ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Г.Сергеев

1. Лекция VIII. $\mathcal{T}$-фредгольмовы операторы

1.1. **Пространства гладких элементов.** Пусть E есть банахово пространство, наделенное изометрическим действием β группы $G = \mathbb{T}^{n_0} \oplus \mathbb{R}^{n_1}$. Это действие предполагается сильно непрерывным, т.е. отображение $G \ni t \mapsto \beta_t(x)$ непрерывно по норме для любого $x \in E$. Его производная в направлении $v \in \mathbb{R}^n$ задается формулой

$$\nabla_v x = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\beta_{v\epsilon}(x) - x}{\epsilon} \ .$$

Если E – банахова алгебра, а β – гомоморфизм алгебр, то ∇_v является дифференцированием E.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – стандартный базис алгебры Ли группы G и $\nabla_1, \dots, \nabla_n$ – ассоциированные с этими векторами дифференцирования. Тогда *пространство m раз дифференцируемых элементов* есть

$$C^m(E, \beta) = \{x \in E : x \in \mathrm{Dom}(\nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_k}) \ , \quad \text{где } i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\} \text{ для любого } 0 \le k \le m\},$$

а *пространство C^∞-гладких элементов* есть

$$C^\infty(E, \beta) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(E, \beta).$$

Пространство $C^m(E, \beta)$ является банаховой алгеброй с нормой

$$\|x\|_{\beta,m} = \sum_{0 \le k \le m} \|\nabla^j x\|,$$

где $j = (j_1, \dots, j_k)$ – мультииндекс и $\nabla^j = \nabla_{j_1} \dots \nabla_{j_k}$. Семейство указанных норм задает на $C^\infty(E, \beta)$ структуру пространства Фреше.

Пусть, теперь, $E = A$ есть C^*-алгебра с (сильно) непрерывным действием α группы G и допустимым α-инвариантным следом $\mathcal{T}$. Обозначим через A^0 конус положительных элементов $a \in A$, для которых $\mathcal{T}(a) < \infty$. Будем предполагать, что A^0 плотно в множестве положительных элементов из A. Тогда линейная оболочка A^0, обозначаемая через $A_\mathcal{T}$, является банаховой подалгеброй в A с нормой

$$\|a\|_\mathcal{T} = \|a\| + \mathcal{T}(|a|).$$

Рассмотрим алгебру Фреше

$$A_{\mathcal{T},\alpha} = C^\infty(A_\mathcal{T}, \alpha).$$

Эта алгебра плотна в A и замкнута относительно голоморфного функционального исчисления. Благодаря чему все элементы из K-групп можно реализовать в виде проекторов или унитарных операторов в матричных алгебрах над $A_{\mathcal{T},\alpha}$.

Перейдем теперь к W^*-алгебрам фон Неймана. Пусть R – такая алгебра, наделенная допустимым следом $\mathcal{T}$. *Нижней гранью* или *носителем* элемента $a \in R$ называется проектор вида

$$\mathrm{supp}(a) = \inf\{e \in \mathcal{P}(R) : ae = a\},$$

где $\mathcal{P}(R)$ есть множество проекторов в R. Обозначим через S^0 множество положительных элементов $x \in R$ с $\mathcal{T}(\mathrm{supp}(x)) < \infty$. Тогда линейная оболочка $S_\mathcal{T}$ множества S^0 будет слабо плотна в R. Более того, формула

$$\|a\|_p := \mathcal{T}(|a|^p)^{1/p}$$

задает норму на $S_\mathcal{T}$ при $1 \leq p < \infty$. С учетом этого можно определить *пространство* $L^p(R)$ как пополнение $S_\mathcal{T}$ по введенной норме.

Перейдем к определению соболевских пространств для W^*-алгебр. Пусть (R, G, α) есть W^*-динамическая система с α-инвариантным допустимым следом $\mathcal{T}$. Действие α продолжается до изометрического действия на $L^p(R)$, которое сильно непрерывно относительно L^p-нормы при $1 \leq p < \infty$.

Введем соболевские пространства

$$W_p^m(R) = C^m(L^p(R), \alpha)$$

с нормой

$$\|x\|_{W_p^m} = \sum_{0 \leq k \leq m} \|\nabla^j x\|_p.$$

1.2. **$\mathcal{T}$-фредгольмовы операторы.** Пусть R есть алгебра фон Неймана, наделенная допустимым следом $\mathcal{T}$. Проектор $e \in R$ называется *конечным*, если он принадлежит $L^1(R)$. Обозначим через $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ наименьший алгебраический идеал в R, содержащий все конечные проекторы.

