

Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ



МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения — XIX»

Воронежский государственный университет
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения — XIX»



УДК 517.94 (92; 054, 97) Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 08-01-06027(г)

Программный совет: А. Е. Барабанов, С. В. Емельянов, В. А. Ильин, С. К. Коровин, А. В. Кряжковский, А. Б. Куржанский, Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Осипов, С. М. Никольский, В. М. Тихомиров

Программный комитет:

Председатель В. А. Ильин. Сопредседатели: Ю. В. Покорный, А. А. Шкаликов. Заместители председателя: В. И. Гурман, Л. В. Крицков, Н. Л. Григоренко, А. Д. Баев, Ю. И. Сапронов. Члены программного комитета: А. И. Булгаков, А. В. Глушко, В. В. Жиков, В. И. Жуковский, А. И. Задорожный, В. Г. Задорожний, В. А. Кондратьев, И. П. Костенко, Г. А. Курина, С. М. Никольский, А. И. Прилепко, А. Н. Покровский, В. Д. Репников, В. И. Рязских, А. П. Солдатов, А. И. Шашкин, А. С. Шамаев, С. А. Шабров (ученый секретарь)

Оргкомитет:

Председатель Оргкомитета: В. А. Ильин, академик. Сопредседатели: В. Т. Титов, ректор ВГУ, Е. И. Моисеев, академик, В. А. Садовничий, академик. Заместители председателя: А. М. Ховив, Е. Н. Ищенко, Ю. В. Покорный, А. П. Хромов. Члены оргкомитета: А. В. Боровских, Я. М. Ерусалимский, М. Г. Матвеев, М. С. Никольский, В. В. Провоторов (ученый секретарь), Е. И. Радзиевская, Н. Х. Розов.

Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения–XIX». – Воронеж: ВГУ, 2008. — 242 с.

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

© Математический факультет
Воронежского госуниверситета, 2008

Ильин Владимир Александрович

Владимир Александрович родился 2 мая 1928 года в г. Козельск Калужской обл. В 1936 г. В. А. Ильин поступил в Москве сразу во второй класс средней школы № 345. Окончил в 1945 г. с золотой медалью московскую среднюю школу № 273. В том же году поступил и в 1950 г. с отличием окончил физический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова по кафедре математики. В 1950–1953 гг. обучался в аспирантуре физического факультета МГУ по специальности "математическая физика". Кандидат физико-математических наук (1953), тема диссертации: "Дифракция электромагнитных волн на некоторых неоднородностях" (научный руководитель А. Н. Тихонов). Доктор физико-математических наук (1958), тема диссертации: "О сходимости разложений по собственным функциям оператора Лапласа". Ученое звание — профессор (1960).

Член-корреспондент АН СССР (1987), действительный член РАН (1991; академик АН СССР с 1990). Академик Международной академии наук высшей школы (1996). Награжден орденами Трудового Красного Знамени (1980), Дружбы Народов (1988), Почёта (1999), "За заслуги перед Отечеством" IV степени (2004). Лауреат Государственной премии СССР (1980), лауреат премии Президента РФ в области образования (2004), лауреат двух Ломоносовских премий МГУ (за научную работу — 1980, за педагогическую работу — 1992), лауреат премии Министерства высшего и среднего специального образования СССР "За лучшую научную работу" (1988). Заслуженный профессор МГУ (1993). С момента окончания аспирантуры и по настоящее время основным местом работы В. А. Ильина является Московский университет. Он работал сначала на кафедре математики физического факультета в должностях: ассистента (1953–1957), доцента (1957–1959), профессора (1959–1970). С 1970 г. — профессор, а затем (с 1974) — заведующий кафедрой общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики. С 1973 г. и по настоящее время по совместительству — главный научный сотрудник отдела теории функций Математического Института РАН имени В. А. Стеклова. В. А. Ильин — главный редактор ежемесячного математического журнала РАН "Дифференциальные уравнения" член редколлегии журнала РАН "Доклады Академии Наук". Член комиссии по присуждению Государственных Премий Российской Федерации, член научно-методического совета по математике при Ми-

нистерстве Образования РФ. В течение ряда лет являлся председателем экспертного Совета ВАК.

Область научных интересов: математическая физика, теория дифференциальных уравнений, спектральная теория дифференциальных операторов, информатика и математическое моделирование. В. А. Ильин установил разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения в произвольном нормальном цилиндре. Получил точные условия разрешимости краевых и смешанных задач для уравнений в частных производных второго порядка с разрывными коэффициентами. Для произвольных самосопряженных расширений эллиптических операторов в произвольных (не обязательно ограниченных) областях и с любыми спектрами установил окончательные в каждом из классов функций Никольского, Соболева-Лиувилля, Бесова и Зигмунда-Гельдера условия равномерной сходимости как самих спектральных разложений, так и их средних Рисса. Эти условия явились новыми и окончательными и для разложений в кратный интеграл Фурье и в кратный тригонометрический ряд Фурье. Для несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов L любого порядка получил конструктивные необходимые и достаточные условия базисности систем собственных и присоединенных функций и конструктивные необходимые и достаточные условия для того, чтобы разложение произвольной функции из класса L_p равномерно на любом компакте основного интервала равносходилось с разложением той же функции в обычный тригонометрический ряд Фурье. Доказал, что эти же условия являются необходимыми и достаточными для существования полной системы интегралов движения у нелинейной эволюционной системы, порождаемой $(L - A)$ представлением П. Лакса. Для оператора Шредингера с матричным потенциалом установил справедливость покомпонентного принципа локализации. Для самосопряженного расширения на всей прямой R оператора Шредингера с сингулярным потенциалом, удовлетворяющим лишь так называемому условию Като, установил факт равномерной на всей прямой R равносходимости спектрального разложения произвольной функции из класса $L_p(R)$ с разложением той же функции в интеграл Фурье. В последние несколько лет нашел явные аналитические выражения для граничных управлений, переводящих за различные промежутки времени процесс, описываемый гиперболическим уравнением, из произвольного начального состояния в произвольно заданное финальное состояние (результаты

отнесены к числу лучших достижений РАН за 2001 г.). Имеет грант руководителя ведущей научной школы Российской Федерации.

Владимир Александрович подготовил 27 докторов и свыше 90 кандидатов физико-математических наук. За время педагогической деятельности В. А. Ильиным прочитаны несколько лекционных курсов. Признан лучшим лектором МГУ в 2000 г. В. А. Ильин — автор ряда широко известных учебников. В. А. Ильин является автором более 300 научных публикаций.

Моисеев Евгений Иванович

Моисеев Евгений Иванович — декан факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова, доктор физико-математических наук, профессор, действительный член РАН. Родился 7 марта 1948 г. в г. Одинцово (Московская область). Закончил среднюю школу со специализированной подготовкой по программированию в г. Реутов Московской обл. (1965). В том же году поступил на физический факультет МГУ, а сразу после его окончания в 1971 г. — в аспирантуру факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, которую окончил в 1974 г.

В 1974 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему: "К вопросу о единственности решения второй краевой задачи для эллиптического уравнения в 1981 — докторскую диссертацию на тему: "Некоторые вопросы спектральной теории уравнений смешанного типа".

Е. И. Моисеев — член-корреспондент РАН (1997), действительный член РАН (2003). Действительный член Международной академии наук высшей школы (1994). Лауреат премии Ленинского комсомола в области науки и техники (1980), лауреат Ломоносовской премии МГУ (1994). Заслуженный профессор МГУ (2001). Почетный профессор Евразийского университета в г. Астана (2001), почетный доктор Евразийского университета (2004).

Награжден орденом Дружбы (2005), медалью "В память 850-летия Москвы" (1997).

Работает в Московском университете на факультете ВМиК с 1974 г. в должностях ассистента (1974–1979), доцента (1979–1983), профессора кафедры общей математики (с 1983). С 1990 г. по совместительству работает в Вычислительном центре РАН — в настоящее время в должности главного научного сотрудника. Декан факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ (с 1999).

В течение пяти лет (1983–1988) возглавлял Совет молодых ученых МГУ. Работал ученым секретарем совета факультета ВМиК. Является заместителем председателя экспертного совета ВАК. Главный редактор журнала "Integral Transforms and Special Functions" главный редактор серии "Вычислительная математика и кибернетика" Вестника МГУ, член редколлегии журнала "Дифференциальные уравнения".

Область научных интересов: информатика, математическое мо-

делирование, спектральная теория, дифференциальные уравнения.

Е. И. Моисеевым найдены сектора на комплексной плоскости, в которых лежит спектр задачи Трикоми для уравнения смешанного типа из теории газодинамики. Получено эффективное представление решения задачи Трикоми, Франкля, Геллерстедта в виде биортогональных рядов как в двумерном, так и в трехмерном случаях; исследована базисность таких рядов. Развита разностные методы решения краевых задач с нелокальными краевыми условиями, которые возникают в теории турбулентной плазмы. Е. И. Моисеевым решена задача об определении функциональной зависимости координат риманова пространства-времени от координат пространства Минковского в случае статического сферически симметричного гравитационного поля. Получено представление вынужденных колебаний в коаксиально-слоистом волноводе в виде конечных сумм нормальных и присоединенных волн и доказана возможность приближения такими суммами. В теории гиперболических задач с граничным управлением решена одна задача Лионса о наличии априорной оценки градиента функции. В последние годы Е. И. Моисеевым в соавторстве с В. А. Ильиным выполнен большой цикл работ по оптимальному граничному управлению колебаниями струны с помощью смещения или упругой силы.

EXPONENTIAL CHARACTERISTIC OF LINEAR DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS IN BANACH SPACE

Mudrakova O.A., Orlik L.K. (Moscow)

Consider the differential-difference problem:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} - \sum_{j=1}^n A_j(t) y(t-a_j) = f(t) & (0 \leq t < \infty), \\ y(t) = 0 & (t \leq 0), \end{cases} \quad (1)$$

in the region $0 \leq t < \infty$. Here $0 \leq a_1 < \dots < a_n$, $(a_j \in R)$, $f(t)$, $y(t)$ are continuous vector-functions whose values lie in some complex Banach space X ; $A_j(t)$ are families of bounded linear compact operators which act in X .

Let

$$E_\alpha = \left\{ f(t) : \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (t^{-1} \ln \|f(t)\|_X) < \alpha + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \right\}.$$

The totality of solutions y is covered by E_β for β sufficiently large if f ranges over $B_\alpha \supset E_\alpha$; B_α is a Banach space which respects the norm

$$\|f\|_{B_\alpha} = \sup_{0 \leq t < \infty} \|f(t)\|_X e^{-\alpha t}$$

Denote by $\inf \beta = \alpha(\alpha)$ and is called exponential characteristic of problem (1).

Theorem. There exists an $(-\infty <) \alpha_0 \leq \beta_0 \leq \gamma_0 (< +\infty)$ such that $\alpha(\alpha) = \beta_0$ for $\alpha \leq \alpha_0$; $\alpha(\alpha) = \alpha$ for $\alpha \geq \gamma_0$; $\alpha(\alpha)$ is an increasing function on (α_0, γ_0) .

For problem (1) with periodic coefficients we get $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0$ and $\alpha(\alpha) = \max(\alpha, \alpha_0)$.

Here β_0 is the major index and γ_0 is the general index of associated uniform problem [3].

Literature

1. Orlik L.K. Exponential characteristic of evolutionary equations in Banach space. — Moscow, VARXBZ, 2005, 400p.
2. Orlik L.K. // J. Diff. Equations.-Vol.25. - №10 (1989). - p.1819 - 1820.

3. Daleckii U.L., Krein M.G. Stability of solutions of differential equations in Banach space/ - Moscow, NAUKA, 1970, 534p.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛАМЕ Абаполова Е.А. (Старый Оскол)

Рассмотрим систему Ламе [1]

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

с коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}; a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix}; a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}; a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

которые подчиняются требованиям положительной определенности матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3 \end{pmatrix} > 0, \quad (3)$$

и называются модулями упругости.

Вектор $u = (u_1, u_2)$ в (1) характеризует вектор смещения, он связан со столбцами $\sigma_{(1)} = (\sigma_1, \sigma_3)$, $\sigma_{(2)} = (\sigma_3, \sigma_2)$ тензора напряжений соотношениями $\sigma_{(j)} = a_{j1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{j2} \frac{\partial u}{\partial y}$, $j = 1, 2$, которые составляют содержание закона Гука.

Известно, что эта система эллиптична. Рассмотрим характеристический многочлен: $\chi(z) = \det[a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2]$ и предположим, что в верхней полуплоскости уравнение $\chi(z) = 0$ имеет один кратный корень ν . Тогда общее решение u системы Ламе описывается [2],[3] равенством $u = \operatorname{Re} B\varphi$, где B – вектор-функция $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ является решением так называемой системы Дуглиса

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - J \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Возникает вопрос об описании матрицы B . Этот вопрос был решен в [2]. Рассмотрим другое описание, более удобное для использования.

Упругая среда называется ортотропной, если координатные прямые служат осями симметрии. Этот случай соответствует обращению в нуль модулей упругости α_5 и α_6 в (2), (3). Получаем $\nu = i\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$. В результате в рассматриваемом ортотропном случае матрица B принимает следующий вид:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_2\nu^2 & 2\alpha_2\nu \\ -(\alpha_3 + \alpha_4)\nu & -(\alpha_3 + \alpha_4) \end{pmatrix},$$

Здесь $\alpha_4 = \sqrt{\alpha_1\alpha_2} - 2\alpha_3$, поскольку в противном случае предположение о кратности корней будет нарушено.

Литература

- [1] Г.Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела М. - Л., ГИТТЛ, 1950.
- [2] А.П. Солдатов, Система Ламе плоской анизотропной теории упругости, Доклады РАН, 2002, Т. 385, № 2. С. 163–167
- [3] А.П. Солдатов, О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости, Дифференц. уравнения, 2003, Т. 39. № 5. С. 674–676.

Симметричные решения обратных краевых задач в двусвязных областях

Абубакиров Н.Р. (Казань)

Nail.Abubakirov@ksu.ru

В данной работе, являющейся продолжением [1], рассматриваются обратные краевые задачи (ОКЗ) по параметрам x , $r = |z|$, $\theta = \arg z$ в двусвязных областях, решения которых удовлетворяют различным условиям симметрии.

1. Параметр x .

Требуется определить конечную двусвязную область D_z с жордановой границей $L_z = L_z^1 \cup L_z^2$ (L_z^1 лежит внутри L_z^2) и функцию $w(z)$, регулярную в этой области, если

$$\begin{aligned} w(z)|_{z \in L_z^1} &= f_1(x), & -a_1 \leq x \leq a_1, \\ w(z)|_{z \in L_z^2} &= f_2(x), & -ka_2 \leq x \leq ka_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $0 < a_1 < a_2$ заданы, а k – пока неопределенная константа. Справедлива

Теорема 1. Решением ОКЗ (1) будет зеркально симметричная функция $w(z)$ в зеркально симметричной области D_z тогда и только тогда, когда

$$f_j^-(x) = \overline{f_j^+(x)}, \quad j = 1, 2.$$

При этом k находится из условия однозначности [2].

2. Параметр r .

Если в постановке задачи (1) заменить $f_j(x)$ на $f_j(r)$, где $a_1 \leq r \leq 1/a_1$ для L_z^1 и $ka_2 \leq x \leq 1/ka_2$ для L_z^2 , то справедлива

Теорема 2. Решением ОКЗ (1) будет область D_w , симметричная относительно единичной окружности, и функция $w(z)$, удовлетворяющая условию $w(1/\bar{z}) = 1/\overline{w(z)}$, тогда и только тогда, когда при $r < 1$

$$f_j^\pm\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\overline{f_j^\pm(r)}}, \quad j = 1, 2.$$

3. Параметр θ .

Если в постановке задачи (1) заменить $f_j(x)$ на $f_j(r)$, где $-\pi \leq \theta \leq \pi$ для L_z^j и рассмотреть условия

$$f_j(\theta) = \overline{f_j(-\theta)}, \quad f_j(e^{2\pi i/n}\theta) = e^{2\pi i/n} \overline{f_j(\theta)}, \quad (2)$$

то имеет место

Теорема 3. 1) Если область D_w и функция $w(z)$ обладают симметрией относительно вещественной оси и луча, составляющего угол π/n с вещественной осью, то функции $f_j(\theta)$ удовлетворяют условию (2).

2) Если функции $f_j(\theta)$ удовлетворяют условию (2), то $w(z)$ и D_w будут n -симметричными.

Условия однозначности удовлетворяются подбором аргумента некоторой заранее неизвестной точки в кольце, являющемся образом искомой области D_z .

Литература

1. Абубакиров Н.Р. Симметричные решения обратных краевых задач и условия их однолиственности // Изв. вузов. Математика. – 2008. – N 2. – С. 69-72.
2. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 303 с.

3. Аксентьев Л.А. Симметричные решения обратных краевых задач // Труды семин. по краев. задачам. – Казань, 1974. – Вып.14. – С. 20–27.

4. Тумашев Г.Г. , Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. – 2-е изд. – Казань:Казан.ун-т, 1965. – 333 с.

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

Авраменко Л.Г. (Киев)

yuragoso@mail.ru

Дистанционным будем называть обучение без преподавателя, но под его руководством. Это отличает дистанционное обучение от самообразования, где преподаватель отсутствует вообще.

В последнее время в высших учебных заведениях возникают разнообразные подразделения, декларирующие дистанционное обучение студентов. При этом, как правило, под дистанционным обучением понимают обучение с использованием Интернета. Из огромного количества проблем, затрагивающих преподавателя, "обучающего" посредством Интернета, рассмотрим две: оплату труда и возникающие в результате этого труда авторские права.

Подавляющее большинство студентов имеет dial-up доступ к Интернету. О передаче каких-либо мультимедийных файлов на скорости 56 кбит/сек не может быть и речи. Поэтому общение со студентами происходит в виде текстовых сообщений. На лекции по математике продолжительностью 1,5 часа студент успевает законспектировать примерно 6-12 стр. Однако набрать этот же объем, используя $\TeX$, Word и т.д., никто не сможет в режиме реального времени. Особенность математического языка — это широкое использование символов, которые требуют особых затрат при подготовке исходных файлов с целью отображения формул. Но интерактивное обучение предполагает вопросы и ответы. Даже если вопросы сформулированы заранее, ответы на них в реальном масштабе времени невозможны. Если же снабдить каждого преподавателя достаточным количеством высококвалифицированных наборщиков, то это приведет к противоречию с утверждением об экономической целесообразности апологетов дистанционного обучения. И из каких нормативов будет осуществляться расчет часов?

Предположим, что все эти трудности технические, они преодоле-

ны и каждому студенту стали доступны средства для участия в телеконференциях. Однако такая телеконференция может быть записана и воспроизведена перед числом лиц более четырех, т.е. выпущена в свет. Кому принадлежат авторские права на контент? Ведь при удачной телеконференции ее воспроизведение можно приравнять к просмотру документального фильма. Как будет осуществляться защита авторских прав?

О СПЕКТРАХ И ПСЕВДОСПЕКТРАХ УСЕЧЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

Авсянкин О.Г. (Ростов-на-Дону)

avsyanki@math.rsu.ru

Пусть B_n — единичный шар в $\mathbf{R}^n$. В пространстве $L_p(B_n)$, где $1 < p < \infty$, рассмотрим оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{B_n} k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in B_n,$$

предполагая, что функция $k(x, y)$ определена на $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

- 1° $k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x, y), \quad \forall \alpha > 0;$
- 2° $k(\omega(x), \omega(y)) = k(x, y), \quad \forall \omega \in SO(n);$
- 3° $k(e_1, y)|y|^{-n/p} \in L_1(\mathbf{R}^n), \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0).$

Определим в $L_p(B_n)$ проектор P_τ ($0 < \tau < 1$) формулой

$$(P_\tau \varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \tau < |x| < 1, \\ 0, & |x| < \tau, \end{cases}$$

и положим $K_\tau = P_\tau K P_\tau$.

