ЛЕКЦИЯ 2

1. Симметрии

1.1. **Отступление: алгебры Клиффорда.** В этом параграфе собраны необходимые сведения из теории клиффордовых алгебр. (Более подробно с этой теорией можно познакомиться по монографии [19].)

Пусть V есть n-мерное вещественное векторное пространство с невырожденной симметричной билинейной формой g. Его внешняя алгебра ΛV порождается мономами вида $u_1 \wedge \ldots \wedge u_p$, где $u_j \in V$. На этой алгебре имеются два вида умножений: внешнее, действующее по формуле

$$\epsilon(v)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p) = v \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_p, \text{ где } v \in V,$$

и внутреннее, действующее по формуле

$$\iota(v)(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} g(v, u_j) u_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{u_j} \wedge \ldots \wedge u_p.$$

Эти операторы удовлетворяют равенству $\epsilon(v)^2 = \iota(v)^2 = 0$ и антикоммутационному соотношению

$$\epsilon(u)\iota(v) + \iota(u)\epsilon(v) = g(u, v).$$

Если обозначить через $c(v) = \epsilon(v) + \iota(v)$ оператор *клиффордова умножения*, то будем иметь

$$c(v)c(u) + c(u)c(v) = 2g(u, v),$$

откуда $c^2(v) = g(v, v)$.

Определение 1. *Вещественная клиффордова алгебра* $\mathrm{Cl}(V, g)$ есть подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\Lambda V)$, порождаемая операторами клиффордова умножения $c(v)$, $v \in V$.

Если выбрать ортогональный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства (V, g) такой, что $g(e_i, e_i) = \pm 1$, то операторы $c(e_i)$ будут антикоммутировать друг с другом, а алгебра $\mathrm{Cl}(V, g)$ будет порождаться единицей 1 и упорядоченными произведениями вида $c(e_{i_1})c(e_{i_2}) \ldots c(e_{i_p})$, где $i_1 < \ldots < i_p$ и $\{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, \ldots, n\}$.

Определение 2. *Комплексная клиффордова алгебра* $\mathbb{C}l(V)$ есть подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}(\Lambda V^{\mathbb{C}})$, порождаемая операторами $c(v)$, $v \in V^{\mathbb{C}}$. Здесь, $V^{\mathbb{C}}$ обозначает комплексификацию пространства V.

Алгебра $\mathbb{C}l(V)$ как комплексное векторное пространство изоморфна алгебре $\Lambda V^{\mathbb{C}}$, изоморфизм задается отображением

$$\sigma : \mathbb{C}l(V) \longrightarrow \Lambda V^{\mathbb{C}}, \quad \sigma(a) = c(a)1.$$

Обратное к σ отображение $\mathrm{Alt} : \Lambda V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}l(V)$ задается формулой

$$\mathrm{Alt}(u_1 \wedge \ldots \wedge u_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau} (-1)^{\operatorname{sgn} \tau} c(u_{\tau(1)}) \cdot \ldots \cdot c(u_{\tau(p)}),$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\tau = (\tau(1), \ldots, \tau(p))$ множества $\{1, \ldots, p\}$, а $\operatorname{sgn} \tau$ обозначает четность перестановки τ. В частности,

$$\mathrm{Alt}(u \wedge v) = \frac{1}{2}(uv - vu).$$

Алгебру $\mathbb{C}l(V)$ можно также определить с помощью универсального свойства: это единственная ассоциативная комплексная алгебра с единицей такая, что для любой ассоциативной комплексной алгебры A с единицей 1_A и произвольного вещественно-линейного отображения $f : V \to A$, удовлетворяющего условию: $f(v)^2 = g(v, v)1_A$ для всех $v \in V$, существует единственный гомоморфизм алгебр $\tilde{f} : \mathbb{C}l(V) \to A$ такой, что $f = \tilde{f}|V$.

