ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Г.Сергеев

1. Лекция X. Алгебры твердых тел

1.1. C^*-алгебры с $\mathbb{Z}^d$-действием.

Определение 1. Пусть B есть C^*-алгебра с $\mathbb{Z}^d$-действием $\gamma : B \times \mathbb{Z}^d \to B$. Обозначим через $B \rtimes_\gamma \mathbb{Z}^d$ универсальную C^*-алгебру, порождаемую d унитарными образующими $u_1, \dots, u_d$ и представлением алгебры B, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$u_i u_j = u_j u_i, \quad f u_j = u_j(\gamma_{e_j}(f)) \ ,$$

где $f \in B$, $i, j = 1, \dots, d$, $e_1, \dots, e_d$ – стардартный базис в $\mathbb{Z}^d$. Универсальность C^*-алгебры означает, что любая пара (π, u), состоящая из невырожденного представления $\pi : B \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и d унитарных операторов $u_1, \dots, u_d \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, действующих в этом пространстве и удовлетворяющих выписанным выше коммутационным соотношениям, порождает единственный сюръективный гомоморфизм

$$B \rtimes_\gamma \mathbb{Z}^d \longrightarrow C^* - \mathrm{span}\pi(B), u_1, \dots, u_d,$$

переводящий образующие в образующие.

Алгебру $B \rtimes_\gamma \mathbb{Z}^d$ можно рассматривать также как скрещенное произведение, в котором представления коммутационных соотношений, выписанных выше, отвечают ковариантному представлению динамической системы $B \rtimes_\gamma \mathbb{Z}^d$.

Алгебра $B \rtimes_\gamma \mathbb{Z}^d$ является пополнением по универсальной C^*-норме алгебры, порождаемой рядами Фурье, составленными из мономов $u^x = u_1^{x_1} \dots u_d^{x_d}$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$, следующего вида

$$a = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f_x u^x,$$

где коэффициенты $f_x \in B$ отличны от нуля только для конечного числа $x \in \mathbb{Z}^d$.

По этим данным можно построить (сильно) непрерывное $\mathbb{T}^d$-действие ρ, которое действует на образующих алгебры $B \rtimes_\gamma \mathbb{Z}^d$ по формуле

$$\rho_k(f) = f, \quad \rho_k(u^x) = \overline{\langle x, k \rangle} u^x = e^{2\pi i k \cdot x} u^x,$$

где $f \in B$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $k \in \mathbb{T}^d$.

Каждый элемент $a \in B \rtimes_\gamma \mathbb{Z}^d$ допускает единственное представление в виде ряда Фурье

$$a = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \psi_x(a) u^x,$$

где

$$\psi_x(a) = \int_{\mathbb{T}^d} \rho_k(a(u^x)^*)dk \in B.$$

1.2. **Полупространственные и граничные алгебры.** Рассмотрим гиперповерхность в $\mathbb{R}^d$ вида

$$\{x \in \mathbb{R}^d : x \cdot \nu_\xi = 0\},$$

где $\nu_\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ – единичный вектор в $\mathbb{R}^d$, разделяющую $\mathbb{R}^d$ на два полупространства. Вектор ν_ξ порождает однопараметрическую группу ξ, действующую на $A = \mathbb{T}^d$ по правилу

$$\xi_t(a) = \rho_{i\nu_\xi}(a), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где ρ – введенное выше $\mathbb{T}^d$-действие, рассматриваемое как периодическое $\mathbb{R}^d$-действие. С группой ξ ассоциируется абелева подгруппа $\Gamma_\xi = \nu_\xi \cdot \mathbb{Z}^d$ группы $\mathbb{R}$.

Будем говорить, что вектор ν_ξ или действие ξ *рациональны*, если ν_ξ является скалярным множителем вектора из $\mathbb{Q}^d$. В этом случае найдется наименьший положительный элемент Λ_ξ в группе Γ_ξ, такой что $\Gamma_\xi = \Lambda_\xi\mathbb{Z}$, так что действие ξ станет периодическим $G = \Lambda_\xi^{-1}\mathbb{T}$-действием.

В нерациональном случае группа Γ_ξ будет плотна в $\mathbb{R}$ и мы полагаем $G = \mathbb{R}$. В этом случае будем обозначать через μ меру Хаара на G, а через $\hat{\mu}$ – меру Лебега на двойственной группе $\hat{G} = \mathbb{R}$. В рациональном случае группа $G = \Lambda_\xi^{-1}\mathbb{T}$ изоморфна $\mathbb{T}$. Мера Хаара на G будет отождествляться с мерой Хаара μ на интервале $[0, \Lambda_\xi)$ с объемом $\mu(G) = \Lambda_\xi^{-1}$. Двойственная группа в этом случае отождествляется с $\hat{G} = \Lambda_\xi\mathbb{Z}$, а мера Хаара – с $\Lambda_\xi\hat{\mu}$, где $\hat{\mu}$ – считающая мера.