Обозначим через $Sp(A)$ и $Sp_\varepsilon(A)$ спектр и ε -псевдоспектр оператора $A \in \mathcal{L}(X)$ соответственно. Напомним, что

$$Sp_\varepsilon(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} : \lambda \in Sp(A) \vee \|(A - \lambda I)^{-1}\| \geq 1/\varepsilon\}.$$

Теорема 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} Sp_\varepsilon(K_\tau) = Sp_\varepsilon(K) \cup Sp_\varepsilon(\tilde{K}),$$

где $\tilde{K}$ — «транспонированный» оператор.

Теорема 2. Пусть K — самосопряженный оператор, действующий в $L_2(B_n)$. Тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} Sp(K_\tau) = Sp(K).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ ОЛДРОЙДА ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКО-УПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ

Агранович Ю.Я., Черников В.Н. (Воронеж)

agurya@yandex.ru, code@pisem.net

В ряде зарубежных работ [3] была решена проблема существования и единственности слабых и сильных решений в уравнениях вязкоупругой жидкостей модели Олдройда. Ниже предлагается численный метод определения априорных оценок с помощью численных экспериментов. Общий вид системы уравнений модели Олдройда:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + (u \cdot \nabla)u - \int_0^t \rho e^{-\delta(t-s)} \delta u ds + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0 (t \geq 0, x \in \Omega), \\ u_0 = 0 (t \geq 0, x \in \partial\Omega), \\ u(x, 0) = u_0(x) (x \in \Omega), \\ (p, 1) = \int_\Omega p(x, t) dx = 0 \end{cases}$$

В результате перехода от дифференциальных уравнений к уравнениям в конечных разностях было получено следующее решение для $u_{i,j,k}$:

$$u_{i,j,k} = \frac{h^2}{A_{i,j,k}} \left(f'_1 - \frac{M_{i,j,k}}{\tau h} + \frac{\varepsilon \cdot G_{i,j,k}}{h^3} - \frac{R_{i,j,k}}{h^2} + \rho \cdot \frac{e^{-\delta k \tau}}{h^3} \sum_{l=0}^k e^{\delta l \tau} G_{i,j,l} \right)$$

Коэффициенты $A_{i,j,k}$, $R_{i,j,k}$, $M_{i,j,k}$ и $G_{i,j,k}$ определены в [2]. Используя найденное решение можно найти $v_{i,j,k}$.

Компьютерное решение уравнения (1) позволяет устанавливать интервалы для коэффициентов, соответствующих априорных оценок сильных решений исходной задачи.

Литература

1. Агранович Ю.Я., Соболевский П.Е. Движение нелинейной вязкоупругой жидкости. / Докл. Акад. Наук СССР, том 314 (1990), №3, стр. 474-478.

2. Агранович Ю.Я., Черников В.Н. Равномерная разностная схема для движения жидкости модели Олдройда // Вестник ВГТУ №7. – Воронеж: ВГТУ. 2007.

3. Y.N. He, Y. Lin, S. Shen, R. Tait, Finite element approximation for the viscoelastic fluid motion problem, Journal of Computation and Applied Mathematics 155 (2003) 201-222.

ПРИНЦИП ПОГРУЖЕНИЯ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. (Алматы)

kabaset@mail.ru

Рассматривается следующая краевая задача:

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad (x_0, x_1) \in S, \quad x(t) \in G(t), \quad (2)$$

$$S = \{(x_0, x_1) \in R^{2n} / Cx_0 + Dx_1 = b\}, \quad (3)$$

$$G(t) = \{x \in R^n / \gamma(t) \leq L(t)x(t) + \mu(t) \leq \delta(t), \quad t \in I\}, \quad (4)$$

Получены решения следующих задач:

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения задачи (1)–(4).

Задача 2. Построить решение задачи (1)–(4).

Основа предлагаемого метода - принцип погружения, для применения которого вводится фиктивное управление и исходная задача сводится к задаче управляемости, затем, на основе, созданной в [1], теории управляемости - к задаче оптимального управления со свободными правыми концами траекторий. Преимуществами такого подхода являются: 1) возможность перехода к системе, для которой фундаментальной матрицей решений линейной однородной части будет единичная матрица, что удобно при возникновении трудностей,

связанных с построением фундаментальной матрицы; 2) возможность учесть ограничения на фазовые координаты системы; 3) разработка конструктивного метода проверки условий разрешимости задачи и построения решения.

Литература

1. Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С. Методы решения краевых задач. – Алматы, 2002, 347 С.

СПЛАЙНОВЫЕ ВЕЙВЛЕТЫ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АНТЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Алашеева Е.А., Блатов И.А., Рогова Н.В. (Самара)

blatow@mail.ru

Численное моделирование антенных устройств сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма первого или второго рода относительно неизвестной функции тока от одной переменной (в случае тонкопроволочных моделей) или двух переменных (в случае, например, тонкопроволочной антенны). Применение традиционных численных методов [1] приводит к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) высоких порядков (из-за большой длины контура в тонкопроволочном приближении и двумерности для параболической антенны) с плотными матрицами. Это обстоятельство является существенным препятствием для непосредственного применения метода интегральных уравнений в антенном моделировании. В докладе рассматривается метод вейвлет-Галеркина решения возникающих интегральных уравнений. Показано, что возникающие матрицы являются псевдоразреженными [2], вследствие чего возможно применение разреженных технологий и быстрых экономичных алгоритмов решения соответствующих СЛАУ. Приводятся теоремы об оценках элементов матриц, численные алгоритмы и результаты численных экспериментов.

Литература

[1] Вычислительные методы в электродинамике /под ред. Л.Митры/ М.: Мир, 1977.

[2] Блатов И.А. Об алгебрах операторов с псевдоразреженными матрицами и их приложениях // Сибирский математический журнал. 1996. Т. 37. N 1. С.36-59.

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ "ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ" СТУДЕНТАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ "АВТОМАТИЗИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ"

Алексеева С.М. (Калининград)
alekseeva-sm@yandex.ru, alekseeva@albertina.ru

Будущим специалистам в области электронных автоматизированных систем необходимо научиться решать прикладные задачи, связанные с обработкой цифровых и аналоговых сигналов. Для обработки сигналов важное значение имеет разложение сигнала, заданного функцией, в ортогональный ряд. Выбор наиболее рациональной ортогональной системы функций зависит от поставленных целей. Это может быть система основных тригонометрических функций, системы полиномов Чебышева, Эрмита, Лаггера, Лежандра, а также функций Уолша, Хаара и др. Каждый вид ортогональных систем имеет свою область применения. Исследуются звуковой сигнал и сигналы генераторов пилообразного напряжения и прямоугольных импульсов. Использование ППП Mathcad в разложении функций-сигналов в соответствующие ряды позволяет интенсифицировать процесс выработки математических навыков у студентов по теме "Ортогональные ряды", наглядно изучить ортогональные системы функций, связать математические и технические методы обработки современных цифровых и аналоговых систем.

Литература

1. Алексеева С.М. Ортогональные системы функций и их приложения. Учебное пособие. Калининград. БГА. 2005.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ШУРА НА ОКРУЖНОСТИ ДЛЯ ОБОВЩЁННОЙ ФУНКЦИИ КАРАТЕОДОРИ¹

Андреищева Е.Н. (Воронеж)
anda_el@mail.ru

Рассматривается обобщённая функция Каратеодори $f(z)$, которая для некоторого целого $p \geq 1$ имеет в $z_1 \in \mathbb{T}, |z| < 1$ асимптоти-

¹Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00566-а.

ческое разложение

$$f(z) = \tau_0 + \sum_{i=1}^{2p-1} \tau_i (z - z_1)^i + O((z - z_1)^{2p}), \quad z \rightarrow z_1. \quad (1)$$

Дробно-линейное преобразование $\hat{f}(z) = \chi_{\Theta^{-1}}(f(z))$, где Θ – матричная функция, называется обобщённым преобразованием Шура для обобщённой функции Каратеодори.

Доказано, что функция $\Theta(z)$ для $|z| < 1$ может быть представлена в виде

$$\Theta(z) = I_2 - \frac{(1 - zz_0^*)}{(1 - zz_1^*)^k} p(z) \begin{pmatrix} \tau_0^* & -\tau_0^* \tau_0 \\ -1 & \tau_0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где z_0 – точка единичной окружности, отличная от точки z_1 , $p(z)$ – полином степени $\deg p(z) \leq k-1$, $p(z) = (1 - zz_1^*)^k R(z) G^{-1} R(z_0)^*$,

$$R(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & \cdots & z^{k-1} \\ (1 - zz_1^*) & (1 - zz_1^*)^2 & \cdots & (1 - zz_1^*)^k \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \tau_0^* \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица G – подматрица размерности k матрицы Грама векторов $f_i(z)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$ вида

$$f_{j+1}(z) = \frac{z^{j+1}}{(1 - zz_1^*)^{j+2}} \begin{pmatrix} \tau_0^* \\ -1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{j+1} \frac{z^{j+1-k}}{(1 - zz_1^*)^{j+2-k}} \begin{pmatrix} \tau_k^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получено обобщённое преобразование Шура в точке z_1 на окружности для обобщённой функции Каратеодори:

$$\hat{f}(z) = \frac{\{(1 - zz_1^*)^k - \tau_0(1 - zz_0^*)p(z)\}f(z) - \tau_0\tau_0^*(1 - zz_0^*)p(z)}{-(1 - zz_0^*)p(z)f(z) + \{(1 - zz_1^*)^k - \tau_0^*(1 - zz_0^*)p(z)\}}. \quad (3)$$

Литература

1. Alpay D. The transformation of Issai Schur and related topics in indefinite setting / D. Alpay, A. Dijksma, H. Langer // Operator Theory: Adv. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel. – 2007. – Vol. 176. – P.1-98.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ¹

Андрианов Д.Л., Симонов П.М. (Пермь)

simonov@econ.psu.ru

В нелинейных краевых задачах динамика переменных описывается уравнением

$$x(t+1) = (Fx)(t), \quad t = 0, 1, \dots, m-1 \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$\eta x = 0. \quad (2)$$

Здесь $F: M_{m+1}^n \rightarrow M_m^n$ и $\eta: M_m^n \rightarrow R^n$ — нелинейные непрерывные операторы, M_{m+1}^n и M_m^n — $n \times (m+1)$ и $n \times m$ вещественные матрицы. Для исследования таких краевых задач используются схемы с построением и использованием априорных неравенств вида

$$\|x(t)\| \leq \mathcal{M}(t, \|x(0)\|). \quad (3)$$

Обозначим через $\varphi(t, \alpha)$ решение задачи Коши

$$x(t+1) = (Fx)(t), \quad t = 0, 1, \dots, m-1; \quad x(0) = \alpha.$$

Тогда разрешимость краевой задачи (1), (2) эквивалентна разрешимости уравнения

$$\eta(\varphi(\cdot, \alpha)) = 0$$

относительно $\alpha \in R^n$. Разрешимость этого уравнения можно установить, используя неравенство (3).

Теорема. Пусть

$$\|x(0) - \eta x\| \leq \mu(\|x(\cdot+1)\|, \|x(0)\|), \quad \forall x \in M_{m+1}^n,$$

$$\|\varphi(t, \alpha)\| \leq \mathcal{M}(t, \|\alpha\|), \quad \forall t = 0, 1, \dots, m, \quad \alpha \in R^n,$$

причем функция $\mu: M_m^1 \times [0, \infty) \rightarrow R^1$ не убывает по каждому аргументу, а функция $\mathcal{M}: \{0, 1, \dots, m\} \times [0, \infty) \rightarrow R^n$ не убывает по второму аргументу.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Пермского края (проекты N 06-01-00744-а, N 07-01-96060-р-урал-а и N 08-01-00470-а) и ЗАО "ПРОГНОЗ".

Тогда задача (1), (2) имеет решение, если ограничено множество

$$\{\delta \geq 0 : \delta \leq \mu(\mathcal{M}(\cdot + 1, \delta), \delta)\}.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ — ПРОБЛЕМЫ И РЕШЕНИЯ

Арутюнян Г.В., Марчевская Е.В. (Москва)

LiaMarchevsky@mail.ru

Геометрия является одним из мощных средств интеллектуального развития личности. В ходе решения любой геометрической задачи активизируются оба полушария человеческого мозга, управляющие логическим мышлением и творческими процессами. К сожалению, за отведенное учебное время не удастся раскрыть перед учащимися всю красоту и стройность геометрии, ее практическую значимость. В последние годы учащиеся воспринимают предмет геометрии как второстепенный, не понимают сути многих определений и теорем, заучивая их формально; не могут применять изученные факты и формулы. Практика показывает, что на экзаменах геометрические задачи вызывают большие затруднения, а зачастую учащиеся и не приступают к их решению. Менее трети учащихся из приступивших к планиметрической задаче на ЕГЭ–2007 справились с ней.

Повышение интереса к геометрии, систематизация знаний и формирование навыков у учащихся — в первую очередь методическая проблема. К ее решению можно подойти путем усиления наглядности с помощью компьютерных технологий; формирования навыка применения «ключевых» задач при различных комбинациях фигур; решения задач на комплексное применение знаний из различных разделов математики. Одним из интересных методических подходов является использование геометрических знаний (интерпретаций) при решении алгебраических задач. Например, «Решите уравнение $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ », «Найдите наименьшее значение суммы $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{z^2+9}$, если $x+y+z=8$ », «Решите систему $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \geq 2\sqrt{5}, \\ \sqrt{x^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} \leq 2\sqrt{13}. \end{cases}$ »

Их решение основано на использовании координатного метода, на искусственном конструировании и рассмотрении геометрических фигур с присущими им свойствами и характеристиками. Такие зада-

чи встречаются достаточно редко, но их решение с использованием геометрии оказывается подчас единственно возможным, оно завораживает своей красотой и необычностью трактовки. Знакомство с подобными нестандартными ситуациями позволяет расширить область применения геометрических знаний, развивая у учащихся гибкость мышления и образное восприятие математических формул.

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹

Архипов В.П. (Старый Оскол)

varhipov@inbox.ru

Как известно поведение решений линейных дифференциальных уравнений в основном определяется старшими производными, входящими в уравнение. Классические рассуждения предполагают, что коэффициент при старшей производной является достаточно гладкой, не обращающейся в нуль функцией на некотором числовом промежутке. Исследования решений уравнений с обращающимися в нуль коэффициентами при старшей производной проводились Дж. Стоксом, С.А.Ломовым, В.П. Глушко и его учениками. Отметим также относительно недавнюю, обстоятельную и подробную статью Н.Х.Розова, В.Г.Сушко, Д.И.Чудовой[1]. Однако точное поведение решений вблизи точки вырождения было изучено недостаточно полно. В настоящей работе устанавливаются точные асимптотические формулы для решений уравнений

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = f(t), t \in [0; d], a(0) = 0, b_0 \neq 0, \quad (1)$$

вблизи точки вырождения $t_0 = 0$.

Будем считать коэффициенты и правую часть уравнения (1) бесконечно дифференцируемыми функциями на $[0; d]$. Пусть также $a(t) > 0$ при $t \in (0; d]$. Выбрав достаточно малое $\delta > 0$, определим на отрезке $[0; \delta]$ функцию $a(t) = \sqrt{b^2(t) - 4a(t)c(t)} > \frac{|b_0|}{2}$, и функции $v_{1,2}(t) = \alpha^{-\frac{1}{2}}(t) \cdot \exp \int_t^\delta \frac{b(\tau) \pm \alpha(\tau)}{2 \cdot a(\tau)} d\tau$. Рассмотрим интегральные уравнения $\Phi(t) = 1 + K_1\Phi(t)$ и $\Psi(t) = 1 + K_2\Psi(t)$ с операторами $K_1\varphi(t) =$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №06-08-96312.

$\int_0^\delta K_1(t, t_1) \varphi(t_1) dt_1$, $K_2 \psi(t) = \int_0^t K_2(t, t_1) \psi(t_1) dt_1$, где $K_1(t, t_1) =$
 $\begin{cases} h(t_1), & 0 \leq t_1 \leq t \leq \delta \\ h(t_1) e^{w(t_1) - w(t)}, & t \leq t_1 \leq \delta \end{cases}$ и $K_2(t, t_1) = -h(t_1)[1 - e^{w(t) - w(t_1)}]$,
 $0 \leq t_1 \leq t \leq \delta$ соответственно, а функции $h(t)$; $w(t)$ определяются
 равенствами: $h(t) = \frac{\alpha^{-1}(t)}{4} \cdot (a(\frac{\alpha'}{\alpha})^2 - 2(a(\frac{\alpha'}{\alpha}))' - 2b')$, $w(t) = \int_t^\delta \frac{\alpha(\tau)}{a(\tau)} d\tau$
 (интеграл $\int_0^\delta \frac{d\tau}{a(\tau)} = +\infty$). Величина $\delta > 0$ выбирается так, чтобы ре-
 ализовывались условия сжатия для операторов K_1 и K_2 в $C[0; \delta]$, для
 чего достаточно выполнения неравенства $\int_0^\delta |h(t_1) dt_1| < \ln 2$. Приве-
 дем здесь подробнее лишь основной результат для однородного урав-
 нения

$$(a(t)u'(t))' + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = 0, \quad t \in [0; d], \quad a(0) = 0, \quad b(0) \neq 0, \quad (2)$$

Теорема 1. Пусть коэффициенты уравнения (2) бесконечно диф-
 ференцируемы, $a(0) = 0$, $b_0 = b(0) \neq 0$, $a(t) > 0$ при $t \in (0; \delta]$ и
 выполнены вышеперечисленные условия.

Функции $u_1(t) = v_1(t) \cdot \Phi(t) \in C^\infty(0; \delta]$ и $u_2 = v_2(t) \cdot \Psi(t) \in$
 $C^\infty(0; \delta]$, где $v_1(t), v_2(t)$, определены выше, а $\Phi(t) = \sum_{k=0}^\infty \varphi_k(t)$ и
 $\Psi(t) = \sum_{k=0}^\infty \psi_k(t)$, асимптотические при $t \rightarrow 0 + 0$ ряды, заданные
 соотношениями $\varphi_{k+1}(t) = K_1 \varphi_k(t)$, $\varphi_0(t) = 1$, $\psi_{k+1}(t) = K_2 \psi_k(t)$,
 $\psi_0(t) = 1$ соответственно, представляют на интервале $(0; \delta)$ фунда-
 ментальную систему решений уравнения (2).

При этом, если $b(0) = b_0 < 0$, то $u_{1,2}(t) \in C^N[0; \delta]$, где $N =$
 $\max(m : b_0 + m \cdot a'(0) < 0)$, и $\lim_{t \rightarrow 0+0} u_2^{(m)}(t) = 0$ для $0 \leq m \leq N$; а
 $\lim_{t \rightarrow 0+0} u_1(t) = u_1(0) = \text{const} > 0$.

Если $b(0) = b_0 > 0$, то $u_2(t) \in C^\infty[0; \delta]$, $u_2(0) > 0$, а $u_1(t) \in$
 $C^\infty(0; \delta]$ и $\lim_{t \rightarrow 0+0} u_1^{(m)}(t) = +\infty$ для всех $m \geq 0$.

Для общего решения уравнения (1) установлены аналогичные
 утверждения.