Его замыкание $\mathcal{K}_\mathcal{T}$ по норме называется идеалом *$\mathcal{T}$-компактных операторов*. Этот идеал является C^*-алгеброй и для всех $1 \leq p < \infty$ совпадает с замыканием по норме пространства $R \cap L^p(R)$, т.е.

$$\mathcal{K}_\mathcal{T} = \overline{R \cap L^p(R)}.$$

Предложение 1. *Проектор $e \in \mathcal{K}_\mathcal{T}$ всегда конечен, т.е. принадлежит $\mathcal{F}_\mathcal{T}$. Алгебра $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ замкнута относительно голоморфного функционального исчисления внутри $\mathcal{K}_\mathcal{T}$. Вложение i этой алгебры в $\mathcal{K}_\mathcal{T}$ индуцирует изоморфизм K_0-групп*

$$i_* : K_0(\mathcal{F}_\mathcal{T}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}_\mathcal{T}).$$

Обозначим через $Q_\mathcal{T} = R/\mathcal{K}_\mathcal{T}$ *алгебру Калкина*, также являющуюся C^*-алгеброй. Элемент $T \in R$ называется *$\mathcal{T}$-фредгольмовым*, если его образ $T + \mathcal{K}_\mathcal{T}$ в алгебре $Q_\mathcal{T} = R/\mathcal{K}_\mathcal{T}$ обратим в $Q_\mathcal{T}$.

Для произвольного $a \in R$ обозначим через N_a проекцию на ядро a, а через R_a проекцию на замыкание образа a. Иными словами,

$$N_a = \sup\{e \in \mathcal{P}(R) : \ ae = 0\} \ , \quad R_a = \inf\{e \in \mathcal{P}(R) : \ ea = a\} \ ,$$
где $\mathcal{P}(R)$ есть множество проекторов в R.

Теорема 1. *Элемент $a \in R$ является $\mathcal{T}$-фредгольмовым тогда и только тогда, когда существует проектор $e \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$ такой, что*

$$N_a \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}} \ , \quad Ran(1-e) \subset Ran(a).$$

Доказательство этой теоремы можно найти в статье, приведенной в списке литературы к этой лекции.

Из второго условия вытекает, что $1 - R_a \leq e \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$. Заметим к тому же, что $\mathcal{T}$-фредгольмов оператор не обязан иметь замкнутый образ. Отсюда следует, в частности, что

$$N_{a^*} = 1 - R_a \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}.$$

Поэтому для $\mathcal{T}$-фредгольмова оператора a можно определить два индекса, а именно, K_0-*индекс*

$$\mathrm{ind}(a) = [N_a]_0 - [N_{a^*}]_0 \in K_0(\mathcal{K}_{\mathcal{T}})$$

и $\mathcal{T}$-*индекс*

$$\mathcal{T} - \mathrm{ind}(a) = \mathcal{T}(N_a) - \mathcal{T}(N_{a^*}) \in \mathbb{R}.$$

K_0-индекс тесно связан с индексным отображением

$$\mathrm{Ind} : K_1(Q_{\mathcal{T}}) \longrightarrow K_0(\mathcal{K}_{\mathcal{T}}),$$

порождаемым точной последовательностью

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{T}} \longrightarrow R \longrightarrow Q_{\mathcal{T}} \longrightarrow 0.$$

Действительно, рассмотрим полярное разложение элемента $a \in R : a = u|a|$, где $u \in R$ есть единственная частичная изометрия, для которой $1 - u^*u = N_a$ и $1 - uu^* = N_{a^*}$. Образ $u + \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$ в алгебре Калкина является унитарным элементом в $Q + \mathcal{T}$, так что

$$\mathrm{Ind}([u + \mathcal{K}_{\mathcal{T}}]_1) = [1 - u^*u]_0 - [1 - uu^*]_0 = [N_a]_0 - [N_{a^*}]_0 = \mathrm{ind}(a).$$

Задача 1. (1) Если $a \in R$ является $\mathcal{T}$-фредгольмовым, то найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $b \in R$ с нормой $\|b\| < \delta$ элемент $a + b$ также является $\mathcal{T}$-фредгольмовым и $\mathcal{T} - \mathrm{ind}(a + b) = \mathcal{T} - \mathrm{ind}(a)$; тем самым, множество $\mathcal{T}$-фредгольмовых операторов открыто в операторной топологии и $\mathcal{T}$-индекс постоянен на любой связной компоненте;

(2) Если элемент $a \in R$ является $\mathcal{T}$-фредгольмовым и $k \in \mathcal{K}_{\mathcal{T}}$, то сумма $a + k$ также является $\mathcal{T}$-фредгольмовой и $\mathcal{T} - \mathrm{ind}(a + k) = \mathcal{T} - \mathrm{ind}(a)$.

Список литературы

[1] H.Schulz-Baldes, T.Stoiber, *Harmonic analysis in operator algebras and its applications to index theory and topological solid state systems*, arXiv:2206.07781v2(math-ph), 2022.