Ассоциированная точная последовательность C^*-алгебр задается гладким теплицевым продолжением C^*-динамической системы $(\mathbb{T}^d, G, \xi)$, где ξ задается формулой (1):

$$0 \longrightarrow \mathbb{T}^d \rtimes_\xi G \longrightarrow T(\mathbb{T}^d, G, \xi) \longrightarrow \mathbb{T}^d \longrightarrow 0\ . \tag{2}$$

Граничная алгебра $E = \mathbb{T}^d \rtimes_\xi G$, порождаемая сужениями операторов твердого тела (bulk) на $(d-1)$-мерное сечение, интерпретируется физически как алгебра граничных наблюдаемых. Полупространственная алгебра $\hat{A} = T(\mathbb{T}^d, G, \xi)$ содержит, кроме того, сужения операторов твердого тела на полупространство $\{\nu_\xi \cdot x > 0\}$, удовлетворяющие непрерывным граничным условиям. С учетом введенных обозначений точную последовательность (2) можно переписать в виде

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow \hat{A} \longrightarrow A \longrightarrow 0\ . \tag{3}$$

Образующая X_ξ действия ξ, продолженного на $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, равна

$$X_\xi = \nu_\xi \cdot X,$$

где $X = (X_1, \ldots, X_d)$ – самосопряженные операторы на $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ которые можно задать на плотном множестве дифференцируемых элементов

$$a = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} a_x u^x \in \mathbb{T}^d \subset \ell^2(\mathbb{Z}^d)$$

в виде

$$X_\xi a = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (\nu_\xi \cdot x) a_x u^x.$$

Спектр X_ξ совпадает с замыканием Γ_ξ, т.е. с $\Lambda_\xi \mathbb{Z}$ в рациональном случае $G = \Lambda_\xi^{-1}\mathbb{T}$ (и с $\mathbb{R}$ в противном случае).

Для того, чтобы пользоваться борелевским функциональным исчислением, необходимо ввести в рассмотрение алгебры фон Неймана. Исходное действие ξ_t, задаваемое ρ, продолжается до (слабо) непрерывного действия группы автоморфизмов алгебры $R = L^\infty(\mathbb{T}^d, \mathcal{T})$. Так как след $\mathcal{T}$ инвариантен относительно ρ и ξ, то можно построить C^*-скрещенное произведение $A \rtimes_\xi G$ и W^*-скрещенное произведение $R \rtimes_\xi G$ и наделить их двойственным следом $\widehat{\mathcal{T}}$.

Введем, как и ранее, обозначение

$$\mathcal{N}_\xi = R \rtimes_\xi G = L^\infty(\mathcal{N}_\xi, \widehat{\mathcal{T}}).$$

След $\widehat{\mathcal{T}}$ инвариантен относительно $\hat{\rho}$ и двойственного действия $\hat{\xi}$.

Предложение 1. *Интегральное представление $\hat{\pi}_{\mathcal{T},G}$ алгебры $A \rtimes_\xi G$ в пространстве $L^2(\hat{G} \times \mathbb{Z}^d)$, задаваемое на образующих формулой*

$$\hat{\pi}_{\mathcal{T},G}(af(D_\xi)) = \pi_{\mathcal{T}}(a) \int_{\hat{G}} \hat{\mu}(dr) f(X_\xi + r),$$

продолжается до точного нормального представления W^*-скрещенного произведения $\mathcal{N}_\xi$. Операторы этого представления задаются расслоенной формулой

$$\hat{\pi}_{\mathcal{T},G}(\hat{h}) = \int_{\hat{G}} \hat{\mu}(dr) \hat{\pi}_{\mathcal{T},G}(\hat{h})_r,$$

где $\hat{h} \in \mathcal{N}_\xi$, а послойные члены $\hat{\pi}_{\mathcal{T},G}(\hat{h})_r$ действуют в пространстве $L^2(\mathbb{Z}^d)$. Если элемент $\hat{h} \in \mathcal{N}_\xi$ самосопряжен и f – ограниченная борелевская функция на $\mathbb{R}$, то

$$\hat{\pi}_{\mathcal{T},G}(f(\hat{h}))_r = f(\hat{\pi}_{\mathcal{T},G}(\hat{h})_r).$$

Остановимся более подробно на физической интерпретации представления $\hat{\pi}_{\mathcal{T},G}$. Пусть $a \in A$ есть наблюдаемая твердого тела, которую мы хотим ограничить на полупространство $\{x \cdot \nu_\xi > 0\}$, пользуясь граничным условием Дирихле. Указанное ограничение задается семейством операторов $(\hat{a}_r)$, $r \in \hat{G}$, действующих в физическом гильбертовом пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$:

$$\hat{a}_r = \chi(X_\xi + r > 0)\pi(a)\chi(X_\xi + r > 0),$$

где r интерпретируется как расстояние до границы от точки решетки $0 \in \mathbb{Z}^d$.

Для общих элементов $\hat{a} \in \mathcal{N}_\xi$ имеется интегральное представление

$$\hat{a} = \int_{\hat{G}} \hat{\mu}(dr) \hat{a}_r.$$

В рациональном случае двойственная группа дискретна, поэтому справедливо следствие.

Следствие 1. *Представление $\hat{\pi}_{\mathcal{T},G}$ в рациональном случае разлагается в прямую сумму*

$$\hat{\pi}_{\mathcal{T},G} = \bigoplus_{r \in \Lambda_\xi \mathbb{Z}} \hat{\pi}_r,$$

причем член $\hat{\pi}_0$ *задает точное представление* $\mathcal{N}_\xi$*, являющееся продолжением представления* $\hat{\pi}_{\mathcal{T}}$ *алгебры* $A \rtimes_\xi G$*.*

Рассмотрим далее двойственный след $\widehat{\mathcal{T}}$ на $\mathcal{N}_\xi$. Его значения на образующих $\pi(a)f(D_\xi)$ задаются формулами:

$$\widehat{\mathcal{T}}(f(D_\xi)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \quad \text{для } \hat{G} = \mathbb{R},$$

и

$$\widehat{\mathcal{T}}(f(D_\xi)) = \Lambda_\xi \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k\Lambda)\xi) \quad \text{для } \hat{G} = \Lambda_\xi \mathbb{Z}.$$

В обоих случаях подразумевается, что $f \in C_c(\mathbb{R})$.

Список литературы

[1] H.Schulz-Baldes, T.Stoiber, *Harmonic analysis in operator algebras and its applications to index theory and topological solid state systems*, arXiv:2206.07781v2(math-ph), 2022.