные  $a, b$  и, следовательно, векторное поле смещений через второй набор параметров. Из определения (3.1) вытекает, что между двумя наборами параметров существует взаимно однозначное соответствие.

Теперь вычислим метрику, индуцированную в двустенной трубке. По определению она имеет вид

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu} \overset{\circ}{g}_{\rho\sigma}(y), \quad (3.279)$$

где  $\overset{\circ}{g}_{\rho\sigma}(y)$  – евклидова метрика в цилиндрической системе координат. Соотношение между координатами до и после создания дислокации задано равенством (3.1). Обозначим цилиндрические координаты до и после создания дефекта соответственно через  $\{y^\mu\} = \{\tilde{r}, \varphi, z\}$  и  $\{x^\mu\} = \{r, \varphi, z\}$ . Отметим, что вектор смещения рассматривается в координатах  $r, \varphi, z$  после создания дислокации. Тогда исходная евклидова метрика имеет вид

$$ds^2 = \overset{\circ}{g}_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Подстановка сюда равенства  $\tilde{r} = r - u$ , где вектор смещения задан уравнением (3.277), приводит к индуцированной метрике в двустенной трубке

$$ds^2 = (1 - v)^2 dr^2 + (r - u)^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (3.280)$$

Компонента  $g_{rr} = (1 - v)^2$  этой метрики является непрерывной функцией, а ее производная имеет скачок в точке  $r_*$ . Компонента  $g_{\varphi\varphi} = (r - u)^2$  в точке  $r = r_*$  имеет скачок.

Элемент объема для метрики (3.280) равен

$$\sqrt{|g|} = (1 - v)(r - u).$$

Правая часть этого равенства положительна, т.к. положителен каждый из сомножителей. Второй сомножитель  $r - u = y > 0$  положителен по построению. Первый сомножитель также положителен. Действительно, функция  $v$  имеет максимум в точке  $r = r_*$ . При этом выполнено неравенство

$$v(r_*) = a \frac{r_*^2 - r_{\text{in}}^2}{r_*^2} = \frac{r_* - r_1}{r_*} \frac{r_*^2 - r_{\text{in}}^2}{r_*^2 + r_{\text{in}}^2} < 1,$$

где использовано выражение (3.274) для  $a$ .

Длина окружности является геометрическим инвариантом. Она равна  $2\pi(r - u(r))$  для метрики (3.279). Когда мы переходим из внутренней трубы к внешней, она имеет скачок  $2\pi l$ , где  $l$  – расстояние между трубками до создания дислокации. Это наблюдение находится в согласии с континуальной моделью двустенной трубы.

Метрика (3.280) получена полностью в рамках теории упругости. К удивлению эта метрика удовлетворяет нелинейным уравнениям Эйнштейна с источником в виде  $\delta'$ -функции. Это было доказано в [?] для  $r_0 = 0$  и  $r_3 = \infty$ . Нетрудно проверить, что это верно и для конечных значений  $r_0$  и  $r_3$ . Действительно, тензор Эйнштейна равен нулю всюду (пустое пространство) за исключением поверхности склейки, а сингулярность здесь такая же. Поэтому метрика (3.280) возникает в геометрической теории дефектов как решение уравнений Эйнштейна. Это – исключительный случай, поскольку, как правило, метрика, полученная в рамках теории упругости, отличается от метрики в геометрической теории дефектов (см., например, раздел 3.8.2).

### Крутильные волны в двустенной трубке

По определению векторное поле смещений  $w$ , описывающее упругие колебания, удовлетворяет волновому уравнению

$$\rho_0 \ddot{w}_i - \mu \Delta w_i - (\lambda + \mu) \nabla_i \nabla_j w^j = 0, \quad (3.281)$$

где  $\rho_0$  – плотность среды,  $\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе, а ковариантная производная  $\nabla_i := e^\mu_j \nabla_\mu$  и оператор Лапласа–Бельтрами  $\Delta := g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$  определены метрикой (3.280) двустенной трубы. Здесь  $e^\mu_i$  – обратный репер,  $e^\mu_i e_\mu^j = \delta_i^j$ .

Волновое уравнение (3.281) ковариантно относительно общих преобразований координат, и может быть решено в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  с метрикой (3.280) после создания дефекта. Однако проще поступить по другому. Мы решим волновое уравнение в исходной цилиндрической системе координат  $y := \tilde{r}, \varphi, z$ , где координата  $y$  обозначает старый радиус до создания дислокации

$$y := r - u,$$

а после этого наложим необходимые граничные условия. Это проще т.к. метрика в исходной системе координат является евклидовой.