Так как алгебра $\mathbb{C}l(V)$ порождается произведениями вида $c(e_{i_1}) \cdot \ldots \cdot c(e_{i_p})$, то в ней выделяются подалгебры $\mathbb{C}l^{\mathrm{ev}}(V)$ и $\mathbb{C}l^{\mathrm{od}}(V)$, порождаемые произведениями вида $c(e_{i_1}) \cdot \ldots \cdot c(e_{i_p})$ с четным (соотв. нечетным) числом элементов. Обозначим через χ *оператор градуировки*, равный $+1$ (соотв. -1) на $\mathbb{C}l^{\mathrm{ev}}(V)$ (соотв. $\mathbb{C}l^{\mathrm{od}}(V)$). Тогда на $\mathbb{C}l(V)$ можно ввести *оператор зарядового сопряжения*, задаваемый антилинейным отображением $C : a \mapsto \chi(\bar{a})$.

Рассмотрим более подробно вещественные алгебрам Клиффорда $\mathrm{Cl}(V, g)$. Такая алгебра определяется с точностью до изоморфизма сигнатурой формы g. Будем записывать эту форму в следующем стандартном виде

$$(u, v) = u_1 v_1 + \ldots + u_p v_p - u_{p+1} v_{p+1} - \ldots - u_{p+q} v_{p+q}, \text{ где } p + q = n,$$

и обозначать получающуюся алгебру Клиффорда через $\mathrm{Cl}_{p,q}$. Примеры:

$$\mathrm{Cl}_{1,0} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R},\ \mathrm{Cl}_{0,1} = \mathbb{C},\ \mathrm{Cl}_{2,0} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),$$
$$\mathrm{Cl}_{3,0} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}),\ \mathrm{Cl}_{1,1} = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{Cl}_{0,2} = \mathbb{H}.$$

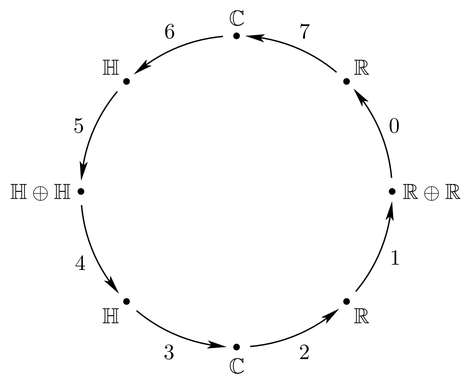

Рис. 1

Более общим образом:

$$\mathrm{Cl}_{p+1,q+1} \cong \mathrm{Cl}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}),$$
$$\mathrm{Cl}_{p+4,q} \cong \mathrm{Cl}_{p,q+4} \cong \mathrm{Cl}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_2(\mathbb{H}),$$
$$\mathrm{Cl}_{p+8,q} \cong \mathrm{Cl}_{p,q+8} \cong \mathrm{Cl}_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_{16}(\mathbb{H}).$$

Полное описание конечномерных вещественных клиффордовых алгебр получается с помощью т.н. "спинорных часов" по следующему правилу:

(1) вычисляем $j = (p - q) \bmod 8$;
(2) находим на спинорных часах стрелку $A \xrightarrow{j} B$;
(3) находим N, для которого $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_N(B) = 2^{p+q}$;
(4) полагаем $\mathrm{Cl}_{p,q} = \mathrm{Mat}_N(B)$.

В случае комплексной алгебры Клиффорда положим $N = 2^m$. Тогда

$$\mathbb{C}l(\mathbb{R}^{2m}) = \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}), \quad \mathbb{C}l(\mathbb{R}^{2m+1}) = \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C}).$$

Перейдем теперь к описанию групп, связанных с алгебрами Клиффорда и будем предполагать для упрощения изложения, что векторное пространство V евклидово, т.е. форма g положительно определена.

Обозначим через $\mathrm{Cl}^{\times}(V)$ *группу обратимых элементов* клиффордовой алгебры $\mathrm{Cl}(V)$. Это группа Ли, которая содержит $V \setminus \{0\}$, поскольку для любого элемента $v \in V \setminus \{0\}$ обратный к нему элемент v^{-1} задается формулой

$$v^{-1} = \frac{v}{g(v,v)}\,.$$

Группа $\mathrm{Cl}^\times(V)$ действует на алгебре $\mathrm{Cl}(V)$ посредством присоединенного представления

$$w \longmapsto \mathrm{Ad}_w x := wxw^{-1}, \quad w \in \mathrm{Cl}^\times(V).$$