Литература

1. Розов Н.Х., Сушко В.Г., Чудова Д.И. Дифференциальные урав-
 нения с вырождающимся коэффициентом при старшей производной.

ПЛОСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ ФИКСИРОВАННОЕ АНГАРМОНИЧЕСКОЕ ОТНОШЕНИЕ

Асеев В.В. (Новосибирск)

btp@math.nsc.ru

В работе Кобаяси [1, Theorem 2.1, p. 118] получена следующая

Теорема 1. Пусть комплексное число $\lambda \in \mathbb{C}$ не является вещественным. Пусть отображение $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ области $U \subset \mathbb{C}$ является инъективным отображением класса гладкости C^1 . Если для любой четверки попарно различных точек $z_1, z_2, z_3, z_4 \in U$ с ангармоническим отношением $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \lambda$ выполняется равенство $[f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] = \lambda$, то f есть мебиусово отображение.

Применяя чисто геометрический метод доказательства, не использующий теорию аналитических функций, удается снять все ненужные ограничения в условиях этой теоремы и получить следующий результат:

Теорема 2 (Асеев В.В., Кергилова Т.А.). Пусть $f : U \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ — непрерывное отображение области $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ и λ — комплексное число, отличное от 0 и 1. Пусть $T(\lambda, f)$ — множество всех четверок попарно различных точек в U , удовлетворяющих условиям:

(i) $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \lambda$;

(ii) четверка $\{f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)\}$ не содержит трех одинаковых точек.

Если для любой четверки $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \in T(\lambda, f)$ выполняется равенство $[f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] = \lambda$, то f либо константа, либо является мебиусовым отображением. Во втором случае если λ не является вещественным, то f — дробно-линейное отображение.

Литература

[1] Kobayashi O. *Apollonius points and anharmonic ratios.* // Tokyo J. Math. 2007. V. 30. No. 1. P. 117-119.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹

Асташова И.В. (Москва)

ast@diffiety.ac.ru

Изучаются следующие дифференциальные уравнения:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} q_i(x) y^{(i)} + p(x) |y|^{k-1} y = 0, \quad n \geq 1, k > 1. \quad (1)$$

$$y^{(n)}(x) = p(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) |y(x)|^{k-1} y(x), \quad k > 1. \quad (2)$$

$$y^{(n)} + p(x) |y|^{k-1} y = 0, \quad k > 0, k \neq 1. \quad (3)$$

- для уравнения (1) получены равномерные оценки положительных решений с общей областью определения, зависящие от оценок коэффициентов уравнения и не зависящие от самих коэффициентов;
- доказан критерий колеблемости всех решений уравнения (1) (обобщение теоремы Аткинсона [1]);
- для уравнения (2) произвольного порядка доказано существование решения с вертикальной асимптотой, имеющего степенную асимптотику, а для уравнений четного порядка — кнезеровских решений, имеющих степенную асимптотику; при этом для уравнений третьего и четвертого порядков доказано, что все решения с вертикальной асимптотой имеют степенную асимптотику (гипотеза И. Т. Кигурадзе [2]), а для уравнений четвертого порядка — что все кнезеровские решения имеют степенную асимптотику;
- для уравнения (3) третьего и четвертого порядков получена асимптотическая классификация всех решений в случаях регулярных и сингулярных нелинейностей;

¹Выполнено при поддержке РФФИ, грант 08-01-00819, и гранта НШ-1698.2008.1

- исследовано асимптотическое поведение решений и получены равномерные оценки модуля и аргумента решений нелинейного одномерного уравнения Шредингера (уравнения (3) второго порядка с комплекснозначным потенциалом и регулярной нелинейностью).

Литература

1. Atkinson F. V. On second order nonlinear oscillations. – Pacif. J. Math., 1955, V. 5, № 1, p.643–647.
2. Кизгурадзе И. Т., Чантурия Т. А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990, 432 с.

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ПРЕДПОЧТЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Ащепков Л.Т. (Владивосток)

ltas@iam.dvo.ru

Интервальнозначные функции используются в различных областях знаний при описании процессов и явлений с параметрическими неопределенностями. Запросы теории и практики привели к созданию в 1950-х годах нового математического направления - интервального анализа. Первые исследования группировались вокруг задач вычислительной математики и были направлены, в основном, на получение двухсторонних оценок точных решений. Позже с развитием математического программирования и оптимального управления интерес исследователей переместился к интервальным задачам принятия решений.

В первой части доклада эти задачи трактуются как задачи с параметрическими неопределенностями. Под решением задачи понимается одно "приемлемое" решение для всего параметрического семейства задач. Понятие "приемлемости" сочетает точность выполнения ограничений с требованием оптимизации целевой функции в каждой задаче семейства и естественно приводит к понятию *универсального* решения. Такой подход позволяет редуцировать интервальные задачи к разрешимым детерминированным задачам [1] с регуляризированными ограничениями.

Во второй части доклада развивается другой подход, использующий интервальные предпочтения. Вводится [2] простой численный

показатель выполнения интервального неравенства для пары вещественных интервалов и устанавливается его связь с вероятностью выполнения неравенства. С использованием введенного показателя формализуются целевые предпочтения для интервальных задач математического программирования и бескоалиционных игр.

Литература

1. Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления.- М.: Наука, 2006.- 151 с.
2. Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. Показатель интервального неравенства: свойства и применение // Вычислительные технологии.- 2006.- Т. 11.- № 4.- С. 13-22.

АСИМПТОТИКА НАИБОЛЬШЕГО НУЛЯ МНОГОЧЛЕНА, ОРТОГОНАЛЬНОГО НА ОТРЕЗКЕ С НЕКОТОРЫМ НЕКЛАССИЧЕСКИМ ВЕСОМ¹

Бадков В.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(t)$; $\{x_{n,\nu}^{(p)}\}_{\nu=1}^n$ — нули многочлена $p_n(t)$; $(x_{n,\nu}^{(p)} = \cos \theta_{n,\nu}^{(p)}; 0 < \theta_{n,1}^{(p)} < \theta_{n,2}^{(p)} < \dots < \theta_{n,n}^{(p)} < \pi)$.

Известно [1], что для широкого класса весов $p(t)$, содержащего вес Якоби $p(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ ($\alpha, \beta > -1$), величина $\theta_{n,1}^{(p)}$ по порядку совпадает с n^{-1} . Приведем пример веса $p(t)$, для которого $\theta_{n,1}^{(p)} = o(n^{-1})$ ($n \rightarrow \infty$).

Основным результатом сообщения является следующая

Теорема. Пусть вес $p(t)$ имеет вид

$$p(t) = 4(1-t^2)^{-1} \{ \ln^2[(1+t)/(1-t)] + \pi^2 \}^{-1}.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\theta_{n,1}^{(p)} = \frac{2\sqrt{2}}{n\sqrt{\ln(n+1)}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right) \right],$$

$$x_{n,1}^{(p)} = 1 - \frac{4}{n^2 \ln(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln^2(n+1)}\right).$$

¹Работа поддержана РФФИ (проект 08-01-00213) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1071.2008.1)

При получении этого результата использована связь многочленов, ортогональных на отрезке, с многочленами, ортогональными на окружности.

Литература

1. Бадков В.М. *О нулях ортогональных полиномов* // Тр. Института математики и механики УрО РАН. – 2005. – Т. 11, № 2. – С. 30-46.
2. Бадков В.М. *Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса* // Тр. МИРАН. – 1992. – Т. 198. – С. 41-88.
3. Бадков В.М. *Введение в единую теорию алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов: Учеб. пособие.* // Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. – 132 с.

ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, МОДЕЛИРУЮЩЕГО ПРОЦЕССЫ С ВЫРОЖДЕНИЕМ Баев А.Д. (Воронеж)

В полосе $R_d^n = \{0 < t < d, x \in R^{n-1}\}$ ($d > 0$ — некоторое число) рассматривается уравнение

$$A(D_x, D_{\alpha, t}, \partial_t)v(x, t) \equiv L_{2m}(D_x, D_{\alpha, t})v + (-1)^l \partial_t^{2l} v = F(x, t), \quad (1)$$

где $L_{2m}(D_x, D_{\alpha, t}) = \sum_{|\tau|+j \leq 2m} a_{\tau j} D_x^\tau D_{\alpha, t}^j$,

$D_x^\tau = (i)^\tau \frac{\partial^{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1}}}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2} \dots \partial x_{n-1}^{\tau_{n-1}}}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_{\alpha, t} = i\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $a_{\tau j}$ — комплексные коэффициенты.

На границе $t = 0$ полосы задаются условия:

$$\sum_{|\tau| \leq k_j} b_{\tau j} D_x^\tau \partial_t^{l-j} v(x, t)|_{t=0} = G_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (2)$$

где $b_{\tau j}$ — комплексные коэффициенты.

На границе $t = d$ полосы задаются условия:

$$v(x, t)|_{t=d} = \partial_t v(x, t)|_{t=d} = \dots = \partial_t^{m-1} v(x, t)|_{t=d} = 0. \quad (3)$$

Пусть выполнены следующие условия:

Условие 1. При всех $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$ справедлива оценка $\operatorname{Re} L_{2m}(\xi, \eta) \geq c(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от ξ, η .

Условие 2. Для некоторого $s \geq 2m + \max_{j=1,2,\dots,l} k_j$ функция $\alpha(t)$ принадлежит пространству $C^{s-1}[0, d]$, причём $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. При всех $\xi \in R^{n-1}$ справедливы оценки $\left| \sum_{|\tau| \leq k_j} b_{\tau j} \xi^\tau \right| > 0$, $j = 1, 2, \dots, l$.

Рассмотрим пространства $H_{s,\alpha,q}(R_d^n)$, $H_s(R^{n-1})$ ($s \geq 0$ — действительное число), нормы в которых задаются соответственно равенствами

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{m}{l}}^2 = \sum_{k+\frac{m}{l}j \leq s} \left\| F_\alpha^{-1} F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [(1 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}k} F_\alpha F_{x \rightarrow \xi} [\partial_t^j v]] \right\|_{L_2(R_d^n)}^2,$$

$$\|g\|_s = \left\| F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} F_{\xi \rightarrow x} [g(x)]] \right\|_{L_2(R^{n-1})}.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $s \geq 2m + \max_{j=1,\dots,l} \{k_j\}$ — действительное число, $m \geq 2l$ — четное число и выполнены условия 1–3. Пусть $F(x, t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{m}{l}}(R_d^n)$, $G_j(x) \in H_{s-(l-j)\frac{m}{l}-\frac{m}{2l}}(R^{n-1})$ $j = 1, 2, \dots, l$. Тогда для любого решения $v(x, t) \in H_{s,\alpha,\frac{m}{l}}(R_d^n)$ задачи (1)–(3) справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{m}{l}} \leq c \left(\|F\|_{s-2m,\alpha,\frac{m}{l}} + \sum_{j=1}^l \|G_j(x)\|_{s-(l-j)\frac{m}{l}-\frac{m}{2l}-k_j} \right)$$

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ И ЯДРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Барышева И.В. (Липецк)

baryshev@lipetsk.ru

Пусть $U = C(C^{(p)}(t))$ — пространство функций $x(t, s)$, непрерывных на $[a, b] \times [c, d]$ вместе с частными производными по переменной t до порядка p -го включительно. U — банахово пространство

относительно нормы $\|x\|_U = \sup_{s,t} \sum_{k=0}^p |x_t^{(k)}|$. Рассмотрим условия фредгольмовости в пространстве U уравнения $x = Kx + f$, где $K = L + M + N$, а L, M, N — операторы вида $(Lx)(t, s) = \int_a^b l(t, \tau)x(\tau, s)d\tau$, $(Mx)(t, s) = \int_c^d m(s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma$, $(Nx)(t, s) = \int_a^b \int_c^d n(t, s, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\sigma d\tau$, $t, \tau \in [a, b]$, $s, \sigma \in [c, d]$, f и ядра l, m, n — заданные непрерывные по совокупности переменных функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Такие уравнения в различных функциональных пространствах изучались в [1]. Приближим l и m функциями $\tilde{l}(t, \tau) = \sum_{i=1}^u l_i(t)a_i(\tau)$, $\tilde{m}(s, \sigma) = \sum_{j=1}^q m_j(s)b_j(\sigma)$, где $l_i \in C^{(p)}$; m_j, a_i, b_j ($i = 1, \dots, u$; $j = 1, \dots, q$) — непрерывные функции и системы функций $\{a_i\}, \{b_j\}$ ортонормированы. Пусть $\bar{r}_1(t, \tau), \bar{r}_2(s, \sigma)$ — резольventные ядра операторов $\bar{L}, \bar{M}$ с ядрами $\bar{l} = l - \tilde{l}$ и $\bar{m} = m - \tilde{m}$ соответственно, и пусть $\mu_{ij} = \int_a^b a_i(\tau)(l_j(\tau) + \int_a^b \bar{r}_1(\tau, \tau_1)l_j(\tau_1)d\tau_1)d\tau$, $\nu_{jk} = \int_c^d b_j(\sigma)(m_k(\sigma) + \int_c^d \bar{r}_2(\sigma, \sigma_1)m_k(\sigma_1)d\sigma_1)d\sigma$.

Теорема. Если для ядер l и n существуют непрерывные частные производные по переменной t до p -го порядка включительно, то уравнение $x = Kx + f$ фредгольмово в U точно тогда, когда

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 - \mu_{11} & \dots & -\mu_{1u} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\mu_{u1} & \dots & 1 - \mu_{uu} \end{vmatrix} \neq 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 - \nu_{11} & \dots & -\nu_{1q} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\nu_{q1} & \dots & 1 - \nu_{qq} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ РАДИУС КАК ПОЗИТИВНОЕ СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Бахтин И.А. (Воронеж)

В вещественном банаховом пространстве с конусом приводятся признаки существования положительных собственных векторов линейных положительных операторов, отвечающих их спектральным или конусным радиусом.

Они представляют собой обобщение и развитие соответствующих результатов М. Г. Крейна и ряда других математиков.

1. Теорема 1. Пусть в банаховом пространстве E с воспроизводящим конусом K

1) линейный оператор A положителен, и его спектральный радиус $\lambda_0 = r(A) > 0$;

2) периферический спектр $\Pi(A)$ оператора A имеет конечный ранг и зазор $q(A) < r(A)$;

3) спектр $\sigma(\tilde{A})$ индуцированного оператора $\tilde{A}$ на факторпространство $E \setminus E_0$, где $E_0 \subset E$ — инвариантное подпространство оператора A , соответствующее его периферическому спектру $\Pi(A)$, не пересекается с $\Pi(A)$.

Тогда существует элемент $x_0 > 0$, такой, что $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.

2. Теорема 2. Пусть в банаховом пространстве E , клин $K \neq E$ телесен, а линейный оператор A положителен.

Тогда существует функционал $f_0 \in K^* \setminus 0$, такой, что

$$A^* f_0 = \lambda_0 f_0,$$

где число

$$\lambda_0 = \inf \{ \lambda > 0 \mid Ax \leq \lambda x, x \in K(u) \},$$

а $K(u)$ — множество всех элементов $x \in K$, соизмеримых с каким-нибудь внутренним элементом u клина K .

Отметим, что ранее такая теорема была доказана М. Г. Крейном, но в ней не указывалось чему равно число λ_0 .

3. Теорема 3. Пусть в банаховом пространстве E с конусом K

1) линейный оператор A положителен, и его спектральный радиус $\lambda_0 = r(A) > 0$;

2) периферический спектр $\Pi(A)$ оператора A имеет конечный ранг и зазор $q(A) < r(A)$;

3) существует элемент $u > 0$, обладающий свойствами:

а) $AE_u \subset E_u$, $AK(u) \subset K(u)$;

б) спектр оператора A в пространстве E_u элементов $x \in E$ с нормой $\|x\|_* = \|x\| + \|x\|_u$ состоит из одних собственных чисел оператора A и возможно нуля;

в) комплексификация $\tilde{E}_u \supset E_0$, где E_0 — инвариантное подпространство оператора A , отвечающее спектру $\Pi(A)$.

Тогда существует элемент $x_0 > 0$, такой, что $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ МЕТОДОВ ОТЫСКАНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Бахтин И.А., Болдырева А.В. (Воронеж)

В вещественном банаховом пространстве E с конусом $K \subset E$, вообще говоря, не обладающим свойством нормальности, приводятся некоторые оценки скорости сходимости приближённых методов отыскания положительных собственных векторов линейных положительных операторов.

1. Определение. *Линейный положительный на конусе K оператор A , действующий в банаховом пространстве E с конусом $K \subset E$, называется h -экстремальным в E , если для любой возрастающей, ограниченной сверху последовательности $(x_n) \subset E$ существует элемент $u = \sup(Ax_n)$.*

Теорема 1. Пусть

1) в вещественном банаховом пространстве E с воспроизводящим конусом K линейный непрерывный положительный оператор A h -экстремален;

2) оператор A преобразует конус K в некоторый конус $K_{u,\rho}$ Красносельского, где $u > 0$ и $\rho \geq 1$ — некоторые фиксированные элемент и число, и значение $Au \neq 0$.

Тогда существует элемент $x_* > 0$, $(\|x_*\|_u = 1)$, такой, что $Ax_* = r(A)x_*$, где $r(A) > 0$ — спектральный радиус оператора A , и для любого элемента $x_0 \in K_{u,\rho}$ $(\|x_0\|_u = 1)$ последовательность

$$x_n = \frac{Ax_{n-1}}{\|Ax_{n-1}\|_u} \quad (n \in \mathbb{N})$$

по u -норме $\|x\|_u$ сходится к элементу x_* , причём

$$\alpha_n x_n \leq x_* \leq \beta_n x_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

и

$$\|x_n - x_*\|_u \leq \max\{1 - \alpha_n, \beta_n - 1\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

где $\alpha_n = \rho^{-\frac{q^n}{1-q}}$, $\beta_n = \rho^{\frac{q^n}{1-q}}$ $(n \in \mathbb{N})$; $q = \frac{\rho-1}{\rho+1}$.

2. Определение. *Линейный положительный оператор A , действующий в банаховом пространстве E с конусом K , называется экстремальным, если для любой возрастающей, ограниченной*

по норме последовательности $(x_n) \subset E$ существует элемент $u = \sup(Ax_n)$.

Теорема 2. Пусть

1) выполняются все условия теоремы 1, в которой требование h -экстремальности оператора A заменено на его экстремальность u

2) множество $A < 0, u >$ ограничено по норме.

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

О ПЕРЕМЕСТИТЕЛЬНОМ СВОЙСТВЕ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Бахтин И.А., Гурба Т.В. (Воронеж)

В вещественном банаховом пространстве E приводятся условия, при выполнении которых сходящиеся ряды элементов обладают переместительным свойством.

1. Определение. Говорят, что сходящийся к своей сумме $s \in E$ ряд элементов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ банахова пространства E обладает переместительным свойством, если любой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x'_k (x'_k = x_{n_k})$, полученный из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ путём перестановки его членов сходится к той же сумме s .

Теорема 1. Если в банаховом пространстве E каждый ряд элементов $\sum_{k=1}^{\infty} x'_k$, полученный из некоторого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ путем перестановки его членов сходится, то этот ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ обладает переместительным свойством.

2. Теорема 2. Если ряд элементов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ банахова пространства E обладает переместительным свойством, то для любого функционала $f \in E^*$ сопряженного пространства E^* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ абсолютно сходится.

Отметим, что в некоторых банаховых пространствах существуют сходящиеся ряды, не обладающие переместительным свойством, для

которых все ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) (f \in E^*)$ абсолютно сходятся.

Например, в банаховом пространстве $E = C[0, 1]$ этими свойствами обладает ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

3. Определение. Ряд элементов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ банахова пространства E назовем нормально сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Теорема 3. Всякий нормально сходящийся ряд элементов банахова пространства E обладает переместительным свойством.