Рассмотрим крутильные колебания. В этом случае отлична от нуля только угловая компонента вектора смещений:

$$\{w^i\} = \{w^{\hat{r}} = 0, w^{\hat{\varphi}} = w^{\hat{\varphi}}(t, r, z), w^{\hat{z}} = 0\}.$$

Из соображений симметрии угловая компонента  $w^{\hat{\varphi}}$  не зависит от угла  $\varphi$ . Для такого векторного поля  $\hat{r}$  и  $\hat{z}$  компоненты уравнения (3.281) автоматически удовлетворяются. Дилатация для крутильных волн обращается в нуль

$$\epsilon := \partial_i w^i = 0,$$

т.е. крутильные колебания происходят без сжатия среды.

Ищем решение уравнения (3.281) в виде плоской волны

$$w_{\hat{\varphi}} = \mathbf{re} [W(y) e^{i(kz - \omega t)}], \quad (3.282)$$

где  $W(y)$  – амплитуда,  $k \in \mathbb{R}$  – волновой вектор и  $\omega \in \mathbb{R}$  – частота волны. Тогда уравнение (3.281) в цилиндрических координатах принимает вид

$$y^2 \frac{d^2 U}{dy^2} + y \frac{dU}{dy} + (\kappa^2 y^2 - 1)U = 0, \quad (3.283)$$

где

$$\kappa^2 := \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2, \quad c_T^2 := \frac{\mu}{\rho_0}. \quad (3.284)$$

Общее решение данного уравнения содержит две постоянных интегрирования. Поэтому решение для внутренней и внешней трубок можно записать следующим образом

$$W = \begin{cases} W_{\text{in}} = C_1 J_1(\kappa y) + C_2 N_1(\kappa y), & r_0 \leq y \leq r_1, \\ W_{\text{ex}} = C_3 J_1(\kappa y) + C_4 N_1(\kappa y), & r_2 \leq y \leq r_3, \end{cases} \quad (3.285)$$

где  $J_1$  – функция Бесселя первого рода и первого порядка,  $N_1$  – функция Неймана первого порядка (см., например, [?]) и  $C_{1,2,3,4}$  – постоянные интегрирования.

Для того, чтобы найти постоянные интегрирования, наложим граничные условия. Предположим, что внутренняя и внешняя поверхности двустенной трубы являются свободными, т.е. тензор деформаций равен нулю:

$$\left. \frac{dW_{\text{in}}}{dr} \right|_{r=r_{\text{in}}} = 0, \quad \left. \frac{dW_{\text{ex}}}{dr} \right|_{r=r_{\text{ex}}} = 0.$$

Поскольку

$$\frac{dW}{dr} = \frac{dy}{dr} \frac{dW}{dy} = (1 - v) \frac{dW}{dy},$$

где  $v(r_{\text{in}}) = v(r_{\text{ex}}) = 0$ , эти уравнения в исходной системе координат принимают вид

$$\begin{aligned} C_1 J'_1(z_0) + C_2 N'_1(z_0) &= 0 \\ C_3 J'_1(z_3) + C_4 N'_1(z_3) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$z := \kappa y,$$

и штрих обозначает дифференцирование по аргументу  $z$ . Полученные условия определяют две постоянные интегрирования:

$$\begin{aligned} C_2 &= -k_0 C_1, & k_0 &:= \frac{J'_1(z_0)}{N'_1(z_0)}, \\ C_4 &= -k_3 C_1, & k_3 &:= \frac{J'_1(z_3)}{N'_1(z_3)}. \end{aligned} \quad (3.286)$$

На поверхности склейки наложим два граничных условия: сплошность среды и равенство упругих напряжений,

$$W_{\text{in}}(r_*) = W_{\text{ex}}(r_*), \quad \left. \frac{dW_{\text{in}}}{dr} \right|_{r=r_*} = \left. \frac{dW_{\text{ex}}}{dr} \right|_{r=r_*}. \quad (3.287)$$

В результате возникают два уравнения

$$\begin{aligned} C_1 [J_1(z_1) - k_0 N_1(z_1)] - C_3 [J_1(z_2) - k_3 N_1(z_2)] &= 0, \\ C_1 [J'_1(z_1) - k_0 N'_1(z_1)] - C_3 [J'_1(z_2) - k_3 N'_1(z_2)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.288)$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости этой системы уравнений является равенство нулю определителя:

$$\begin{aligned} [J_1(z_1) - k_0 N_1(z_1)] [J'_1(z_2) - k_3 N'_1(z_2)] - \\ - [J_1(z_2) - k_3 N_1(z_2)] [J'_1(z_1) - k_0 N'_1(z_1)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.289)$$

Для заданных параметров двустенной трубы  $r_0, r_1, r_2$  и  $r_3$ , это равенство представляет собой уравнение на постоянную  $\kappa$ . Пусть  $\kappa$  является корнем уравнения (3.289), тогда равенство

$$\omega = c_{\text{T}} \sqrt{k^2 + \kappa^2}. \quad (3.290)$$

задает уравнение дисперсии для крутильных волн.