Для любого $u \in V \setminus \{0\}$ отображение

$$-\mathrm{Ad}_u v = v - 2\frac{g(u,v)}{g(u,u)}, \quad v \in V,$$

является *отражением* относительно гиперплоскости $u^\perp$, ортогональной u. Для того, чтобы избавиться от знака минус в левой части последнего равенства, принято использовать вместо присоединенного представления Ad действие группы $\mathrm{Cl}^\times(V)$ на алгебре $\mathrm{Cl}(V)$, задаваемое *подкрученным присоединенным представлением* вида

$$w \longmapsto \pi_w(x) := \chi(w)xw^{-1}, \quad x \in \mathrm{Cl}(V),\, w \in \mathrm{Cl}^\times(V),$$

где χ – *отображение градуировки*, задаваемое на однородных элементах степени k из группы $\mathrm{Cl}^\times(V)$ формулой

$$\chi(w) := (-1)^{\deg w} w = (-1)^k w.$$

Тогда отображение $\pi_u : V \to V$, определяемое элементом $u \in V \setminus \{0\}$, будет задавать отражение относительно гиперплоскости $u^\perp$.

С учетом этих замечаний можно рассмотреть подгруппу мультипликативной группы $\mathrm{Cl}^\times(V)$, состоящую из элементов $x \in \mathrm{Cl}^\times(V)$, обладающих свойством: $\pi_x(V) = V$. Как указано выше, этим свойством обладают все элементы $v \in V \setminus \{0\}$, поэтому уместно ввести следующую группу.

Определение 3. *Группой Клиффорда* $\Gamma(V) \equiv \Gamma(n)$ называется подгруппа мультипликативной группы $\mathrm{Cl}^\times(V)$, порожденная элементами $v \in V \setminus \{0\}$.

Каждый элемент группы $\Gamma(V)$ порождает невырожденное линейное преобразование пространства V, поэтому имеется гомоморфизм

$$\pi : \Gamma(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(V).$$

Этот гомоморфизм принимает значения в ортогональной группе $\mathrm{O}(V)$. Действительно, поскольку любой элемент $x \in \Gamma(V)$ представляется произведением вида $x = v_1 \cdot \ldots v_k$, где $v_i \in V \setminus \{0\}$, то отвечающее ему преобразование π_x является композицией отражений, отвечающих элементам v_i, т.е. принадлежит $\mathrm{O}(V)$. Кроме того, гомоморфизм $\pi : \Gamma(V) \to \mathrm{O}(V)$ является эпиморфизмом, поскольку любое ортогональное преобразование является композицией отражений.

Гомоморфизм $\pi : \Gamma(V) \to \mathrm{O}(V)$ можно включить в точную последовательность гомоморфизмов групп вида

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}^\times \longrightarrow \Gamma(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{O}(V) \longrightarrow 1.$$

Положим также

$$S\Gamma(V) := \Gamma(V) \cap \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(V).$$

Определение 4. *Группа* $\mathrm{Pin}(V)$ определяется как подгруппа группы Клиффорда $\Gamma(V)$, порожденная единичными векторами из V, т.е. векторами $v \in V$ с $|v| = 1$.

Также, как в случае группы Клиффорда, имеется гомоморфизм

$$\pi : \mathrm{Pin}(V) \longrightarrow \mathrm{O}(V),$$

который включается в точную последовательность гомоморфизмов групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Pin}(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{O}(V) \longrightarrow 1.$$

Определение 5. *Группа* $\mathrm{Spin}(V)$ есть связная компонента единицы в группе $\mathrm{Pin}(V)$. По-другому, ее можно определить как

$$\mathrm{Spin}(V) = \mathrm{Pin}(V) \cap \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(V).$$

Как и в случае группы $\mathrm{Pin}(V)$, имеется точная последовательность гомоморфизмов групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}(V) \longrightarrow 1.$$

При $n > 2$ группа $\mathrm{Spin}(n)$ является односвязной накрывающей группы $\mathrm{SO}(V)$.

Примеры Spin-групп:

(1) $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{U}(1) = \mathrm{SO}(2)$.
(2) $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{SU}(2)$.
(3) $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^4) = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$.