4. Теорема 4. Пусть в банаховом пространстве E конус $K \subset E$ нормален. Тогда сходящийся ряд элементов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n (x_n \in K \cup (-K), n \in \mathbb{N})$ обладает переместительным свойством, если сходится по крайней мере один из рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|,$$

где

$$u_n = \begin{cases} x_n, & x_n \in K \\ 0, & x_n \in (-K) \end{cases} \quad v_n = \begin{cases} 0, & x_n \in K \\ -x_n, & x_n \in (-K) \end{cases}$$

$$|x_n| = \begin{cases} x_n, & x_n \in K \\ -x_n, & x_n \in (-K) \end{cases}$$

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

Бахтин И.А., Дорохов А.Н. (Воронеж)

Как известно, полное счётно-номерованное пространство E с возрастающей системой полунорм: $\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \dots \leq \|x\|_n \leq \dots$ является F -пространством (пространством Фреше) с ρ -нормой $\|x\|_{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x\|_n}{2^n(1+\|x\|_n)}$.

1. Рассмотрим в счётно-номерованном пространстве $C_{[0, \infty)}^0$ непрерывных в полуинтервале $[0, \infty)$ функций $x = x(t)$ с системой полу-

норм $\|x\|_n = \max_{t \in [0, n]} (x(t))$ ($n \in N$) интегро-функциональный оператор:

$$Ax(t) = \int_0^t K(t, s, x(s))ds + \Phi(t, x(t)). \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть

1) функция $K(t, s, u)$ определена и непрерывна на множестве $M_1 = [0, \infty) \times [0, \infty) \times (-\infty, +\infty)$ и существуют числа $q_1 \in (0, 1)$ и $a, l > 0$, такие, что

$$|K(t, s, u)| \leq \frac{l+q_1|u|}{a+t} \quad ((t, s, u) \in M_1);$$

2) функция $\Phi(t, u)$ ($\Phi(t, 0) \equiv 0$) непрерывна на множестве $M_2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$ и существует число $q_2 \in (0, 1 - q_1)$, такое, что $|\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2)| \leq q_2|u_1 - u_2|$ ($(t, u_1), (t, u_2) \in M_2$), а число $r = \frac{l}{1-q_1-q_2} < 1$.

Тогда интегро-функциональный оператор (1) имеет в пространстве $C_{[0, \infty)}^0$ по крайней мере одну неподвижную точку.

2. Рассмотрим в счётно-номерованном пространстве $C_{(0, \infty)}^0$ непрерывных ограниченных на каждом полуинтервале $(0, n]$ ($n \in N$) функций $x = x(t)$ с системой полунорм $\|x\|_n = \sup_{t \in (0, n]} |x(t)|$ ($n \in N$) интегральный оператор:

$$Ax(t) = Bx(t) + Cx(t) = \frac{1}{t} \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \varphi_1(t) + \int_0^t K_2(t, s, x(s))ds, \quad (2)$$

где $Bx(t) = \frac{1}{t} \int_0^t K_1(t, s)x(s)ds + \varphi_1(t)$, $Cx(t) = \int_0^t K_2(t, s, x(s))ds$.

Теорема 2. Пусть

1) функция $K_1(t, s)$ определена и непрерывна на множестве $M_1 = [0, \infty) \times [0, \infty)$ и $\|x\|_n = \sup_{(t, s) \in M_1} |K_1(t, s)| \leq q_1 \in (0, 1)$;

2) функция $K_2(t, s, u)$ определена и непрерывна на множестве $M_2 = [0, \infty) \times [0, \infty) \times (-\infty, +\infty)$ и существуют числа $a > 0$, $q_2 \in (0, 1 - q_1)$ и функция $\varphi_2(t)$, такие, что $|K_2(t, s, u)| \leq \frac{|\varphi_2(t)| + q_2|u|}{t+a}$ ($(t, s, u) \in M_2$);

3) функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ определены и непрерывны в полуинтервале $[0, +\infty)$.

Тогда интегральный оператор (2) имеет в пространстве $C_{(0,\infty)}^0$ по крайней мере одну неподвижную точку.

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВЫПУКЛЫХ ОПЕРАТОРОВ

Бахтин И.А., Ле Суан Дай (Воронеж)

ytkadai@yahoo.com

В банаховом пространстве E с конусом $K \subset E$ приводятся новые теоремы существования неподвижных точек экстремальных выпуклых операторов. Нормальность конуса и непрерывность выпуклого оператора, вообще говоря, не предполагаются.

1. Определение. Монотонный на множестве $M \subset E$ оператор A называется h -экстремальным на этом множестве, если для любой монотонной ограниченной снизу и сверху последовательности $(x_n) \subset M$ существуют элементы $\sup(Ax_n)$ и $\inf(Ax_n)$.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия

- 1) u -выпуклый оператор A h -экстремален на конусе $K \subset E$;
- 2) существуют элементы $0 < x_0 < y_0$, такие, что $Ax_0 \leq x_0$, $Ay_0 \geq y_0$;
- 3) линейный непрерывный оператор $B - I$, где I - тождественный оператор, положительно обратим и из $x_0 \leq x \leq y \leq y_0$ следует $Ay - Ax \leq B(y - x)$.

Тогда существует элемент $x_* \in \langle x_0, y_0 \rangle$, такой, что $Ax_* = x_*$.

2. Определение. Монотонный на множестве $M \subset E$ оператор A называется d -экстремальным на этом множестве, если для любой монотонной ограниченной по норме последовательности $(x_n) \subset M$ существуют элементы $\sup(Ax_n)$ и $\inf(Ax_n)$.

Пусть E_u - множество всех $x \in E$, на которых определена u -норма $\|x\|_u = \inf\{\alpha > 0 \mid -\alpha u \leq x \leq \alpha u\}$ и клин $K_u = K \cap E_u$.

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия

- 1) u -выпуклый оператор A d -экстремален на конусе $K \subset E$;
- 2) существуют элементы $0 < x_0 < y_0$, такие, что $Ax_0 \leq x_0$, $Ay_0 \geq y_0$, а множество $A \langle x_0, y_0 \rangle$ ограничено по норме;
- 3) линейный непрерывный оператор $B - I$, где I - тождественный оператор, положительно обратим, множество $BK_u \subset K_u$ и из $Ax_0 \leq x \leq y \leq y_0$ следует $Ay - Ax \leq B(y - x)$.

Тогда существует элемент $x_* \in \langle x_0, y_0 \rangle$, такой, что $Ax_* = x_*$.

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Бахтин И.А., Фролова Ю.В. (Воронеж)

В вещественном банаховом пространстве с конусом приводятся некоторые новые признаки положительной обратимости линейных операторов.

Теорема 1. Пусть в вещественном банаховом пространстве E с воспроизводящим конусом $K \subset E$ выполняются следующие условия:

1) линейные операторы B и C положительно обратимы и $Bx \leq Cx$ ($x \in K$);

2) оператор $A = C^{-1}(C - B)$ преобразует конусной отрезок $\langle 0, y \rangle$ ($y \in K$) в ограниченное по норме множество $A\langle 0, y \rangle$.

Тогда любой линейный непрерывный оператор F , обладающий свойствами:

а) $Bx \leq Fx \leq Cx$ ($x \in K$);

б) оператор $T = C^{-1}(C - F)$ преобразует каждый конусной отрезок $\langle 0, y \rangle$ ($y \in K$) в ограниченное по норме множество $T\langle 0, y \rangle$; — положительно обратим.

Теорема 2. Пусть в вещественном банаховом пространстве E с почти воспроизводящим конусом $K \subset E$ выполняются следующие условия:

1) линейные непрерывные операторы B и C положительно обратимы и $Bx \leq Cx$ ($x \in K$);

2) оператор $A = C^{-1}(C - B)$ вполне непрерывен.

Тогда любой линейный непрерывный оператор F , обладающий свойствами:

а) $Bx \leq Fx \leq Cx$ ($x \in K$);

б) оператор $T = C^{-1}(C - F)$ вполне непрерывен;

- положительно обратим.

Теорема 3. Пусть в вещественном банаховом пространстве E с нормальным конусом $K \subset E$ выполняются следующие условия:

1) линейные непрерывные операторы B и C положительно обратимы и $Bx \leq Cx$ ($x \in K$);

2) оператор $A = C^{-1}(C - B)$ неразложим;

3) спектральный радиус $r = r(A)$ оператора A является положительным собственным числом сопряженного оператора A^* .

Тогда каждый линейный непрерывный оператор F , обладающий свойствами:

- а) $Bx \leq Fx \leq Cx$ ($x \in K$);
- б) оператор $T = C^{-1}(C - F)$ неразложим;
- в) спектральный радиус $r(T)$ оператора T является позитивным собственным числом сопряженного оператора T^* ; — положительно обратим.

ОЦЕНКИ СНИЗУ И СВЕРХУ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Бахтин И.А., Чан Тхань Туан (Воронеж)

tuanbg2007@mail.ru

В вещественном банаховом пространстве E с конусом $K \subset E$ приводятся оценки снизу и сверху решений линейных уравнений второго рода.

1. Определение. Монотонный на множестве M банахова пространства E с конусом $K \subset E$ оператор A называется моноotonно компактным на этом множестве, если для любой монотонной ограниченной по норме последовательности $(x_n) \subset M$ последовательность (Ax_n) компактна.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия

- 1) в вещественном банаховом пространстве E воспроизводящий конус $K \subset E$ нормален;
- 2) линейные положительные операторы A_1, A_2, B_1, B_2 удовлетворяют неравенствам: $A_1 \leq B_1, A_2 \leq B_2$;
- 3) операторы B_1, B_2 монотонно компактны в E ;
- 4) уравнение $x = B_1x + B_2x + f_1$ имеет положительное решение y_* , а элементы $f, g, h, y_1 \in E$ удовлетворяют неравенствам: $g \leq f \leq h, \pm f \leq f_1, y_1 \geq y_*$;
- 5) спектральный радиус $r(A_1 + A_2)$ оператора $A_1 + A_2$ меньше 1;
- 6) число 1 является регулярной точкой оператора $B_1 - B_2$.

Тогда решения x_* и (u_*, v_*) соответственно уравнения $x = B_1x - B_2x + f$ и системы $u = A_1u - A_2v - Ry_1 + g, v = -A_2u + A_1v + Ry_1 + h$, где оператор $R = (B_1 - A_1) + (B_2 - A_2)$, удовлетворяют неравенствам $u_* \leq x_* \leq v_*$.

2. Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия

- 1) в банаховом пространстве E воспроизводящий конус $K \subset E$ нормален;

- 2) линейные положительные операторы A, B, C, D удовлетворяют неравенствам: $-C \leq A, B \leq C, \pm(B - A) \leq D$;
- 3) спектральный радиус оператора C меньше единицы;
- 4) оператор A представляется в виде $A = A_1 - A_2$, где $A_1 \geq 0, A_1 \geq 0$ - линейные операторы, а спектральный радиус $r(A_1 + A_2)$ оператора $A_1 + A_2$ меньше единицы;
- 5) Выполняются соотношения: $f, g, h, y_*, f_1 \in E, g \leq f \leq h, y_* = Cy_* + f_1, f_1 \geq \pm f, y_1 \geq y_*$.
- Тогда решения x_* и (u_*, v_*) соответственно уравнения $x = Bx + f$ и системы $u = A_1u - A_2v - Dy_1 + g, v = -A_2u + A_1v + Dy_1 + h$ удовлетворяют неравенствам $u_* \leq x_* \leq v_*$.

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ В-ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Бахтин И.А., Шевченко Р.В. (Воронеж)

В вещественном банаховом пространстве E с конусом $K \subset E$ приводятся признаки существования неподвижных точек B -экстремальных операторов, оставляющих инвариантным некоторый конусной отрезок $\langle x_0, y_0 \rangle \subset E$.

1. Пусть оператор A задан на множестве $M \subset E$, а B -какой-нибудь линейный оператор.

Определение. Оператор A называется B -монотонным на множестве $M \subset E$, если для любых $x, y \in M$ из $x \leq y$ следует $Ay - Ax \geq B(y - x)$.

Определение. B -монотонный оператор A назовем B -экстремальным на множестве $M \subset E$, если для любой монотонной последовательности $(x_n) \subset M$, ограниченной снизу и сверху, существуют элементы $\sup(Ax_n - Bx_n)$ и $\inf(Ax_n - Bx_n)$.

Теорема 1. Если в сепарабельном банаховом пространстве E с конусом K B -экстремальный оператор A оставляет инвариантным некоторый конусный отрезок $\langle x_0, y_0 \rangle$ и существует линейный положительный оператор $(I - B)^{-1}$, то оператор A имеет в $\langle x_0, y_0 \rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку $x_* \in \langle x_0, y_0 \rangle$: $Ax_* = x_*$.

2. Определение. B -монотонный на множестве $M \subset E$ оператор A назовем вполне B -экстремальным на этом множестве M , если для любой цепи $\mathfrak{N} \subset M$, ограниченной снизу и сверху, существуют элементы $\sup(A - B)\mathfrak{N}$ и $\inf(A - B)\mathfrak{N}$.

Теорема 2. Если в банаховом пространстве E с конусом K вполне B -экстремальный оператор A оставляет инвариантным конусный отрезок $\langle x_0, y_0 \rangle$ ($x_0 \leq y_0$) и существует линейный положительный оператор $(I - B)^{-1}$, то оператор A имеет в $\langle x_0, y_0 \rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку.

Замечание. Отметим, что в теоремах 1, 2 требования, чтобы оператор A оставлял инвариантным конусный отрезок $\langle x_0, y_0 \rangle$ можно заменить на менее ограничительное условие: чтобы он был определен на нем и чтобы выполнялись неравенства $Ax_0 \geq x_0, Ay_0 \leq y_0$.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ РАВНОМЕРНО ВОГНУТОГО ОПЕРАТОРА

Бахтина А.А. (Воронеж)

В вещественном банаховом пространстве E с конусом $K \subset E$, необладающем свойством нормальности, новым способом с использованием метрики Биркгофа доказывается существование положительной неподвижной точки равномерно u -вогнутого экстремального оператора A .

1. Определение. Оператор A , действующий в метрическом пространстве X , называется замедленно сжимающим, если существует возрастающая в промежутке $[0, +\infty)$ функция $\varphi(t)$ ($\varphi(0) = 0$), такая, что

$$\rho(Ax, Ay) \leq \rho(x, y) - \varphi(\rho(x, y)) \quad (x, y \in X)$$

Определение. Оператор $A : X \rightarrow X$ называется сходящимся в метрическом пространстве X , если он преобразует любую фундаментальную последовательность $(x_n) \subset X$ в сходящуюся последовательность $(Ax_n) \subset X$.

Теорема 1. В метрическом пространстве X каждый сходящийся замедленно сжимающий оператор A имеет и притом только одну неподвижную точку.

2. Определение. Монотонный на множестве $M \subset E$ банахова пространства E с конусом K оператор A называется h -экстремальным на этом множестве, если для любой монотон-

ной ограниченной снизу и сверху последовательности $(x_n) \subset M$ существуют элементы $\sup(Ax_n)$ и $\inf(Ax_n)$

Определение. Положительный монотонный u -измеримый на конусе $K \subset E$ банахова пространства E оператор A называется равномерно u -вогнутым, если для любых чисел $\mu > 0, \nu > 0; \mu \leq \nu$ и числа $t \in (0, 1)$ существует число $\eta = \eta(\mu, \nu, t) > 0$, такое, что $Atx \geq (1 + \eta)tAx$ ($x \in \langle \mu u, \nu u \rangle$).

С использованием метрики Биркгофа и теоремы 1 доказана следующая теорема.

Теорема 2. В банаховом пространстве E с произвольным конусом $K \neq \{0\}$ всякий равномерно u -вогнутый h -экстремальный оператор A , оставляющий инвариантным конусной отрезок $\langle x_0, y_0 \rangle \subset K \setminus \{0\}$, имеет в $\langle x_0, y_0 \rangle$ и притом только одну неподвижную точку.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ГРАФЕ¹

Бахтина Ж.И. (Воронеж)

Ioanna83@mail.ru

Пусть Γ — геометрический связный граф в R^n , параметризующий систему из стилтесовских струн. Это значит, что на каждом ребре γ исходного графа Γ задано уравнение вида

$$-\int_{\gamma} d(pu') + \int_{\gamma} u dQ = \int_{\gamma} dF. \quad (1)$$

Здесь dQ и dF — дифференциалы мер, заданных на Γ некоторыми функциями ограниченной вариации Q, F .

Удобно полагать, что Q и F — функции множества, определенные на каждом Γ -интервале соответственно равенствами $Q(\Gamma_0) = \int_{\Gamma_0} dQ$ и $F(\Gamma_0) = \int_{\Gamma_0} dF$.

Уравнение (1) на каждом ребре локализуется в одномерное уравнение, которое в случае гладких Q и F принимает вид $-(pu')' + Q'u = F'$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 07-01-00397

Во внутренних вершинах уравнение (1) локализуется в равенства вида:

$$-pu' - \sum p_i(a)u'_i(a+0) + u(a)\Delta Q(a) = \Delta F(a), (i \in I(a)),$$

где суммирование производится по примыкающим к a ребрам, $u_i(x)$ — сужение решения $u(x)$ на i -е ребро, $u'_i(a+0)$ обозначает производную u_i в точке $x = a$ при относительной ориентации окрестности соответствующего i -го ребра в направлении "от a ".

Через $\Delta Q(a)$ обозначено значение атома Q -меры в точке a ; аналогично обстоит дело с $\Delta F(a)$.

О том, как уравнение (1) поглощает импульсные особенности исходной задачи, наглядно свидетельствует пример, когда некая особая точка ξ лежит внутри какого-либо ребра Γ исходной задачи. В этом случае (1) принимает вид:

$$-\Delta(pu'(\xi)) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi),$$

где $\Delta(pu'(\xi)), \Delta Q(\xi), \Delta F(\xi)$ означают скачки соответствующих функций в точке $x = \xi$.

Решение уравнения (1) рассматривается в классе функций $u(x)$, абсолютно непрерывных на всем Γ и таких, что $(pu')(x)$ имеют ограниченную вариацию на Γ . Если Q и F — абсолютно непрерывные на каждом ребре функции, то уравнение (1) принимает вид, стандартный для уравнений на графах вид (см. Ю. В. Покорный и др. // Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.)

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Бейлина Н.В. (Самара)

natalie@samdiff.ru

Рассмотрим уравнение

$$w_t - \alpha w_{xx} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^t w(x, \tau) d\tau + c(x, t) \int_0^t w(x, \tau) d\tau = f(x, t) \quad (1)$$

в области $Q = (0, l) \times (0, T)$ и поставим для него задачу: найти в Q решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$w_x(0, t) - \int_0^l K_1(x)w(x, t)dx = 0, \quad (3)$$

$$w_x(l, t) - \int_0^l K_2(x)w(x, t)dx = 0. \quad (4)$$

Введем новую неизвестную функцию $u(x, t)$, положив

$$\int_0^t w(x, \tau)d\tau = u(x, t).$$

Тогда задача (1)–(4) оказывается эквивалентной следующей нелокальной задаче для псевдогиперболического уравнения

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + c(x, t)u(x, t) - \alpha u_{xxt}(x, t) = f(x, t),$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_x(0, t) - \int_0^l K_1(x)u(x, t)dx = 0,$$

$$u_x(l, t) - \int_0^l K_2(x)u(x, t)dx = 0,$$

которую можно исследовать методом, предложенным в работе [1].

Литература

1. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений, 2006, том 42, №9, с. 1166 - 1179.