Фазовая скорость крутильных волн  $v := \omega/k$  легко находится из дисперсионного соотношения (3.290):

$$v = c_{\text{T}} \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{k^2}}. \quad (3.291)$$

Легко также вычисляется групповая скорость

$$v_{\text{g}} := \frac{d\omega}{dk} = \frac{c_{\text{T}}^2}{v}. \quad (3.292)$$

Мы видим, что фазовая скорость всегда больше поперечной скорости, а групповая – меньше. Дисперсионное соотношение (3.290) зависит от параметров двустенной трубы через соотношение (3.289).

Помимо чисто академического интереса, двустенная трубка может являться континуальной моделью двухслойной нанотрубки.

## 3.12 Примесь в поле клиновой дислокации

Рассмотрим упругую среду с клиновой дислокацией, которая содержит один атом примеси или вакансию. Если считать влияние примеси на распределение упругих напряжений малым по сравнению с упругими напряжениями, вызванными самой

дислокацией, то можно полагать, что движение примеси происходит в трехмерном пространстве с нетривиальной метрикой (3.99). В геометрическом подходе мы считаем, что потенциальная энергия взаимодействия примеси с дислокацией равна нулю, и все взаимодействие происходит за счет изменения кинетической энергии, куда явным образом входит нетривиальная метрика.

Решим соответствующую квантово-механическую задачу. Рассмотрим связанные состояния примеси при наличии клиновой дислокации,двигающейся в цилиндре радиуса  $R$ . При этом мы предполагаем, что ось цилиндра совпадает с ядром дислокации. Стационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\tilde{\Delta}\Psi = E\Psi, \quad (3.293)$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка,  $M$ ,  $\Psi$  и  $E$  – масса, волновая функция и энергия примеси. Нетривиальность взаимодействия примеси с дислокацией сводится к нетривиальному оператору Лапласа–Бельтрами

$$\tilde{\Delta}\Psi = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi),$$

где метрика была ранее найдена (см. (3.99)) и  $g := \det g_{\mu\nu}$ .

Исходя из симметрии задачи, будем решать уравнение Шредингера (3.293) в цилиндрических координатах методом разделения переменных. Пусть

$$\Psi(r, \varphi, z) = Z(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(r) e^{im\varphi},$$

где для нормированной функции  $Z(z)$  имеются две следующие возможности. Если вдоль оси  $z$  примесь движется свободно с импульсом  $\hbar k$ , то

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikz}.$$

Если же ее движение ограничено плоскостями  $z = 0$  и  $z = z_0$ , то

$$Z(z) = \sqrt{\frac{2}{z_0}} \sin(k_l z), \quad k_l = \frac{\pi l}{z_0}.$$

В дальнейшем целочисленный индекс  $l$ , возникающий при ограниченном движении, мы для краткости опустим, имея в виду обе возможности.

Условие целочисленности постоянной  $m$  (собственного значения проекции момента импульса на ось  $z$ ) возникает из условия периодичности

$$\Psi(r, \varphi, z) = \Psi(r, \varphi + 2\pi, z).$$

Тогда для радиальной волновой функции  $\psi_m(r)$  получаем уравнение

$$\frac{R^{2\gamma-2}}{r^{2\gamma-1}}\partial_r(r\partial_r\psi_m) + \left(\frac{2ME}{\hbar^2} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\frac{R^{2\gamma-2}}{r^{2\gamma}}m^2 - k^2\right)\psi_m = 0. \quad (3.294)$$

Введем новую радиальную координату

$$\rho := \frac{r^\gamma}{\gamma R^{\gamma-1}}.$$

С точностью до постоянной, это – преобразование (3.96), (3.98). Тогда радиальное уравнение примет вид

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \psi_m) + \left( \beta^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2} \right) \psi_m = 0, \quad (3.295)$$

где

$$\beta^2 := \frac{2ME}{\hbar^2} - k^2, \quad \nu := \frac{|m|}{\alpha} > 0.$$

Это есть уравнение Бесселя. Будем решать его при граничном условии

$$\psi_m|_{\rho=R/\gamma} = 0, \quad (3.296)$$

что соответствует движению примеси внутри цилиндра с непроницаемой границей. Общее решение уравнения Бесселя (3.295) содержит две постоянные интегрирования

$$\psi_m = c_m J_\nu(\beta\rho) + d_m N_\nu(\beta\rho), \quad c_m, d_m = \text{const},$$