1.2. **Симметрии и псевдосимметрии.** Обозначим через G группу симметрии топологического диэлектрика. Мы будем рассматривать ее унитарные и анти-унитарные представления в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Такие представления продолжаются естественным образом на пространство $\mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}$, если сопоставить оператору $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ преобразование

$$(g^{-1})^t \oplus g : \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{H}.$$

Будем предполагать, что группа G содержит подгруппу трансляций Γ и все другие симметрии коммутируют с элементами Γ. Если $\varphi \in \mathcal{H}_k$, т.е. удовлетворяет соотношению $T_\gamma\varphi = e^{-ik\cdot\gamma}\varphi$, то применение T_gamma, $g \in G$, к этому вектору дает:

$$(T_\gamma g)\varphi = g(T_\gamma\varphi) = g(e^{-ik\cdot\gamma}\varphi) = \begin{cases} e^{-ik\cdot\gamma}g\varphi & \text{для унитарных } g; \\ e^{ik\cdot\gamma}g\varphi & \text{для анти-унитарных } g. \end{cases}$$

Поэтому унитарные преобразования $g \in G$ порождают отображения $g|_{\mathcal{W}_k} : \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_k$, а анти-унитарные g дают отображения $g|_{\mathcal{W}_k} : \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_{-k}$.

Определение 6. Будем говорить, что квазичастичное расслоение $\rho : \mathcal{V} \to \mathrm{Br}_d$, слоем которого над точкой $k \in \mathrm{Br}_d$ является пространство $V(k)$, допускает *группу симметрии* G, если для любого $k \in \mathrm{Br}_d$

$$\begin{cases} gV(k) = V(k) & \text{для всех унитарных } g \in G/\Gamma; \\ gV(k) = V(-k) & \text{для всех анти-унитарных } g \in G/\Gamma. \end{cases}$$

Мы ограничились в этом определении преобразованиями из G/Γ, поскольку трансляции действуют на $V(k)$ как

$$T_\gamma V(k) = e^{-ik\gamma}V(k) = V(k).$$

Если $G/\Gamma = \mathrm{U}(1)$, то это означает в физических терминах, что сохраняется число частиц. Это условие выполняется, если все $\Delta(k)$ в гамильтониане Боголюбова–де Жена равны нулю. Представления из группы $\mathrm{U}(1)$ удобно записывать в виде $e^{i\theta Q}$, где $\theta \in [0, 2\pi)$, а генератор Q равен -1 на $\mathcal{H}_k^*$ и $+1$ на $\mathcal{H}_{-k}$. Тогда $QV(k) = V(k)$.

Помимо симметрий мы будем рассматривать также псевдосимметрии.

Определение 7. Квазичастичное расслоение $\rho : \mathcal{V} \to \mathrm{Br}_d$ допускает s *псевдосимметрий*, если найдется набор из s унитарных ортогональных операторов $J_1, \ldots, J_s : \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_k$, не зависящих от k, удовлетворяющих соотношениям алгебры Клиффорда

$$J_l J_m + J_m J_l = -2\delta_{lm}$$

и соотношениям ортогональности

$$\langle V(k), J_1 V(k)\rangle = \ldots = \langle V(k), J_s V(k)\rangle = 0.$$

При этом оператор J на $\mathcal{W}_k$ называется *унитарным ортогональным*, если он $\mathbb{C}$-линеен,

$$\langle Jw, Jw'\rangle = \langle w, w'\rangle \quad \text{и} \quad \{Jw, Jw'\} = \{w, w'\}.$$

Условие $\langle V(k), JV(k)\rangle = 0$ можно переписать в виде $JV(k) = V(k)^c$, где $V(k)^c$ есть ортогональное дополнение к $V(k)$ в пространстве $\mathcal{W}_k$. В этом состоит главное отличие псевдосимметрии от настоящей симметрии: пространство $V(k)$ не сохраняется, а переводится в его ортогональное дополнение $V(k)^c$.

1.3. **Классификация Китаева.**

Определение 8. *Квазичастичное расслоение комплексного класса* s есть квазичастичное расслоение с группой симметрии G такой, что $G/\Gamma = \mathrm{U}(1)$, обладающее s псевдосимметриями.