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОЧЕЧНОГО ТИПА¹

Бекларян Л.А., Крученнов М.Б. (Москва)

beklar@cemi.rssi.ru, mbk2003@bk.ru

Рассматривается основная линейная краевая задача для уравнения

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^s A_j x(t + n_j) + \psi(t), \quad t \in B_R, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R} \setminus B_R, \quad (2)$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{Z}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

где A_j – матрица $n \times n$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, s}$; $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu^* \in (0, +\infty)$; B_R – либо интервал $[m_0, m_1]$, $m_0, m_1 \in \mathbb{Z}$, либо полупрямая $[m_0, +\infty)$, $m_0 \in \mathbb{Z}$, либо прямая $\mathbb{R}$.

Здесь $\mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ – это банахово пространство функций $x(\cdot)$ с весами

$$\mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t) \mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}.$$

Для функций $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu^* \in (0, +\infty)$ определим новую функцию

$$f(t) = \begin{cases} \psi(t), & \text{если } t \in B_R, \\ \varphi(t), & \text{если } t \in \mathbb{R} \setminus B_R. \end{cases}$$

Наряду с уравнением (1) определим уравнение

$$\dot{\tilde{x}}(t) = - \sum_{j=1}^s A_j^T \tilde{x}(t - n_j) \chi_{B_R}(t - n_j), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

¹Работа поддержана РФФИ, грант №06-01-00430- и программой поддержки ведущих научных школ, грант НШ-3038.2008.1

называемое сопряженным уравнением (здесь $\chi_{B_R}(\cdot)$ – характеристическая функция множества B_R , A_j^T – транспонированная матрица).

Для того, чтобы сформулировать теорему существования решения краевой задачи (1)–(3) в виде аналога теоремы Нётер, следует рассматривать специальный класс так называемых импульсных решений $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (4) (это кусочно абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие уравнению (4) и имеющие разрыв в точке $\bar{t}$).

Теорема. Пусть $\psi(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\varphi(\cdot) \in \bigcap_{r=1}^{+\infty} \mathcal{L}_r^n C^{(0)}(\mathbb{R})$. Для существования решения основной краевой задачи (1)–(3), удовлетворяющего условию $x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ при заданном $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1]$, необходимо, чтобы условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t), \tilde{x}(t))_{R^n} dt + (\bar{x}, [\tilde{x}(\bar{t}+0) - \tilde{x}(\bar{t}-0)])_{R^n} = 0$$

выполнялось для всякого решения $\tilde{x}(\cdot)$ сопряженного уравнения (4), имеющего единственный разрыв первого рода в точке $\bar{t}$, и удовлетворяющего условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \tilde{x}(t) \bar{\mu}^{-|t|} \right\|_{R^n} < +\infty$$

для любого $\bar{\mu} < \mu$. $\square$

Исследование базируется на формализме, основанном на групповых особенностях функционально-дифференциальных уравнений точечного типа [1].

Литература

[1] Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. – М.: Факториал Пресс, 2007. – 288 с.

ОЦЕНКА ПРИРАЩЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА¹

Беляева О.А., Сумин В.И. (Нижний Новгород)

oa_belyaeva@mail.ru, v_sumin@mail.ru

Пусть $\underline{u}$, $\bar{u}$, $\hat{u}$, T_1 , T_2 – фиксированные неотрицательные числа, $0 < \underline{u} \leq \bar{u}$, $\Pi \equiv \{t \equiv \{t_1, t_2\} \in \mathbf{R}^2 : \bar{u}t_1 \leq t_2 \leq T_2 - \bar{u}t_1, 0 \leq t_1 \leq T_1\}$, D – класс абсолютно непрерывных функций $u(\cdot): [0, T_1] \rightarrow \mathbf{R}$ таких, что $\underline{u} \leq u(t_1) \leq \bar{u}$, $|u'(t_1)| \leq \hat{u}$, $t_1 \in [0, T_1]$. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u[x] &\equiv x''_{t_1 t_1} - (u(t_1))^2 x''_{t_2 t_2} = z(t), \quad t \in \Pi, \\ x(0, t_2) &= 0, \quad x'_{t_1}(0, t_2) = 0 \quad \text{при } t_2 \in [0, T_2], \end{aligned} \quad (1)$$

где $z(\cdot) \in L_\infty(\Pi)$, $u(\cdot) \in D$. Пусть $\Gamma \equiv \{t \in \partial\Pi : t_1 = 0\}$. Для любых $x(\cdot) \in W_2^1(\Pi)$, $u(\cdot) \in D$, $\eta(\cdot) \in W_2^1(\Pi)$, $z(\cdot) \in L_\infty(\Pi)$ выражение $\int_\Pi \left\{ x'_{t_1}(t) \eta'_{t_1}(t) - (u(t_1))^2 x'_{t_2}(t) \eta'_{t_2}(t) + z(t) \eta(t) \right\} dt$ обозначим через $J[x(\cdot), u(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot)]$. Решением (1) назовем функцию $x(\cdot) \in W_2^1(\Pi)$, для которой $x(0, t_2) = 0$, $t_2 \in [0, T_2]$ и при любом $\eta(\cdot) \in W_2^1(\Pi)$, равном нулю на $\partial\Pi \setminus \Gamma$, имеем $J[x(\cdot), u(\cdot), \eta(\cdot), z(\cdot)] = 0$. Любой паре $u(\cdot), z(\cdot)$ отвечает одно такое решение $x(\cdot)$, обозначим его $A_u[z](\cdot)$. Для каждого $u(\cdot) \in D$ оператор $A_u[\cdot]$, разрешающий оператор задачи (1), принадлежит классу $L(L_\infty(\Pi), L_\infty(\Pi))$.

Теорема. Существует постоянная M такая, что

$$\|A_u - A_{u_0}\|_{L_\infty(\Pi) \rightarrow L_\infty(\Pi)} \leq M \cdot \left(\|u - u_0\|_{C[0, T_1]} + \|u' - u'_0\|_{L_\infty[0, T_1]} \right)$$

для любых $u(\cdot) \in D$, $u_0(\cdot) \in D$.

Приведенная оценка приращения $(A_u - A_{u_0})$ использовалась для получения указанной в [1] локальной оценки приращения решения задачи Коши для полулинейного волнового уравнения при возмущении старшего коэффициента, но представляет, видимо, и самостоятельный интерес.

Литература

1. Беляева О.А., Сумин В.И. Оценка приращения решения задачи Коши для полулинейного волнового уравнения при возмущении

¹Работа поддержана грантом РФФИ, проект 07-01-00495.

ОПЕРАТОРЫ С ПСЕВДОРАЗРЕЖЕННЫМИ МАТРИЦАМИ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Блатов И.А. (Самара)

blatow@mail.ru

В докладе рассматриваются алгебры операторов с псевдоразреженными матрицами. Устанавливается наполненность этих алгебр, сохранение свойства псевдоразреженности при переходе к ортогональным, треугольным и блочным факторизациям. Рассматриваются приложения к оценке норм семейств проекторов на пространства типа конечных элементов и задачам вычислительной и прикладной математики.

Литература

[1] Блатов И.А. Об алгебрах операторов с псевдоразреженными матрицами и их приложениях // Сибирский математический журнал. 1996. Т. 37. N 1. С.36-59.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СЕТЕЙ ПЕТРИ КАК ОКРЕСТНОСТНЫХ СИСТЕМ

Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Седых И.А. (Липецк)

amsh@lipetsk.ru

Сеть Петри можно представить в виде недетерминированной динамической линейной окрестностной системы с заменой переходов сети Петри на вероятностный механизм выбора окрестностей узлов "диспетчером". Пусть задана сеть Петри $C = (R^+, R^-, M_0)$, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, заданы матрицы R^+ и R^- , а также вектор начальной маркировки M_0 . Матрица инцидентий сети $R = R^+ - R^-$. Если M_l - текущая маркировка сети Петри, то уравнение:

$$M_{l+1} = M_l + R \cdot \mu_l(k) \quad (1)$$

задает правило нахождения новой маркировки сети, возникающей в ней сразу после срабатывания перехода t_k . Здесь $\mu_l(k)$ - вектор-столбец длины m с единицей на k -ом месте, соответствующий текущей маркировке M_l . Поставим в соответствие позициям сети Пет-

ри $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ узлы окрестностной системы. Состоянием $x[t, a_i]$ в узле $a_i (i = 1, \dots, n)$ в момент времени t является текущая маркировка позиции $p_i (i = 1, \dots, n)$ сети Петри. Тогда начальная маркировка сети Петри - состояние окрестностной системы в начальный момент времени: $X[0] = M_0$. Управлением $\nu[t, a_i]$ в узле $a_i (i = 1, \dots, n)$ окрестностной системы в момент времени t является элемент i -ой строки матрицы R , выбранный случайным образом.

Уравнение недетерминированной динамической линейной окрестностной системы, моделирующей сеть Петри, имеет вид:

$$[W^1 W^2 \dots W^m] \cdot D \cdot (X[t+1] - X[t] - [R_1 R_2 \dots R_m] \cdot D) = 0 \quad (2)$$

Основные свойства сетей Петри в терминах окрестностных систем: 1. В окрестностной системе, моделирующей безопасную сеть Петри, значения состояний всех узлов в любой момент времени не превышает единицы: $x(t, a_i) \leq 1 (i = 1, \dots, n)$. 2. В окрестностной системе, моделирующей s -ограниченную сеть Петри, значения состояний всех узлов в любой момент времени не превышает s : $x(t, a_i) \leq s (i = 1, \dots, n)$. 3. Сохраняемость сети Петри относительно некоторого заданного вектора весов $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ в терминах окрестностных систем: $\forall t \sum_{i=1}^n k_i x(t, a_i) = \sum_{i=1}^n k_i x(t+1, a_i)$.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ЯДРАМИ Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. (Москва)

При разработке алгоритма регуляризованных асимптотических решений (см. [1]) для интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^\alpha \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^\alpha \mu(\theta) d\theta\right) K(t, s)y(s, \varepsilon) ds + h(t), \quad y(0, \varepsilon) = y^0 \quad (1)$$

существенную роль играет поведение спектра $\lambda_j(t)$ матрицы $A(t)$ и спектрального значения $\mu(t)$ ядра интегрального оператора на рассматриваемом отрезке $[0, T]$. Если спектр стабилен (т.е. если $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), \forall t \in [0, T], i \neq j, i, j = \overline{1, n}$), а $\mu(t) \neq 0 \forall t \in [0, T]$, то регуляризация производится по спектру $\lambda_j(t)$ и спектральному значению

$\mu(t)$. Однако это верно лишь для уравнений типа Вольтерра ($\alpha = t$); в случае уравнения Фредгольма ($\alpha = T$) спектральное значение $\mu(t)$ в регуляризации не участвует. При переходе к нестабильному спектру (например, в случае, когда одно из собственных значений $\lambda_1(t)$ обращается в нуль на некотором множестве $S \subset [0, T]$) или к нестабильному спектральному значению $\mu(t)$ регуляризация задачи (1) существенно усложняется. В настоящее время эта проблема полностью решена для уравнений Вольтерра ($\alpha = t$) с одной нестабильной точкой спектра $\lambda_1(t)$ (см. [2]). Если же спектр $\lambda_j(t)$ стабилен, но $\mu(t) = 0$ на некотором множестве $S \subset [0, T]$, то возникают принципиальные трудности. В этом случае проблему удалось решить лишь в случае вырожденного ядра $K(t, s)$. Для уравнения Фредгольма ($\alpha = T$) проблема регуляризации полностью решена для скалярных уравнений (1) в случае, когда $A(t) = -t^k l(t)$, $l > 0$, $\mu < 0$ ($\forall t \in [0, T]$). Намечались некоторые сдвиги в решении этой проблемы для случая $\mu(t) = -t^k \mu_0(t)$ ($\mu_0(t) > 0 \forall t \in [0, T]$). Однако вопрос о регуляризации остается открытым, если нестабильность спектра $\lambda_j(t)$ и $\mu(t)$ имеет место на некотором континуальном множестве $S \subset [0, T]$. Заметим, что в случае одновременной нестабильности $\lambda_j(t)$ и $\mu(t)$ в системе (1) возникает "точки поворота" и проблема регуляризации заметно усложняется (этот случай не рассматривался). В докладе резюмируются результаты, связанные с уравнениями (1) типа Фредгольма ($\alpha = T$) как в случае стабильности $\lambda_j(t)$ и $\mu(t)$, так и в указанных выше случаях их нестабильности.

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981, 400 с.
2. Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные системы с контрастными структурами // Математ. сборник. 2005. Т. 196. N 2, С.29-56.

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ДИДАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЛОГИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИНАХ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Богатырев Ф.Н. (Липецк)

kas@lspu.lipetsk.ru

1. Дидактическая концепция проектирования учебных и научных дисциплин на принципе свертывания информации, структурирования на основе фундаментальных научных методов. В математическом знании — объем информации удваивается за пятилетие. В массовой образовательной практике, даже в дисциплинах специализации, студенты часто не доходят до применения современных научных методов. Возникает проблема усвоения понятий вокруг больших масс знаний, когда разрыв даже между соседними утверждениями остается значительным при любом дроблении цепи доказательства. Сжатие информации для ее анализа в группу родственных знаний, включение в исследование современных методов — актуальные задачи для науки и образования. Подход к их решению — введение в изложение фундаментальных научных методов, вокруг которых происходит интеграция знания. Это позволяет объединить эффективность двойственных категориальных подходов: 1) свертывания информации — принципиальной возможности найти комплексный подход к доказательству большинства обобщающих утверждений; 2) разворачивания информации — принципиальной возможности получить решение конкретных частных задач.

2. Структура и содержание интегрирующих дисциплин и дидактических модулей, их влияние на функциональную полноту алгебраического компонента профессионального математического образования. Теоретическое обоснование и дидактическая интерпретация проектируемых дисциплин проводится на основе взаимодействия фундаментальных и прикладных аспектов знания, реализации междисциплинарных направлений научных исследований. Алгебраические многообразия замкнуты относительно перехода к подалгебрам, гомоморфным образам и декартовым произведениям [1, с. 257]. Отбор содержания обосновывается следующими аргументами: 1) должна найти отражение система знаний, интегрирующая

классические (алгебраические структуры, универсальные алгебры, разрешимость и теория Галуа) и неклассические (алгебраическая логика, моделирование структур в базах данных, теория Галуа баз данных) алгебраические теории; 2) их содержание согласовывается с программой кандидатского экзамена по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел». Интерпретация абстрактных объектов проводится анализом рееста формул, связанных с операциями и отношениями в изучаемых структурах. Проявляющиеся алгебраические структуры классифицируются по типу их сигнатур.

3. Формы учебной деятельности, направленные на реализацию личностных качеств; дидактическая реализация активных методов обучения в профессиональном математическом образовании. Проблема современных предметных и общеобразовательных методик — решение задачи взаимосвязи педагогических аспектов: 1) предметного образования (реализации информационной функции обучения); 2) образования с помощью учебного предмета (реализации развивающей функции — в связи с содержанием обучения, его логикой, научностью, уровнями аргументации, сравнений, аналогий, обобщений, систематизаций); 3) соотношение явного аспекта образования личности (в котором учебные программы — подлежат усвоению, а усвоенная информация — контролю) и скрытого аспекта (способствующего формированию компетентности, личностного опыта и других качеств, не складывающихся лишь из знаний и умений). Решение задач взаимодействия информационной и развивающей функций образования требует: 1) воплощения в знании — и деятельности (по их генерированию), и результата этой деятельности; 2) прямой связи процессов формирования знаний и овладения познавательными действиями — личностного развития; 3) включения познавательных действий в систему элементов содержания обучения.

Литература

1. Бахтурин, Ю.А. Основные структуры современной алгебры [Текст] / Ю.А. Бахтурин. - М.: Наука, 1990. ? 320 с.

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ МЕЖДУ РЕГИОНАЛЬНЫМИ ПРОЕКТАМИ

Богомолов А.И., Крылов А.С. (Москва)

alivbog@gmail.com, krylov_fa@gmail.com

Иерархическая модель распределения инвестиций между региональными проектами. Рассматривая регион как большую социально-экономическую систему довольно сложно выделить все элементы этой системы и описать связи между ними, что необходимо при решении такой задачи как распределение инвестиций между региональными проектами. Различные планы распределения инвестиций имеют различную обобщённую полезность, и поэтому среди этих планов надо найти оптимальный, т.е. приносящий наибольшую обобщённую полезность для данного региона. Число элементов социально-экономической системы региона (СЭСР) и их взаимосвязей настолько велико, что превышает способность исследователя воспринимать информацию в полном объеме. В таких случаях СЭСР делится на подсистемы. Одним из таких делений является иерархическое. Первый уровень иерархии имеет одну цель: общее благосостояние региона, который характеризуется критерием "обобщённая полезность". Второй уровень иерархии имеет три цели: экономику, демографию, экологию. Приоритеты этих целей получаются из матрицы попарных сравнений относительно цели первого уровня, целями третьего уровня являются региональные проекты. Задача заключается в определении влияния инвестиций в региональные проекты на обобщённую полезность через промежуточный второй уровень. Поэтому приоритеты региональных проектов относительно каждой цели второго уровня получаются из матриц попарных сравнений относительно этих целей, а полученные столбцы приоритетов взвешиваются затем при помощи столбца приоритетов второго уровня, что позволяет получить в итоге искомый составной столбец приоритетов региональных проектов. В качестве примера применения данного подхода к распределению инвестиций между региональными проектами была рассмотрена Ярославская область.

ВТОРАЯ СМЕШАННАЯ МОМЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Боровикова М.М. (Воронеж)

monya@yandex.ru

Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = \varepsilon_1(t)u_{xx} + \varepsilon_2(t)u_{yy} + \varepsilon_3(t)u + f(t, x, y), \quad (1)$$

$$u(t_0, x, y) = g(x, y), \quad (2)$$

где $t \in [t_0, t_1] = T \subset R$, $x \in R$, $y \in R$, $u(t, x, y)$ - искомая функция, $f(t, x, y)$, $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ - случайные процессы, независимые от случайного процесса $g(x, y)$.

Пусть $F_{\xi\eta}^{-1}[f](x, y)$ - обратное преобразование Фурье функции f по переменным (ξ, η) , $*$ - знак свертки по переменным (x, y) , $\chi(t_0, t, s) = \text{sign}(s - t_0)$ при $s \in [t_0, t]$ и $\chi(t_0, t, s) = 0$ в противном случае, M - знак математического ожидания.

Задача заключается в нахождении второй смешанной моментной функции решения задачи (1), (2).

Теорема. Пусть случайные процессы $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ не зависят от процесса $f(t, x, y)$, $\varphi(v_1, v_2, v_3)$ - характеристический функционал процессов $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)$ - имеет непрерывные по v_1, v_2, v_3 вариационные производные до второго порядка включительно [1], $M(g(x, y))$ суммируемо на R^2 , $M(f(t, x, y))$ суммируемо на $T \times R^2$. Тогда

$$M(u(t, x, y)\varepsilon_j(s)) = -iM(g(x, y))* \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & *F_{\xi\eta}^{-1}\left[\frac{\delta\varphi(i\xi^2\chi(t_0, t, \cdot), i\eta^2\chi(t_0, t, \cdot), -i\chi(t_0, t, \cdot))}{\delta v_j(s)}\right](x, y) - \\ & -i\int_{t_0}^t F_{\xi\eta}^{-1}\left[\frac{\delta\varphi(i\xi^2\chi(\tau, t, \cdot), i\eta^2\chi(\tau, t, \cdot), -i\chi(\tau, t, \cdot))}{\delta v_j(s)}\right](x, y)* \end{aligned}$$

$$*M(f(\tau, x, y))d\tau, j = 1, 2, 3,$$

является второй смешанной моментной функцией решения задачи (1), (2) (в смысле обобщенных функций).