где  $J_\nu$  и  $N_\nu$  – функции Бесселя и Неймана порядка  $\nu$  [?]. Из условия ограниченности волновой функции на оси цилиндра следует, что  $d_m = 0$ . Постоянные интегрирования  $c_m$  находятся из условия нормировки

$$\int_0^R dr r |\psi_m|^2 = 1.$$

Из граничного условия (3.296) следует уравнение на  $\beta$

$$J_\nu(\beta R/\gamma) = 0, \quad (3.297)$$

которое определяет уровни энергии связанных состояний. Хорошо известно, что при вещественных  $\nu > -1$  и  $R/\gamma$ , это уравнение имеет только вещественные нули. Положительные нули образуют бесконечное счетное множество, и все они простые [?]. Отсюда следует неравенство

$$\beta^2 = \frac{2ME}{\hbar^2} - k^2 \geq 0.$$

Пронумеруем положительные нули уравнения (3.297) индексом  $n = 1, 2, \dots$  (главное квантовое число):  $\beta \rightarrow \beta_n(m, \alpha, \gamma, R)$ . Тогда спектр собственных состояний имеет вид

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2M} (k^2 + \beta_n^2). \quad (3.298)$$

При больших радиусах ( $\beta\rho \gg 1$  и  $\beta\rho \gg \nu$ ) справедлива асимптотика

$$J_\nu(\beta\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\rho}} \cos \left( \beta\rho - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Отсюда следует явное выражение для спектра

$$\beta_n = \frac{\gamma\pi}{R} \left( n + \frac{|m|}{2\alpha} - \frac{1}{4} \right). \quad (3.299)$$

В отсутствие дефекта  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\rho = r$ , и радиальные функции  $\psi_m$  выражаются через функции Бесселя целого порядка  $\nu = |m|$ . В этом случае спектр энергии собственных состояний зависит только от размеров цилиндра. При наличии клиновой

дислокации функции Бесселя в общем случае будут иметь нецелый порядок. При этом спектр уровней энергии собственных состояний приобретает зависимость от угла дефицита клиновой дислокации  $\theta$  и коэффициента Пуассона  $\sigma$ , характеризующего упругие свойства среды.

Если масса примеси и вакансии определена интегралом (3.16), то для примеси  $M > 0$  и собственные значения энергии положительны. Для вакансии  $M < 0$  и собственные значения энергии отрицательны. В этом случае спектр энергии не ограничен снизу, что вызывает серьезные проблемы для физической интерпретации.

Рассмотренный пример показывает, как в первом приближении учитывается влияние дефектов в геометрической подходе. Если расчеты в некоторой задаче проведены в упругой среде без дефектов, то для учета влияния дефектов необходимо заменить плоскую евклидову метрику на нетривиальную метрику, описывающую данное распределение дефектов. Математически эта задача может оказаться сложной, т.к. для определения метрики необходимо решить трехмерные уравнения Эйнштейна. Однако принципиальных трудностей здесь нет: влияние дислокаций сводится к изменению метрики.

Проведенное геометрическое построение в теории дефектов можно обратить, и рассматривать гравитационное взаимодействие масс во Вселенной, как взаимодействие дефектов упругого эфира. При этом точечные массы будут соответствовать точечным дефектам (вакансиям и примесям), а космические струны [?, ?] – клиновым дислокациям. При таком взгляде на гравитацию возникает вопрос об упругой калибровке, которой в геометрической теории дефектов придается прямой физический смысл. Если принять точку зрения из теории дефектов, то упругие свойства эфира соответствуют некоторому значению коэффициента Пуассона, который можно измерить экспериментально.

Представляется интересным и важным для приложений включить в рассматриваемый статический подход время для описания движения дефектов в среде. Такая модель в настоящее время отсутствует. С геометрической точки зрения обобщение провести несложно, по крайней мере, в принципе. Достаточно заменить евклидово пространство  $\mathbb{R}^3$  на пространство Минковского  $\mathbb{R}^{1,3}$  и написать подходящий лагранжиан, квадратичный по тензору кривизны и кручения, что соответствует настоящей модели гравитации с кручением. Одна из возникающих трудностей заключается в физической интерпретации дополнительных компонент репера и лоренцевой связности, которые содержат временной индекс. Физический смысл временного компонента репера  $e_0^i \rightarrow \partial_0 u^i = v^i$  прост – это скорость точки среды. Такая интерпретация естественна с физической точки зрения, поскольку движение непрерывно распределенных дислокаций означает течение среды. Действительно, жидкость можно представить, как упругую среду с непрерывным распределением подвижных дислокаций. Это значит, что динамическая теория дефектов, основанная на геометрии Римана–Картана, должна включать в себя гидродинамику. В настоящее время неясно, как это происходит. Остается также неясной физическая интерпретация других компонент репера и лоренцевой связности с временным индексом.