Имеется всего два класса комплексных квазичастичных расслоений. Случай $s = 0$ отвечает отсутствию псевдосимметрий, случай $s = 1$ отличается от него добавлением *PH-симметрии* (симметрии частиц–дырок), задаваемой оператором

$$C = \gamma S = S\gamma : \mathcal{W}_k \to W_{-k}.$$

Если $S = 1$, то $C = \gamma$ есть эрмитово сопряжение, однако в общем случае S есть унитарный ортогональный оператор $S : \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_k$, не зависящий от k, который задается блочно-диагональной матрицей в разложении $\mathcal{W}_k = \mathcal{H}_k^* \oplus \mathcal{H}_{-k}$ и удовлетворяет соотношению $S^2 = 1$. Сам оператор C является анти-унитарным и $CV(k) = V(-k)$. Единственная псевдосимметрия задается в этом случае оператором

$$J_1 = i\gamma CQ = iSQ = iQS.$$

Оператор J_1 является унитарным ортогональным, а его квадрат равен $J_1^2 = -1$. Действие J_1 на аннигиляторном подпространстве задается формулой

$$J_1 V(k) = \gamma CQV(k) = \gamma CV(k) = \gamma V(-k) = \gamma V(k)^{\perp} = V(k)^c.$$

Иными словами, оператор J_1 действительно задает псевдосимметрию, которая часто называется *киральной симметрией*. Добавление дополнительных псевдосимметрий не приводит в этом случае к новым эффектам.

Имеется также три вида вещественных симметрий, а именно, T(обращение времени), Q(сохранение заряда), C(PH-симметрия). К ним можно добавлять три оператора вращения спина S_1, S_2, S_3, а также $s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ псевдосимметрий (дальнейшее добавление псевдосимметрий не дает новых эффектов).

Определение 9. *Квазичастичное расслоение вещественного класса s* есть квазичастичное расслоение с группой симметрии G, обладающее s псевдосимметриями.

Заметим, что в отличие от комплексного случая мы не предполагаем, что $G/\Gamma = \mathrm{U}(1)$.

В случае $s = 0$, т.е. в отсутствие псевдосимметрий, группа $G = \Gamma$. В случае $s = 1$ имеется T-симметрия, задаваемая на $\mathcal{H}$ антиунитарным оператором T с квадратом $T^2 = -1$. Этот оператор коммутирует с трансляциями и отображает $\mathcal{W}_k$ в $\mathcal{W}_{-k}$. В разложении $\mathcal{W}_k = \mathcal{H}_k^* \oplus \mathcal{H}_{-k}$ он задается блочно-диагональной матрицей. В его терминах единственная пседосимметрия J_1 задается формулой

$$J_1 = \gamma T = T\gamma.$$

Оператор J_1 является унитарным и $J_1^2 = -1$. Он также ортогонален и действует на аннигиляторном пространстве по формуле

$$J_1 V(k) = \gamma T V(k) = \gamma V(-k) = \gamma V(k)^{\perp} = V(k)^c,$$

т.е. J_1 действительно является псевдосимметрией.

В случае $s = 2$ имеются две симметрии: T-симметрия и Q-симметрия, а также две псевдосимметрии. Помимо псевдосимметрии $J_1 = \gamma T$ есть еще псевдосимметрия J_2, равная

$$J_2 = iJ_1 Q.$$

Наконец, в случае $s = 3$ имеются три симметрии T, Q, C и три псевдосимметрии. К введенным выше псевдосимметриям J_1, J_2 добавляется псевдосимметрия J_3 вида

$$J_3 = i\gamma CQ = iSQ = iQS.$$

.

Классы $s = 4, 5, 6, 7$ аналогичны рассмотренным классам $s = 0, 1, 2, 3$ с той разницей, что к симметриям T,Q,C в этих случаях добавляются симметрии S_1, S_2, S_3, задаваемые операторами вращения спина.