Литература

1. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа/ В.Г. Задорожний, М.-Ижевск: НИЦ РХД, 2006. - 316 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ РЕЗОНАНСНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹

Бравый Е.И. (Пермь)

bravuyi@perm.ru

Рассматривается резонансная краевая задача для скалярного уравнения на отрезке:

$$x^{(n)}(t) = (T^+x)(t) - (T^-x)(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

$$\ell_i x = c_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \ell_n x \equiv x^{(n-1)}(a) - x^{(n-1)}(b) = c_n, \quad (2)$$

где $n \geq 2$; $c_i \in R$, $i = 1, \dots, n$; $f \in L[a, b]$; линейные операторы $T^{+/-} : C[a, b] \rightarrow L[a, b]$ положительны; система функционалов

$$\ell_i x \equiv \sum_{j=0}^{n-1} (A_{ij}x^{(j)}(a) + B_{ij}x^{(j)}(b)), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

такова, что решения задачи $x^{(n)} = 0$, $\ell_i x = 0$, $i = 1, \dots, n$, исчерпываются константами: $x(t) = c$ при всех $c \in R$.

Введем обозначения:

$G(t, s)$ — функция Грина однозначно разрешимой задачи

$$x^{(n)} = f, \quad \ell_i x = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad x(a) = 0;$$

$$M \equiv \max_{t_1, t_2 \in [a, b]} \left(\max_{s_1 \in [a, b]} (G(t_1, s_1) - G(t_2, s_1)) - \min_{s_2 \in [a, b]} (G(t_1, s_2) - G(t_2, s_2)) \right).$$

Теорема. Пусть заданы неотрицательные числа $T^+ \neq T^-$. Краевая задача (1)–(2) однозначно разрешима при всех таких операторах

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 06-01-00744 и 07-01-96060).

$T^{+/-}$, что $\int_a^b (T^{+/-} - 1)(s) ds = T^{+/-}$, тогда и только тогда, когда

$$\frac{Y}{1-Y} \leq X \leq 2(1 + \sqrt{1-Y}), \quad Y \leq \frac{3}{4},$$

где $X = M \max(T^+, T^-)$, $Y = M \min(T^+, T^-)$.

Для различных краевых условий вычислена константа M . В частности, для периодической задачи (1)–(2) показано, что $M = |G(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})|$ при четных n и $M = 2|G(\frac{a+b}{2}, \frac{3a+b}{4})|$ при нечетных n .

ОБ ОБРАЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ¹

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж)

bums@kma.vsu.ru

На простейшем графе, состоящем из двух ребер, одно из которых образует цикл, рассматривается интегральный оператор вида

$$y(x) = Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt, \quad (1)$$

где $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$, $x \in [0, 1]$; компоненты $y(x)$ непрерывны и удовлетворяют условиям $y_1(0) = y_1(1) = y_2(0)$ (непрерывность в узле графа).

Структура и вид оператора (1) навеяны теоремой 1 из [1], а именно, полагаем

$$y(x) = \int_0^1 \begin{pmatrix} A_1(x, t) & 0 \\ \frac{g_2(x)}{g_2(0)} A_1(1, t) & A_2(x, t) \end{pmatrix} f(t) dt,$$

где $A_1(x, t) = \tilde{A}_1(x, t)\varepsilon(x, t) + g_1(x)\tilde{A}_1(1, t)/(g_1(0) - g_1(1))$;
 $A_2(x, t) = \tilde{A}_2(1 - x, t)\varepsilon(1 - x, t) - \frac{g_2(x)}{g_2(0)}\tilde{A}_2(1, t)$; $\tilde{A}_i(x, x) \equiv 1$, $\tilde{A}_i(x, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемы при $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq x$;
 $g_i(x) \in C^2[0, 1]$; $\varepsilon(x, t) = 1$, при $t \leq x$, $\varepsilon(x, t) = 0$, при $t \geq x$.

Обращение данного оператора дает, в частности, класс дифференциальных операторов, обобщающий уже изученные на графе дифференциальные операторы (напр., [2]).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 06-01-00003, 07-01-00397, гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-2970.2008.1)

Теорема 1. Если A^{-1} существует, то имеет место представление

$$\begin{aligned} A^{-1}y(x) = & Py'(x) + a_1(x)y(0) + a_2(x)y(1) + a_3(x)y(x) + \\ & + a_4(x)y(1-x) + \int_0^1 a(x,t)y(t) dt; \\ y_1(0) = & y_1(1) = y_2(0), \end{aligned}$$

где $Py'(x) = P_1y'(x) + P_2y'(1-x)$, $P_1 = \text{diag}(1, 0)$, $P_2 = \text{diag}(0, -1)$, $a_i(x) \in C^1[0, 1]$, $i = \overline{1, 4}$, $a(x, t) \in C^1([0, 1] \times [0, 1])$.

Выражаю благодарность А.П. Хромову за постановку задачи.

Литература

1. Хромов А.П. Интегральный оператор с периодическими краевыми условиями // Материалы Воронежской весенней мат школы. 2008 (настоящий сборник).

2. Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. // Дифф. уравнения. 2007. Т. 43. №12. С. 1597–1605.

О СВЯЗЯХ ГИПЕРВОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ОДНОЙ ПРОБЛЕМОЙ МОМЕНТОВ И НЕКОТОРЫМИ КЛАССИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ ГЕОМЕТРИИ И АЛГЕБРЫ

Бурский В.П. (Донецк, Украина)

v30@dn.farlep.net

В плоской области, ограниченной биквадратной кривой, рассматривается проблема единственности решения задачи Дирихле для уравнения колебания струны. Показывается, что эта проблема эквивалентна классической проблеме Понселе из проективной геометрии для двух подходящих эллипсов, а также проблеме разрешимости алгебраического уравнения Пелля-Абеля, с которыми связаны некоторые другие задачи.

Методом отображения Джона, типичным для некорректных гиперболических граничных задач, получены новые критерии отмеченных классических задач геометрии и алгебры. Критерий записывается в виде $\theta \in Q$, где Q — рациональное поле, а число θ явно вычисляется по данным задачи, он распространяется на любое расположение коник из проблемы Понселе и на уравнения Пелля-Абеля с коэффициентным полиномом 3 и 4-го порядка.

В список эквивалентных задач включается также проблема единственности решения задачи Неймана в той же области для того же уравнения, а также проблема неопределенности некоторой новой проблемы моментов. Также имеются связи с задачей Чебышева о нахождении полинома наименьшего уклонения, с задачей характеризации спектра якобиевых матриц, с задачей нахождением периодических решений цепочки Тоды и с некоторыми другими.

Литература

Бурский В.П., Жеданов А.С., О задаче Дирихле для уравнения колебания струны, проблеме Понселе, уравнении Пелля-Абея и некоторых других с ними связанных задачах. Укр. матем. журнал, 4, 2006, с. 435-448.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПУЧКОВ ПО НУЛЯМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ¹

Бутерин С.А. (Саратов)

buterinsa@info.sgu.ru

Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + (\rho^2 - 2\rho q_1(x) - q_0(x))y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (1)$$

где ρ – спектральный параметр, а $q_j(x) \in W_1^j[0, 1]$ – вещественные функции. Пусть

$$\int_0^1 (q_0(x) + q_1^2(x)) dx = \int_0^1 q_1(x) dx = 0. \quad (2)$$

Известно, что потенциал оператора Штурма-Лиувилля определяется с точностью до среднего значения по всюду плотному множеству узлов (нулей собственных функций) [1]. В [2] установлена связь с обратными спектральными задачами [3] и показано, что достаточно задать узлы на интервале $(0, a)$ при $a > 1/2$. Аналогичные результаты будут справедливы и для пучка (1). Его собственные значения ρ_n , $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, имеют вид $\rho_n = \pi n + O(n^{-1})$, $|n| \rightarrow \infty$. Пусть $y_n(x)$ – собственная функция, соответствующая ρ_n .

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (проект МК-1701.2007.1) и грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003, 07-01-92000-ННС-а).

Теорема 1. При достаточно большом $|n|$ функция $y_n(x)$ имеет в точности $|n| - 1$ нуль в интервале $(0, 1)$. Множество всех узлов X всюду плотно в $[0, 1]$.

Теорема 2. Задание множества $X \cap (0, a)$ однозначно определяет функции $q_0(x)$, $q_1(x)$.

Отметим, что для теоремы 2 условия (2) и $a > 1/2$ существенны.

Литература

[1] McLaughlin J.R. *Inverse spectral theory using nodal points as data – a uniqueness result*, J. Diff. Eq. 73 (1988), no.2, 354–362.

[2] Yang X.-F. *A new inverse nodal problem*, J. Diff. Eq. 169 (2001), 633–653.

[3] Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач*. М.: Физматлит, 2007.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТИ В МНОГОМЕРНЫХ КЛАССИФИКАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Буховец А.Г., Бирючинская Т.Я. (Воронеж)

В задачах многомерной классификации, решаемых при помощи алгоритмов модального анализа, существенно используется оценка плотности вероятности [1]. В качестве таких оценок в одномерном случае хорошо зарекомендовал себя подход, основанный на построении т.н. корневой оценки (см. [2], [3]). Суть этого подхода заключается в том, что вместо оценки непосредственно самой плотности $p(x)$ по некоторой ортонормированной системе функций $\{\psi_i(x)\} (i = 1, 2, \dots, s)$, определенной в области задания случайной величины, предлагается проводить разложение другой функции, связанной с плотностью равенством $\Psi(x) = \sqrt{p(x)}$, т.е. рассматривать равенство $\Psi(x) = \sum_{i=1}^s c_i \psi_i$, где c_i — неизвестные коэффициенты

разложения, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^s |c_i|^2 = 1$. Как показано в [2, с.29], такой подход позволяет получать информационную матрицу Фишера (и матрицу коэффициентов ковариации оценок), независящую от вида выбранных базисных функций $\{\psi_i(x)\}$. Коэффициенты $\{c_i\}$ определяются посредством следующей итерационной

$$c_i^{(r+1)} = \alpha c_i^{(r)} + (1 - \alpha) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\psi_i(x_k)}{\sum_{i=1}^l c_i^{(r)} \psi_i(x_k)},$$

где r - номер итерации, α - итерационный параметр, а начальное приближение коэффициентов задается произвольно с учетом условия нормировки. В [2] приводятся доказательства устойчивой сходимости этой процедуры, а также соображения по определению значения итерационного параметра, числа функций ортонормированной системы и оценки числа необходимых итераций.

Обобщение этого подхода на случай многих ($m \geq 2$) измерений сводится к построению полной системы функций от двух и более переменных. Например, в случае двух переменных систему можно построить по следующему правилу [4] : $\varphi_{ij}(s, t) = \psi_i(s)\psi_j(t)$ (где $i, j = 1, 2, \dots$), т.е. построение системы ортонормированных функций сводится к составлению различных пар функций из множества $\{\psi_i(x)\}$ и перемножения их после соответствующей подстановки переменных s и t . Проведенные нами эксперименты с модельными данными показывают, что наилучшее приближение к истинной (моделируемой) плотности дает оценка, полученная с учетом предварительной оценки каждой входящей в смесь компоненты.

Литература

1. Буховец А.Г. // Вестник. Научно-технический журнал Воронежского государственного университета. Воронеж, 2002, с.40-45.
2. Богданов Ю.И. Основная задача статистического анализа данных: корневой подход // М.:МИЭТ, 2002.-96с.
3. Буховец А.Г., Бирючинская Т.Я. // Совр. проб. прикл. мат. и матмоделирования. Мат. II межд. научной конф. Воронеж, 2007, с.50.
4. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т.1 // М.-Л.,1951.

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ С МАЖОРАНТОЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Быков С.В. (Брянск)

b_serecha@mail.ru

Пусть C - комплексная плоскость, $C_+ = \{z \in C : \operatorname{Re} z > 0\}$ - верхняя полуплоскость комплексной плоскости C , $H(C_+)$ - множество всех голоморфных C_+ функций, φ - монотонно растущая, положительная функция из класса $C^1(0; +\infty)$.
Введем в рассмотрение класс функций

$$H(\varphi, +\infty) = \{f \in H(C_+) : \ln |f(z)| \leq C_f \cdot \varphi(|z|), z \in C_+\}.$$

Характеризация корневых множеств голоморфных в C_+ функций, имеющих там конечный порядок роста построена в работах Н. В. Говорова (см. [1],[2]). В данной работе при некоторых ограничениях на функцию φ , мы получили полное описание корневых множеств функции из класса $H(\varphi, +\infty)$.

Теорема: Пусть φ - монотонно растущая положительная функция на R_+ , причём $\varphi \in C^1(0; +\infty)$. Предположим, что существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \alpha_\varphi$, причём $\alpha_\varphi \notin N, \alpha_\varphi > 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны: 1) Последовательность $z_n = r_n e^{i\theta_n}, r_n \geq \lambda, \lambda > 0, n = 1, 2, \dots$ точек из верхней полуплоскости является корневым множеством некоторой ненулевой функции из класса $H(\varphi, +\infty)$;

2) Существует положительное число C такое, что $\forall R > 1$ справедливо

$$\sum_{0 < \lambda < r_n \leq R} \frac{\sin \theta_n}{r_n} \leq C \cdot \frac{\varphi(R)}{R},$$

причём C зависит только от последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

В случае целых α_φ также получен аналог этой теоремы.

Литература

1. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. -М.:Наука, 1986, 240 стр.
2. Говоров Н. В. Об индикаторе функций, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости. -В кн.: Тезисы кратких научных

ОБ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НЬЮТОНА

Ванько В.И. (Москва)

vvanko@mail.ru

В мае 1686 г. вышел в свет труд Исаака Ньютона "Математические начала натуральной философии". Эта книга, читать которую мы имеем возможность благодаря переводу с латыни, выполненному акад. А.Н.Крыловым, положила начало механике как четко изложенной науке со своими аксиомами, леммами и теоремами. Ж.Л.Лагранж назвал сочинение Ньютона "величайшим из произведений человеческого ума". В книге II, глава 7 "О движении жидкостей и сопротивлении брошенных тел", определяется понятие "редкой" среды и выводится закон сопротивления движению тела (известный и широко используемый в аэродинамических расчетах) - пропорциональность силы сопротивления квадрату скорости. Ставится основная задача о поиске кривой, образующей поверхность вращения (вокруг своей оси симметрии) наименьшего сопротивления.

В настоящей работе на основе решения вспомогательной задачи об усеченном конусе наименьшего сопротивления (см. комментарии А.Н.Крылова, [1]) приводятся примеры проектирования носовых частей летательных аппаратов. Показана возможность уменьшения силы сопротивления на 10 % и увеличения полезного объема на 15-17 %.

Подробно исследуется решение основной задачи и обсуждается вопрос о существовании решения.

Литература

1. Крылов А.Н. Собрание трудов. Том 7: И.Ньютон Математические начала натуральной философии. Пер. с латинского с примечаниями А.Н.Крылова.- М.-Л.: АН СССР.- 1936.-696 с.

**ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ
НЕФТЯНОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ**
Васильев В.И., Попов В.В., Васильева М.В. (Якутск)
vasil@sitc.ru

В работе предлагается двумерная математическая модель процесса разработки нефтяных месторождений Арктической зоны, вскрытых большим количеством эксплуатационных и нагнетательных скважин. Математическая модель базируется на фундаментальных законах механики многофазных сред, и представляют собой начально-краевую задачу для нелинейной системы дифференциальных уравнений эволюционного типа, позволяющих прогнозировать динамику изменения полей водонасыщенности, давления и температуры.

Математическая модель построена таким образом, что допускает эффективную численную реализацию. Вычислительный алгоритм с целью учета сложности геометрии коллектора основан на использовании метода фиктивных областей. Дискретизация конвективных членов определяющих уравнений проведена с помощью явных односторонних разностных отношений "против потока". Для повышения точности расчетов в уравнениях, используемых для определения распределений давления и температуры, в малых окрестностях скважин введены поправочные коэффициенты. Численная реализация, получающихся на каждом временном слое, систем разностных уравнений для полей давления и температуры проводится с помощью итерационного метода сопряженных градиентов с предобуславливателем Якоби, что допускает эффективное распараллеливание.

Обсуждаются результаты вычислительного эксперимента, полученные на вычислительном кластере ЯГУ.

**О СПЕКТРЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С
ДИСКРЕТНЫМ ИНДЕФИНИТНЫМ ВЕСОМ¹**

Владимиров А.А., Шейпак И.А. (Москва)

iasheip@mech.math.msu.su

На отрезке $[0, 1]$ рассматривается следующая спектральная зада-

¹Работа поддержана грантом РФФИ № 07-01-00283 и грантом «Поддержки ведущих научных школ», грант № НШ-5247.2006.1, и грантом INTAS 05-1000008-7883.

ча с сингулярным весом

$$-y'' = \lambda \rho y, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (1)$$

где $\rho = P'$ для некоторой функции $P \in L_2[0, 1]$, причём производная понимается в обобщённом смысле.

В работе [1] задача (1) рассматривалась в предположении, что ρ — самоподобная сингулярная мера (не дискретная). Распределение собственных значений такой задачи подчинено степенному закону:

$$\lambda_n \asymp n^d, \quad d > 2.$$

В работе [2] эти результаты были обобщены на более широкий класс самоподобных сингулярных весов, не являющихся дискретными.

В настоящем докладе речь пойдёт о поведении собственных значений задачи (1) в предположении, что P — самоподобная кусочно-постоянная функция, имеющей счётное число скачков. При этих предположениях справедлива следующая

Теорема. *Существуют такие положительные числа $\mu_{+,l}$, $l = 0, 1, \dots, m_1$ и $\mu_{-,l}$, $l = 0, 1, \dots, m_2$, что последовательность положительных (отрицательных) собственных значений задачи (1), занумерованные в порядке возрастания (убывания) удовлетворяют при $k \rightarrow +\infty$ асимптотикам*

$$\lambda_{l+km_1} = \mu_{+,l} \cdot q^k(1 + o(1)), \quad \lambda_{-(l+km_2)} = -\mu_{-,l} \cdot q^k(1 + o(1)).$$

Число $q > 1$ определяется параметрами самоподобия функции P .

Литература

[1] M. Solomyak M., E. Verbitsky *On a spectral problem related to self-similar measures*//Bull. London Math. Soc., **27** (1995), P. 242–248.

[2] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Самоподобные функции в пространстве $L_2[0, 1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом*// Матем. сборник, Т. 197, №11, 2006, С. 13–30.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОТОКА В СЕТЯХ С БАРЬЕРНОЙ ДОСТИЖИМОСТЬЮ

Водолазов Н.Н. (Ростов-на-Дону)

nickolay_vodolazov@rambler.ru

В представленной работе рассматривается задача о нахождении максимального потока в сетях с барьерной достижимостью, которая

была поставлена в [1]. В задаче дан граф $G(U, V, \varphi)$, множество дуг которого разбито на три подмножества: U_H (нейтральные дуги), U_+ (увеличивающие дуги) и U_B (барьерные дуги). С каждой частицей, проходящей по графу, связано целое число i — её барьерный уровень. Для частиц, выходящих из источника, он равен 0. Если барьерный уровень меньше некоторого заданного числа k , то при прохождении дуг из множества U_+ барьерный уровень увеличивается на 1. При прохождении дуг из множеств U_H и U_B барьерный уровень не изменяется. Частица может проходить по дугам множества U_B только в случае, если её барьерный уровень равен k .