1.4. **Классифицирующие пространства.** Переходя к математической интерпретации приведенных выше результатов, рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}$, наделенное квазичастичным расслоением с s пседосимметриями $J_1, \ldots, J_s$. Рассмотрим многообразие

$$C_s(n) = \{V \subset \mathbb{C}^{2n} : J_1 V = \ldots = J_s V = V^c\}.$$

Инволюция $\tau_0 : C_0(n) \to C_0(n)$ сопоставляет подпространству V его ортогональное дополнение: $V \to V^\perp$. Так как $J_i V^\perp = (V^\perp)^c$, то отображение τ_0 допускает сужение до отображения

$$\tau_s = \tau_0|_{C_s(n)} : C_s(n) \longrightarrow C_s(n).$$

Множество его неподвижных точек обозначим через

$$R_s(n) = \{V \in C_s(n) : \tau_s(V) = V\}.$$

Квазичастичное расслоение отождествляется с эквивариантным отображением $\psi : \mathrm{Br}_d \to C_s(n)$, удовлетворяющим условию эквивариантности: $\psi \circ \tau = \tau_s \circ \psi$.

По-другому, многообразия $C_s(n)$ и $R_s(n)$ можно определить следующим образом. Сопоставим каждому $V \in C_0(n)$ оператор

$$J(V) = i(P_V - P_{V^c}),$$

где P_V (соотв. P_{V^c}) есть ортогональный проектор на V (соотв. V^c). Это унитарный оператор с квадратом $J(V)^2 = -1$.

Обозначим через g^T оператор, транспонированный к g относительно скобки $\{\cdot\,,\cdot\}$, определяемый соотношением

$$\{w, gw'\} = \{g^T w, w'\},$$

выполняющимся для всех $w, w' \in \mathcal{W} = \mathcal{W}_k$. Тогда получим соотношение $P_{\tau_0(V)} = (P_{V^c})^T$, откуда следует, что

$$(J \circ \tau_0)(V) = -J(V)^T = (J(V)^{-1})^T.$$

Тем самым, инволюция τ_0 на уровне подпространств $V \subset \mathcal{W} \cong \mathbb{C}^{2n}$ совпадает с инволюцией унитарных операторов, задаваемой отображением

$$\tau_1 : \mathrm{U}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{U}(\mathcal{W}),\ g \longmapsto (g^{-1})^T.$$

Неподвижные точки этой инволюции являются ортогональными операторами из группы $\mathrm{O}(\mathcal{W}) \subset \mathrm{U}(\mathcal{W})$.

В присутствии псевдосимметрий $J_1, \ldots, J_s$ оператор $J(V)$ будет удовлетворять соотношениям

$$J_i J(V) = -J(V) J_i,\ i = 1, \ldots, s,$$

поскольку $J_i V = V^c$. Теперь определение введенных ранее подпространств $C_s(n)$ и $R_s(n)$ можно переписать в терминах унитарных операторов следующим образом:

$$C_s(n) = \{J \in \mathrm{U}(\mathcal{W}) : J^2 = -1, J_i J = -J J_i, i = 1, \dots, s\},$$
$$R_s(n) = \{J \in C_s(n) : \tau_1(J) = J\}.$$

В силу известных изоморфизмов для алгебр Клиффорда получаем, что

$$C_{s+2}(2n) = C_s(n) \quad \text{и} \quad R_{s+8}(16n) = R_s(n).$$

Это объясняет, почему при описании классов комплексных симметрий мы ограничились двумя псевдосимметриями, а при описании классов вещественных псевдосимметрий остановились на $s = 7$.

Пространство $C_s(n)$ можно отождествить с объединением орбит группы

$$G_s^{\mathbb{C}}(n) = \{g \in \mathrm{U}(\mathcal{W}) : J_i g = g J_i, i = 1, \dots, s\}$$

на пространстве $C_s(n)$. Например, $C_0(n)$ совпадает с объединением орбит вида gJg^{-1}, $g \in \mathrm{U}(n)$, задаваемых действием $G_s^{\mathbb{C}}(n)$ на $2n + 1$ элементах $J \in C_0(n)$, имеющих p собственных значений $+i$ и q собственных значений -1 для всех значений p и q таких, что $p + q = 2n$. Стабилизаторы таких орбит совпадают с $\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q)$ и мы получаем отождествление $C_0(n)$ с

$$\mathrm{U}(2n)/\mathrm{U}(p) \times \mathrm{U}(q) \cong \mathrm{Gr}_p(\mathbb{C}^{2n}).$$

Следующее пространство $C_1(n)$ совпадает с орбитой группы $G_1^{\mathbb{C}}(n) = \mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$ элемента $J_2 \in C_1(n)$, стабилизатором которого является диагональная подгруппа $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n)$. Все остальные пространства $C_s(n)$ получаются из $C_0(n)$ и $C_1(n)$ с учетом периодичности $C_{s+2}(2n) = C_s(n)$.