Решение поставленной задачи основано на построении вспомогательного графа G' и применении к нему алгоритма, описанного в [1]. Однако этот алгоритм не позволяет находить максимальный поток на всех сетях, например, он не дает решение на сетях, в которых возможен блокирующий поток [2].

Нами предпринята попытка модифицировать алгоритм Форда-Фалкерсона так, чтобы его можно было применять к решению поставленной задачи. Отличие полученного алгоритма от алгоритма Форда-Фалкерсона заключается в следующем: вершины помечаются вектором меток, каждая метка в векторе хранит величину увеличивающей цепи в данную вершину; поток рассматривается не как отображение $f : U \rightarrow R^+$ — отображение множества дуг в величину потока по ним, а как $f : U \rightarrow (R^+)^{k+1}$ — отображение множества дуг в вектор $(R^+)^{k+1}$, каждая компонента которого показывает величину потока соответствующего барьерного уровня по данной дуге; алгоритм может получать цепи, которые несколько раз проходят по одной дуге на разных барьерных уровнях, поэтому процедура изменения потока по увеличивающей цепи также модифицирована. Полученный алгоритм позволяет находить поток на некоторых сетях, для которых алгоритм из [1] не находил решения. Однако существуют сети, для которых и модифицированный алгоритм Форда-Фалкерсона не может найти решения. Это вызвано тем, что накладываемые дополнительные ограничения приводят к возможности существования потока, который не является максимальным и для которого не существует увеличивающей цепи. Данная задача может быть решена симплекс-методом.

Литература

1. Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А. Потоки в сетях со связанными дугами. //Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Есте-

ственные науки. Приложение. 2003. № 8. С.9-12.

2. Ning Xuanxi, Ning Angelika The Blocking Flow Theory and its Application to Hamiltonian Graph Problems. Germany, Aachen: Shaker Verlag GmbH, 2006. 249p.

О ПОСТРОЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОБОВЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА С ЗАДАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ГРАФЕ

Гладышев Ю.А., Кремкова Е.А. (Калуга)

common_interests@mail.ru

Большой и все увеличивающийся класс физических явлений, таких как теплопроводность контактирующих тел, диффузия в разветвленных системах, электрические токи в сетях моделируются системой дифференциальных уравнений на графе. Поэтому разработка методов решения таких задач представляется актуальной и целесообразной. Предлагается один из таких методов.

Понятие обобщенной степени, введенное Л. Берсом [1] и далее развитое в ряде работ авторов [2] допускает различные обобщения. В настоящем сообщении дано дальнейшее развитие этого понятия для случая, когда областью определения степени будет некоторый граф. Ранее они строились или путем последовательного продолжения определения степени или путем использования интегрирования по графу [2].

На основе ОСБ для отрезка строятся, используя условия сопряжения, степени на графе. Определено линейное векторное пространство степеней $X^{(n)}(x)$ на графе. Используя бесконечные линейные комбинации ОСБ на графе можно построить решения типа $\sin \alpha X, \cos \alpha X$ определенных на графе, которые служат для использования метода Фурье и решений уравнений теории переноса.

Составлена программа на ЭВМ, дающая возможность найти степени любого порядка, определенные на графе и принимающие данные значения на открытых вершинах графа. Рассмотрены частные примеры.

Литература

1. Bers L., Gelbart A. On class of functions defined by partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — V. 56. № 1. — P. 67–93.

О ПАРАМЕТРАХ КЛАССИФИКАЦИИ BIF-РАСКЛАДОВ ФУНКЦИОНАЛОВ С 3-КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Гнездилов А.В. (Воронеж)

gnezdilo@mail.ru

В [1] была проведена классификация по параметрам ν и τ полученных матриц *bif*-раскладов для функционала с 3-круговой симметрией. При этом задача сводилась к исследованию функции

$$W(\xi, \delta) = \sum_{j=1}^3 \operatorname{sgn}(\delta_j) (\xi_{2j-1}^2 + \xi_{2j}^2) + \sum_{i,j=1}^3 \tilde{a}_{ij} (\xi_{2j-1}^2 + \xi_{2j}^2) (\xi_{2i-1}^2 + \xi_{2i}^2).$$

Представляет интерес непосредственная зависимость ν и τ от коэффициентов функции W . Для ν сразу устанавливается:

$$\nu = \sum_{j=1}^3 \frac{1 - \operatorname{sgn}(\delta_j)}{2}.$$

Далее, применяя *RF*-схему [2], устанавливается, что

$$\tau = \sum_{j=1}^2 \frac{1 - \operatorname{sgn}(g_j)}{2}, \quad (g_3 = 0) \vee \tau = \sum_{j=1}^2 \frac{1 - \operatorname{sgn}(q_j)}{2}, \quad (g_3 \neq 0),$$

где

$$q_j = \frac{g_1 + g_2}{2} - \operatorname{sgn}(g_1 - g_2) \frac{(g_1 - g_2)^2 + (-1)^{j+1} 4g_3^2}{2\sqrt{(g_1 - g_2)^2 + 4g_3^2}}, \quad (j = 1, 2)$$

$$g_1 = \tilde{a}_{11} \pm 2\tilde{a}_{13} + \tilde{a}_{33}, \quad g_2 = \tilde{a}_{22} \pm 2\tilde{a}_{23} + \tilde{a}_{33},$$

$$g_3 = \tilde{a}_{12} \pm \tilde{a}_{13} \pm \tilde{a}_{23} + \tilde{a}_{33}.$$

Здесь во всех g_j в "±" берётся знак "-" при $\nu = 3$ ($\delta_1, \delta_2, \delta_3 < 0$).

Получен ряд характерных сечений поверхности $q_1 = 0 \vee q_2 = 0$ и её связных дополнений (с указанием соответствующих τ).

Литература

1. Гнездилов, А.В. Бифуркации критических торов для функционалов с 3-круговой симметрией [Текст]/А.В. Гнездилов// Функ. анализ и его прил. – М.: Наука, 2000. – Т. 34. – Вып. 1. – С. 83–86.
2. Гнездилов А.В. Об одной редукционной схеме исследования бифуркации экстремалей функционалов с 3-круговой симметрией [Текст]/А.В. Гнездилов// Семинар по глоб. и стохаст. анализу / Сб. науч. статей. – Воронеж: ВорГУ, 2007. – Вып. 2. – С. 21–30.

ОПЕРАТОРНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ СМО В ИНФОРМАЦИОННЫХ СЕТЯХ

Головко Н.И., Каретник В.О. (г.Владивосток)

cdo@psue.ru

Исследование моделей систем массового обслуживания (СМО) в информационных сетях (ИС) позволяет определять характеристики показателей эффективности функционирования СМО в ИС с целью оптимизации состояния ИС. Проведенный статистический анализ информационных потоков в ИС показал, что функционирование серверов в ИС, например, таких как ргоху или web сервер, описывается следующей моделью СМО. СМО имеет бесконечный накопитель, экспоненциальное обслуживание интенсивности μ , входной дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой скачкообразный процесс, изменяющийся на отрезке $[a, b]$ с интервалами постоянства, распределенными по экспоненциальному закону с параметром α . Интенсивность $\lambda(t)$ имеет в точках разрыва t_0 справа условную плотность распределения $\varphi(x|y) = P\{x < \lambda(t_0 + 0) < x + dx | \lambda(t_0 - 0) = y\}/dx \equiv \varphi(x)$, то есть предполагается, что значения процесса $\lambda(t)$ в точках разрыва t_0 слева и справа — независимы. Предполагается выполнение условия отсутствия перегрузок в стационарном режиме $b < \mu$. Для стационарного распределения $q_k(x) = P\{\nu = k, x < \lambda < x + dx\}/dx, k \geq 0$, числа заявок ν и интенсивности λ входного потока в стационарном режиме найдена производящая функция комплексного аргумента z :

$$F(x, z) = \sum_{n \geq 0} z^n g_n(x), g_n(x) = \sum_{k \geq n+1} q_k(x), z \in \mathcal{Z} = \{z : |z| \leq 1\},$$

в виде ряда

$$F(x, z) = (I - A)^{-1} f(x, z) = \sum_{n \geq 0} A^n f(x, z), \quad (1)$$

$$A = (x + \mu + \alpha - xz)^{-1} (\mu K + \alpha \Phi), \quad f(x, z) = x\varphi(x)(x + \mu + \alpha - xz)^{-1},$$

$$K \sum_{n \geq 0} h_n(x) z^n = \sum_{n \geq 0} h_{n+1}(x) z^n, \quad \forall h_n(x), \quad \Phi F(y, z) = \varphi(x) \int_a^b F(y, z) dy.$$

В работе показано:

- 1) норма оператора A строго меньше единицы;
- 2) ряд в формуле (1) равномерно сходится по $x \in [a, b], z \in \mathcal{Z}$.

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ КОНТАКТИРУЮЩИХ ОБОЛОЧЕК

Голубева М.С., Гладышев Ю.А. (Калуга)

golubeva_m@mail.ru

В сообщении рассматривается решение краевой задачи для уравнения теплопроводности в системе контактирующих поверхностей. Решение данной задачи является иллюстрацией современного применения метода Фурье на графе. Полученные результаты являются частным, практически важным случаем решения краевых задач на стратифицированных множествах.

Геометрическая модель расслоенной оболочки представляет собой контактирующие прямоугольники, линия сопряжения которых параллельна одной из сторон. Вдоль линии сопряжения заданы условия идеального контакта. Решая задачу методом разделения переменных, получим задачу Штурма-Лиувилля, заданную на графе. Получены собственные функции, собственные значения, проведена нормировка собственных функций, относительно заданного скалярного произведения. Приведены разложения по системе собственных функций. Рассмотрены частные случаи.

Литература

1. Гладышев Ю.А. Краевые задачи теплопроводности в системах тонких стержней и оболочек. 2002 г., М., 3-я нац. конференция по теплообмену. т. 7. стр. 86-89.
2. Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах, М: Физматлит, 2004-272с.

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА¹

Голубь А.В. (Саратов)

Рассмотрим оператор

$$Af = \int_0^{\theta(x)} f(t) dt,$$

где $\theta(x) = \frac{2k-1}{n}x$ при $x \in [\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}]$ и $k = \overline{1, n}$. Функция $\theta(x)$ является инволюцией, т.е. $\theta(\theta(x)) \equiv x$, и имеет разрывы первого рода.

Справедлив следующий результат

Теорема. Для любой функции $f(x) \in L[0, 1]$ и любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2n})$ имеет место соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \max_{\varepsilon + \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n} - \varepsilon} |S_r(x, f) - \sigma_r(x, f_k)| \right\} = 0,$$

где $S_r(x, f)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(x, g)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \exp 2nk\pi i x \right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ функции $g(x)$ на отрезке $x \in [0, \frac{1}{n}]$; $f_k(x) = f(\frac{k-1}{n} + x)$, $k = \overline{1, n}$ при $x \in [0, \frac{1}{n}]$.

Литература

1. Голубь А.В., Хромов А.П. Теорема равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с инволюцией, допускающей разрывы // Известия Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 2. С. 5–10.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-2970.2008.1).

НАДЕЖНОСТЬ КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ

Гончаренко В.Ю. (Киев)

yuragoso@mail.ru

Реальные гидродинамические расчеты производились на однородных кластерах, состоящих из одинаковых РС (далее интерпретируется как граф). Для повышения доверия к результатам вычислений использовались программные и аппаратные средства резервирования функциональных элементов кластера.

Пусть $G(V, \epsilon)$ — конечный связный граф, содержащий n вершин, в начальный момент времени все его вершины окрашены в один цвет 0 (работоспособны). С течением времени вершины графа случайным образом могут изменять окраску на цвет 1 (вышли из строя). Пусть случайные величины $\tau_i, i = \overline{1, n}$ — это времена от начального момента до изменения цвета с 0 на 1. В силу однородности, будем считать распределение величин $\tau_i, i = \overline{1, n}$ одинаковым для всех i с функцией распределения $p(t)$.

Группой отказа назовем множество элементов, отказ которых вызывает отказ всей системы в целом (но отказ любого собственного подмножества из группы отказа не вызывает выхода из строя всей системы).

В нашей системе количество групп отказов совпадает с количеством ребер $|\epsilon|$, так как благодаря принятым мерам, выход из строя системы происходит лишь тогда, когда смежные вершины графа окрашены цветом 1. Пусть событие $A_k (k = \overline{1, |\epsilon|})$ состоит в том, что k -тая группа Γ_k не отказала за время t . Тогда время безотказной работы системы, представленной графом $G(V, \epsilon)$, распределено следующим образом:

$$Q(t) = p(A_1 \cdots A_{|\epsilon|}) = \\ = 1 - \sum_k p(\bar{A}_k) + \sum_{k < l} p(\bar{A}_k \bar{A}_l) - \sum_{k < l < s} p(\bar{A}_k \bar{A}_l \bar{A}_s) + \cdots,$$

где $\bar{A}_k$ и A_k — противоположные события. Заметим, что

$$p(\bar{A}_k) = p^2(t); \cdots; p(\bar{A}_{l_1} \cdots \bar{A}_{l_s}) = p^{\alpha_s}(t),$$

где α_s — количество элементов множества $\Gamma_{l_1} \cap \cdots \cap \Gamma_{l_s}$.

Для графов, являющихся отрезком прямой с расположенными на ней вершинами, прямоугольной сеткой с вершинами в точках пересечения и графов, образованных меридианами и параллелями на

торе в явном виде выписаны все характеристики надежности (среднее время безотказной работы, интенсивность отказов и т.д.)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ПРОНИКАНИЯ, ПРОВИТИЯ И РАЗРУШЕНИЯ РАЗНОМАСШТАБНЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛ¹

Горельский В.А., Ерохин Г.А., Тырышкин И.М., Хорев
И.Е. (Томск)

khorev@main.tusur.ru

Обсуждаются результаты численного моделирования высокоскоростного соударения разномасштабных твёрдых тел из металлов и сплавов с использованием разработанной физико — математической модели непрерывно повреждаемых сред. Для математического описания поведения различных конструкционных материалов при ударных нагрузках используется широкодиапазонная модель сжимаемого, непрерывно повреждаемого твердого тела. В общем случае разработанная физико-математическая модель тел при ударном взаимодействии описывается сжимаемой упругопластической средой, поведение которой при динамических нагрузках характеризуется уравнением состояния, модулем сдвига, динамическим пределом текучести и константами кинетической модели разрушения, описывающей развитие и эволюцию микроповреждений, которые непрерывно изменяют свойства материала и вызывают релаксацию напряжений [1]. Моделирование откольного и сдвигового разрушений твердых тел осуществлялось, исходя из представления о непрерывной мере разрушения, в качестве которой выбран удельный объем пор или трещин [2]. Константы кинетической модели большинства металлов и сплавов находились путем решения обратных задач по согласованию экспериментального и расчетного профиля откольного импульса при соударении пластин или нагружения пластины взрывом [3]. В общем случае модель учитывает влияние зарождение и дальнейшее развитие микроповреждений, эволюцию пор, сжатие, температурные эффекты. Сравнение с экспериментальными данными показано, что кинетическая модель динамического разрушения конструкционных материалов совместно с уравнением состояния твер-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06-01-96920 р_офи)

дых тел при экстремальных условиях качественно и количественно описывает динамику развития лицевого, тыльного разрушения и множественный откол при внедрении в комбинированные мишени ударников различной формы. Произведен компьютерный анализ ряд простейших конструкций для защиты от компактных и удлинённых техногенных осколков с различной формой головной части в сравнении с аналогичным экспериментом. Изучены особенности разрушения различных ударников на преградах монолитных, экранированных и разнесённых. Особое внимание уделено влиянию угла нутации ударника на процесс проникания и пробития. В процессе численного моделирования высокоскоростных ударных явлений изучены физические особенности деформирования и разрушения ударников и мишеней в области скоростей встречи 1 – 5 км/с, где влияние плотности, прочности, температуры, формы головной части ударников, расположение преград в конструкции являются определяющими и взаимовлияющими, что приводит в итоге к различным вязко – откольно – сдвиговым механизмам пробивания мишеней в различных диапазонах скоростей.

Литература

1. Хорев И.Е., Горельский В.А., ДАН, 1983, т.271, №3, с.623-626
2. Хорев И.Е., Горельский В.А., Югов Н.Т. ДАН, 1985, т.283, №3, с.612-615
3. Хорев И.Е. Химическая физика, 2002, т.21, №9, с.17-21

О МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Гребенникова И.В., Кремлёв А.Г. (Екатеринбург)

giv001@usla.ru

Рассматриваются управляемые сингулярно возмущённые системы (с малым параметром $\mu > 0$, запаздыванием $h > 0$):

$$M(\mu)dz(t)/dt = A(t)z(t) + G(t)z(t-h) + B(t)u(t),$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, матрица $M(\mu) = \text{diag}(E_n, \mu E_m)$, E_k — единичная $k \times k$ - матрица. Начальное состояние системы $z(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $z_0 = z(t_0)$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $z_0 \in Z_0$, Z_0 — выпуклый компакт (в R^{n+m}); $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t \in [t_0 - h, t_0]$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Ха-

удсорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^1(T)$. Выполнено условие экспоненциальной устойчивости для подсистемы быстрых переменных.

Рассматривается минимаксная задача управления [1]: среди $u(\cdot) \in P$ найти $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)),$$

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot)$ — заданная выпуклая функция; $z(t; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ — решение исходной системы, исходящее из Z_0 , при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Предлагаемая процедура [2] позволяет построить управляющее воздействие, доставляющее оптимальное значение с заданной степенью точности $o(\mu^k)$. Разрешимость исходной задачи управления, а также допустимость используемых аналитических конструкций определяется рядом требований.

Литература

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности // М.: Наука. 1977.

2. Кремлёв А.Г., Гребенникова И.В. Об асимптотике оптимального управления сингулярно возмущенной системой с запаздыванием // Математика. Информационные технологии. Образование: Материалы научно-практ. конференции. Ч. 1. Оренбург: ГОУ ОГУ, 2006. С. 36-38.

О РЕШЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ЛИНЕЙНУЮ МОДЕЛЬ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ¹

Гузев М.А., Дмитриев А.А. (Владивосток)

dmitriev@iacp.dvo.ru

В работе рассматривается линейная одномерная модель двух взаимодействующих однородных молекулярных систем, имеющих разные параметры, которую можно представить в виде решения системы дифференциальных уравнений $\ddot{u} = Au + f$ с нулевыми начальными условиями. A — трехдиагональная матрица зависящая от двух параметров.

¹Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта 06-II-CO-01-002

Хорошо известно, что структура поведения системы определяется спектральными свойствами матрицы $\mathbf{A}$, детерминант которой равен $\alpha^{n-1}\beta^m\{\alpha U_n(\lambda-\alpha)+(\alpha-\beta)U_{n-1}(\lambda-\alpha)\}U_m(\lambda-\beta)-\beta U_{n-1}(\lambda-\alpha)U_m(\lambda-\beta)\}$, где α, β — безразмерные параметры системы, а U_n — полином Чебышева второго рода.

Замена переменной $\lambda \rightarrow \lambda + \frac{\alpha+\beta}{2}$ и параметров $\frac{\alpha-\beta}{2}=\gamma, \frac{\alpha-\beta}{\alpha}=\varepsilon$ приводит к исследованию (характеристического) уравнения

$$[W_n(\lambda-\gamma)+\varepsilon]W_m(\lambda+\gamma)=1-\varepsilon,$$

где W_n — отношение полинома U_n к U_{n-1} . Тривиальные рассуждения при $\alpha \gg \beta$ ($\varepsilon \approx 1$) показывают, что спектр рассматриваемой системы разбивается на две части, в соответствии с числом частиц каждой группы, и содержится в интервале $(-1, 1)$, смещенном на $\pm\gamma$.