Аналогичным образом рассматриваются пространства $R_s(n)$, которые реализуются при всех s, за исключением случаев $s = 2$ и $s = 6$, в виде единственной орбиты группы

$$G_s(n) = \{g \in G_c^{\mathbb{C}}(n) : \tau_1(g) = g\}.$$

В случаях $s = 2$ и $s = 6$ пространство $R_s(n)$ совпадает с объединением кватернионных и вещественных грассмановых многообразий соответственно.

Список литературы

[1] G.Abramovich, P.Kalugin, Clifford modules and symmetries of topological insulators, Int. J. Geom. Methods in Phys. **9**(2012), N 3, 1250023, 1-31. ,

[2] Н.Ашкрофт, Н.Мермин, *Физика твердого тела*, Мир, Москва, 1979.

[3] M.F.Atiyah, I.M.Singer, Index theory for skew-adjoint Fredholm operators, Publ. Math. Inst. Haut. Etud. Sci. **37**(1969), 5-26.

[4] M.F.Atiyah, I.M.Singer, The index of elliptic operators, V, Ann. Math. **93**(1971), 139-149.

[5] J.E.Avron, R.Seiler, B.Simon, Homotopy and quantization in condensed matter physics, Phys. Rev. Lett. **51**(1990), N 1, 2185.

[6] M.Berry, Quantum phase factors accompanying adiabatic changes, Proc. R. Soc. London **A392**(1984), 45.

[7] F.A.Berezin, M.A.Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer, Boston, 1991.

[8] A.Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London–San Diego, 1994.

[9] R.Fox, Homotopy groups and torus homotopy groups, Ann. Math. **49**(1948), N 2, 471-510.

[10] R.Goodman, N.R.Wallach, *Symmetry, Representations and Invariants*, Springer, 2009.

[11] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[12] P.Heinzner, A.Huckleberry, M.Zirnbauer, Symmetry classes of disordered fermions, Communs. Math. Phys. **257**(2005), 725-771.

[13] C.L.Kane, E.J.Mele, Quantum spin Hall effect in graphene, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:226801.

[14] C.L.Kane, E.J.Mele, $\mathbb{Z}_2$ topological order and the quantum spin Hall effect, Phys. Rev. Lett. **95**(2005), 95:146802.

[15] R.M.Kaufmann, Dan Li, B.Wehefritz-Kaufmann, Topological insulators and K-theory, ArXiv: 1510.08001.

[16] R.Kennedy, Homotopy theory of topologiczl insulators, Köln, 2014.

[17] A.Kitaev, Periodic table for topological insulators and superconductors, Adv. Theor. Phys., AIP Conf. Proc. **1134**(2009), 22-30.

[18] B.Laughlin, Quantized Hall conductance in two dimensions, Phes Rev. **B23**(1981), 5232.

[19] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[20] Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, *Статистическая физика, часть 2*, Наука, Москва, 1978.

[21] M.Sato, Y.Ando, Topological superconductors: a review, Rep. Progress Phys. **80**(2017), 076501.

[22] А.Г.Сергеев, Спинорная геометрия Дирака и некоммутативная геометрия Конна, Труды МИАН **298**(2017), 276-314.

[23] А.Г.Сергеев, Применения некоммутативной геометрии в анализе и математической физике, Труды ММО **81**(2020), вып. 2, 1-59.

[24] S.Q.Shen, *Topological Insulators: Dirac Operators in Condensed Matters*, Berlin, Springer, 2013.

[25] D.J.Thouless, M.Kohmoto, M.P.Nightingale, M. den Nijs, Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential, Phys. Rev. Lett. **49**(1982), 405-408.