Исследование функции, обратной к W_n показывает, что при $|z| > 2$ она равна $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+O(z^{2n-1})$. При больших n и m поведение решений характеристического полинома сосредоточены относительно точек $\pm\gamma$ аналогично случаю $\alpha \gg \beta$, при этом используется перемежаемость корней характеристического полинома якобиевой трехдиагональной матрицы [1].

Отметим, что асимптотика $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ справедлива во всей комплексной плоскости.

Литература

1. В.П. Ильин, Ю.И. Кузнецов Трехдиагональные матрицы и их приложения М.: Наука, 1985, 208 с.

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ВОЛЧКА С ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ¹

Гурченков А.А., Костиков А.А. (Москва)

AlKostikov@yandex.ru

Проблема управления ротационным движением тела с полостями, содержащими жидкость, составляет важное направление исследований. В представленной работе рассмотрена в линейной постановке задача Коши для возмущенного относительно стационарного вращения движения твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью. При этом никаких ограничений на форму полости и ха-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФН (код проекта 06-01-00316)

раक्टर возмущенного движения не накладывается.

Проблема совместного решения уравнений гидродинамики и механики сведена к решению некоторой задачи на собственные значения, зависящей лишь от геометрии полости, и последующему интегрированию системы интегро-дифференциальных уравнений.

На основе полученных уравнений исследуется устойчивость стационарного вращения тела с жидкостью. Получена зависимость угловой скорости системы от внешнего возмущающего момента, который рассматривается как управляющее воздействие.

Для рассматриваемой системы поставлена задача оптимального управления с терминальными функционалами, где в качестве неизвестной функции уравнения выступает момент внешних сил. С использованием формализма Гамильтона-Понтрягина получены аналитические решения задачи при условии отсутствия ограничений на управление.

Представлены две иллюстративные задачи для цилиндрической полости, хотя в принципе подход справедлив для полости произвольной формы.

Литература

1. Гурченков А.А. Диссипация энергии в колеблющейся полости с вязкой жидкостью и конструктивными неоднородностями. // РАН. 2002. Т. 382. №4. С. 470–473.
2. Гурченков А.А. Устойчивость жидконаполненного гироскопа. // ИФЖ. 2002. Т. 75. №3. С. 28–32.
3. Гурченков А.А., Носов М.В. Устойчивость ротора с вязкой жидкостью. М.: ВЦ РАН. 2005.
4. Гурченков А.А., Есенков А.С., Цурков В.И. Управление движением ротора с полостью, содержащей идеальную жидкость. Ч. 1. // Изв. РАН. ТСУ. 2006. №1. С. 135–142.

О НЕКОТОРЫХ ТРУДНОСТЯХ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Давыдова М.Б., Покорная И.Ю., Покорная О.Ю.
(Воронеж)

Как для вузовского преподавателя должны расцениваться $1/3$ и

2/6? Или это одно и то же число, или же это две различные сущности?

Вопрос этот далеко не праздный.

Сравнительно недавно мы стали участниками достаточно яростной дискуссии среди вузовских преподавателей, где обсуждался вопрос о правильности ответа на одну из задач из некоего "решбника" по ЕГЭ. В этом решбнике утверждалось, что для уравнения $x^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$ значение $x = -1$ не является корнем, точнее, не является решением, ибо степень с рациональным показателем при отрицательном основании смысла не имеет. Подразумевается, что значение $x = -1$ не входит в

ОДЗ для этого уравнения.

Однако, возмущались многие, для функции $y = x^{\frac{1}{3}}$, т.е. $y = \sqrt[3]{x}$ даже в некоторых вузовских учебниках областью определения признается вся числовая ось, включая отрицательные значения x . В самом деле, алгебраическое уравнение $x^3 + 1 = 0$ имеет корень $x = -1$, но разве это не значит, что $\sqrt[3]{-1} = -1$? Спрашивается, в чем здесь дело?

А дело здесь в том, что даже у вузовских преподавателей, несмотря на их достаточно высокую математическую подготовку, и даже несмотря на то, что каждый из них в свое время изучал курс ТФКП как правило, унаследовано школьное представление, что степень с рациональным показателем типа $a^{\frac{p}{q}}$ расшифровывается однозначно в виде $(a^{\frac{1}{q}})^p$, или в виде $(\sqrt[q]{a})^p$, при этом считается, что это тоже самое, что $(a^p)^{\frac{1}{q}}$. Однако давайте представим $(-1)^\alpha$, где $\alpha = \frac{1}{3}$ и $(-1)^\beta$ при $\beta = \frac{2}{6}$. Поскольку $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{6}$ — это якобы одно и то же рациональное число, то должно быть $(-1)^\alpha = (-1)^\beta$. Но тогда $(-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}}$. Правую часть здесь можно понимать двояко, а именно в виде $((-1)^2)^{\frac{1}{6}}$, что очевидно $(1)^{\frac{1}{6}} = 1$, в то же время $(-1)^{\frac{2}{6}}$ должно пониматься и как $(-1)^{\frac{2}{6}} = ((-1)^{\frac{1}{6}})^2$, где, очевидно, внутреннее выражение $(-1)^{\frac{1}{6}}$ лишено смысла как корень четной степени из отрицательного числа. Получается какой-то странный абсурд. Вроде бы $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ — так, по крайней мере положено считать согласно школьной математике (а разве в высшей математике не так?), с другой стороны имеет противоречие. В чем же дело? Выходит, для степени с рациональным показателем, само определение этого понятия существенно зависит от того, каким образом представлен этот показатель.

А ведь для каждого рационального числа существует бесконеч-

ное множество представлений вида $\frac{p}{q}$. В чем же здесь дело? А дело все в том, что даже студенты математики, осуществляя подготовку на достаточно высоком уровне и имея достаточно глубокие знания по комплексному анализу, наследуют на бессознательном уровне некоторые предрассудки, вшитанные в школьные годы, где определения математических понятий не просто нестрогие, а вопиюще полны непониманием математических тонкостей.

Например, на уровне школьного обучения полностью перепутаны 2 культуры: культура комплексного переменного и культура вещественного анализа.

Так, например, при разговоре о решениях уравнения $x^{\frac{1}{3}} + 1 = 0$ мы элементарно их спутали с корнями уравнения $x^3 + 1 = 0$, но вдобавок мы путаем понятие решения и корня. Причем на синкретическом уровне термин *корень уравнения* отождествляется с термином *корень арифметический из числа*.

МАКСИМАЛЬНЫЕ РАСКЛАДЫ БИФУРЦИРУЮЩИХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Даринский В.М., Колесникова И.В., Сапронов Ю.И.
(Воронеж)

Задачи о фазовых переходах и другие задачи современного естествознания допускают постановку в виде общей задачи $V_\lambda(x) \rightarrow \text{extr}$ для семейства фредгольмовых функционалов, которая приводит, в частности, к вопросу о бифуркациях экстремалей из точки минимума. При ее решении используется метод конечномерной редукции, в соответствии с которым исследование бифуркаций экстремалей заменяется анализом ветвления критических точек ключевых функций (на конечномерных пространствах) [1]. Несмотря на имеющиеся достижения, до сих пор остается недостаточно изученными случаи бифуркации экстремалей из точек минимума с однородными особенностями четвертого и шестого порядков, весьма часто встречаемые в приложениях. Доклад посвящен *min*-особенностям шестого порядка в классе функций двух и трех переменных, четных по каждой переменной. Особенности такого типа представляют реальный интерес для задачи феноменологического описания фазовых переходов [2],[3]. В случае трех переменных ключевая функция W имеет

следующий вид:

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j x_j^6 + \sum_{j \neq k} \alpha_{jk} x_j^4 x_k^2 + \sum_{j=1}^3 \beta_j x_j^4 + \sum_{j \neq k} \varepsilon_{jk} x_j^2 x_k^2 + \sum_{j=1}^3 \delta_j x_j^2 + o(\|x\|^6).$$

Основной упор в докладе сделан на задачу описания раскладов бифурцирующих экстремалей с максимальным количеством экстремалей (= 125).

Литература

[1] Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004), с.3-140.

[2] Изюмов Ю.А., Сыромятников В.Н. Фазовые переходы и симметрия кристаллов. М.:Наука, 1984. – 247 с.

[3] Широков В.Б., Юзюк Ю.И., Dkhil B., Леманов В.В. Феноменологическое описание фазовых переходов в тонких пленках В.Н. ВаТiО₃ // Физико твердого тела. Том 50, вып. 5 (2008), с. 889–892.

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Дмитриев В.Б. (Самара)

dmitriev_v.b@mail.ru

В цилиндре $Q_T = \{(x, \tau) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < \tau < T\}$, где Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, рассматривается уравнение

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) u_{x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t = f(x, t, u). \quad (1)$$

Для него ставится задача с начальными условиями Коши

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (2)$$

и нелокальным условием

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) |_{S_T} = \int_0^t \int_{\Omega} K(x, y, \tau, u(y, \tau)) dy d\tau, \quad (3)$$

где $\varphi(x), \psi(x), K(x, y, \tau, u(y, \tau))$ заданы, а $S_T = \{(x, t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ - боковая поверхность цилиндра Q_T . Здесь $a_{ij} = a_{ji}$, $\nu \xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \mu \xi^2$, где $\nu > 0$. Получены условия на функции $a_{ij}, a_i, b, K, \varphi, \psi, f$, при выполнении которых задача (1)-(3) имеет единственное обобщённое решение из $W_2^1(Q_T)$. Один из результатов автора по исследованию нелокальных задач с нелинейными интегральными условиями опубликован в [1]. Однако условие (3) имеет там другой вид.

Литература

1. Дмитриев В.Б. *Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения гиперболического типа* // Вестник СамГТУ, 2006. вып. 42, с. 35-40.

О МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ГАЛЕРКИНА НА СЕТКАХ ШИШКИНА ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Добробог Н.В. (Самара)

dogreen@mail.ru

В докладе рассматривается метод конечных элементов Галеркина для задачи

$$Lx \equiv -\varepsilon \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t) = f(t), \quad p(t) \geq p_0 > 0, \quad x(0) = x(1) = 0. \quad (1)$$

Здесь ε - малый положительный параметр, $x \in [-1, 1]$, $p(t), q(t)f(t) \in C^2[-1, 1]$. Пусть

$$t_i = \begin{cases} a \frac{i}{m}, & i = 0, 1, \dots, m \\ a + (1-a) \frac{i-m}{k^*-m}, & i = m+1, m+2, \dots, k^*, \end{cases}$$

где $k^* = m + \left\lceil \frac{2}{p_0} m |\ln m| \right\rceil + 1$, $a = 1 - \frac{2}{p_0} \varepsilon \ln m$, $m \in N$.

Для отыскания приближенного решения используется метод конечных элементов Галеркина на основе линейных сплайнов.

Теорема 1 Тогда найдутся такие константы $\varepsilon_0 > 0$, $m_0 \in N$, $C > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $m > m_0$: $\varepsilon m \leq 1$ существует единственное галеркинское приближение $x_m(t)$, справедлива оценка $\|x_m(t) - x(t)\|_{C[-1,1]} \leq \frac{C}{m^2}$.

Предположим, что параметр p_0 , определяющий границу погранслоя, неизвестен. В докладе строится алгоритм адаптации сетки, состоящий в определении на основе апостериорного анализа последовательности параметров p_k , сходящихся к p_0 .

В основе доказательства теоремы 1 и сходимости процесса адаптации лежит свойство квазиоптимальности галеркинских проекторов.

Определение. Оператор P называется *галеркинским проектором*, если $Px = x_m$, где x - точное решение задачи (1), x_m - галеркинское приближение.

Теорема 2 Найдется положительная константа C , не зависящая от ε , m такая, что справедлива оценка $\|P\|_{C[0,1] \rightarrow C[0,1]} \leq C$.

Литература

- [1] Лисейкин В.Д. Методы построения сеток. Springer, 1999.
- [2] Блатов И.А., Стрыгин В.В. Элементы теории сплайнов и метод конечных элементов для задач с погранслоем. Воронеж: ВГУ, 1997.

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ МОНОТОННЫХ УПЛОТНЯЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ С КОНУСОМ

Дорохов А.Н. (Воронеж)

В F -пространстве (пространстве Фреше) с конусом приводятся теоремы существования неподвижных точек монотонных уплотняющих операторов. Непрерывность исследуемых операторов, вообще говоря, не предполагается.

Определение. Число $\|x\|_\rho = \rho(x, 0)$ ($x \in X$) назовём ρ -нормой элемента x в F -пространстве X .

Пусть M - множество всех ограниченных по ρ -норме $\|x\|_\rho$ множеств $\Omega \subset X$ F — пространства X , а R_0 — полуинтервал $[0, +\infty)$.

Определение. Функция $\psi : M \rightarrow R_0$, обладающая свойствами:

- 1) равенство $\psi(\Omega) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда множество $\Omega \subset M$ относительно компактно;
- 2) выполняется равенство $\psi(\overline{\Omega}) = \psi(\Omega)$, ($\Omega \subset M$);
- 3) если $\Omega_1 \subset \Omega_2$, то $\psi(\Omega_1) \leq \psi(\Omega_2)$;
- 4) $\psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2)\}$;
- 5) $\psi(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \psi(\Omega_1) + \psi(\Omega_2)$, где $\Omega_1 + \Omega_2$ — алгебраическая сумма множеств Ω_1 и Ω_2 , называется мерой некомпактности в F -пространстве X .

Отметим, что данное определение меры некомпактности в F -пространстве X отличается от соответствующего определения, данного Б. Н. Садовским.

Уплотняемость оператора A здесь определяется так.

Определение. Ограниченный по ρ -норме $\|x\|_\rho$ оператор A называется ψ -уплотняющим в F — пространстве X , если для любого ограниченного относительно некомпактного множества $\Omega \subset M$ мера некомпактности $\psi(A\Omega) < \psi(\Omega)$.

Пусть оператор A действует в F -пространстве X с конусом K .

Теорема 1. Пусть

1) в F -пространстве X с конусом $K \subset X$ монотонный ψ -уплотняющий на конусном отрезке $\langle x_0, y_0 \rangle \subset X$ ($x_0 \leq y_0$) оператор A преобразует $\langle x_0, y_0 \rangle$ в себя;

2) образ $A\langle x_0, y_0 \rangle$ отрезка $\langle x_0, y_0 \rangle$ ограничен по ρ -норме $\|x\|_\rho$.

Тогда оператор A имеет в $\langle x_0, y_0 \rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку.

Аналогичная теорема доказана для бесконечного конусного отрезка $\langle x_0, \infty \rangle$.

Теорема 2. Пусть

1) в F -пространстве X с конусом $K \subset X$ монотонный ψ -уплотняющий на отрезке $\langle x_0, \infty \rangle$ оператор A преобразует $\langle x_0, \infty \rangle$ в себя;

2) существует число $R > \|x_0\|_\rho$, такое, что $\|Ax\|_\rho \leq \|x\|_\rho$ ($x \geq x_0, \|x\|_\rho > R$).

Тогда оператор A имеет в $\langle x_0, \infty \rangle$ по крайней мере одну неподвижную точку.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Дубровская А.П., Глушко Е.Г., Провоторова Е.Н.
(Воронеж)

В процессе становления специалистов технического профиля изучение дисциплин физико-математического профиля имеет фундаментальное значение. Совершенствование качества математической подготовки, поиск новых эффективных педагогических технологий в преподавании математического анализа, алгебры и геометрии, теории вероятностей и других математических дисциплин невозможен

без понимания существующих сегодня проблем и специфических особенностей этих дисциплин, как учебных предметов.

Прежде всего, отметим необходимость опираться на базовые школьные знания, развитое логическое мышление. Но в последние годы заметно снизился уровень подготовки абитуриентов, все большее число выпускников средних школ оказываются неподготовленными к интенсивному учебному процессу в вузе. Поэтому первоочередное значение преподаватель вынужден уделять проблеме адаптации студентов младших курсов к новым образовательным условиям, организации и управлению самостоятельной работой студентов, восполнению пробелов в знаниях и умениях первокурсников. С этой целью на кафедре ВМФММ ВГТУ внедряется в практику использование комплексного методического обеспечения дисциплин, главным из которых является единое методическое руководство, позволяющее студентам четко планировать свою самостоятельную работу и вписаться в учебный процесс. Одной из составляющих разрабатываемых нами комплексов являются планы-графики по каждой математической дисциплине по каждому семестру отдельно и всего курса в целом, что позволяет студенту уже в начале семестра четко видеть цель, которую он должен достичь, пути достижения этой цели, рационально распределять баланс времени.

Специфической особенностью математических курсов является абстрактный характер математических знаний, насыщенность логическими рассуждениями, а также аксиоматическое построение теорий, которые вызывают у первокурсников значительные трудности. Определения часто кажутся произвольными, оторванными от действительности. Поэтому уже с первых лекций необходимо объяснять природу математики, сущность и происхождение математических абстракций, раскрывать характер отражения математической наукой явлений и процессов реального мира. Преподаватель математики имеет много подходящих случаев познакомить студента с чрезвычайно важными “неформальными” стадиями мыслительного процесса (Д. Пойя), имеет средства учить искусству “доказывать”, развивать интуицию, т.е. развивать мыслительные способности студентов. Существующая тенденция к замене традиционных методов на дистанционные может привести к потере таковой возможности.

При выборе форм передачи математических знаний особенно важно учитывать психологические законы восприятия, возможности и закономерности механизмов памяти и мышления отдельной

личности, т.е. использовать личностно-ориентированные технологии в обучении студентов.

Отметим также необходимость строгого последовательного изложения материала, невозможность усвоения последующих разделов без знания предыдущих. Значит, необходима такая организация учебного процесса, при которой каждый студент должен будет иметь возможность вовремя восполнить пропущенную учебную информацию, получить консультацию по непонятным вопросам.

Отличительной особенностью математического образования студентов технических вузов является прикладная направленность полученных знаний. В подготавливаемых нами пособиях ставятся проблемные профессионально-ориентированные задачи, для решения которых используются методы, изучаемые в данном разделе. Такой подход позволяет студентам применять знания абстрактного характера к решению конкретных прикладных задач, учит моделировать, осознавать необходимость высокого уровня математической подготовки для успешного профессионального становления и развития их интеллектуальных способностей.

К ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОЙ СТЕПЕНИ МНОГОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА

Дубровский В.В.(мл.) (Магнитогорск)

vvdubrov@mail.ru

В сепарабельном гильбертовом пространстве $L_2(\Pi_n)$ рассмотрим оператор T_0 , порожденный краевой задачей Неймана для однородного уравнения Гельмгольца, где $\Pi_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_j > 0$.

Введем оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ – разложение единицы

оператора T , степень $\beta \geq n/2$ и $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_m = \lambda_{(m_1, m_2, \dots, m_n)}$ оператора T , будем нумеровать через $\lambda_t^{(k)}$, где $m_j, t \in \mathbb{N}$, $k = \overline{1, \delta_t}$, δ_t – кратность числа λ_t .

Пусть P – оператор умножения на функцию $p \in L_\infty(\Pi_n)$, часто называемую потенциалом.

С помощью теории регуляризованных следов операторов и принципа сжимающих отображений С. Банаха доказана теорема о существовании и единственности потенциала p , удовлетворяющего следующим условиям:

$$\begin{aligned} p(a_1 - x_1, x_2, \dots, x_n) &= p(x_1, a_2 - x_2, \dots, x_n) = \\ &= \dots = p(x_1, x_2, \dots, a_n - x_n) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

для почти всех $x \in \Pi_n$,

$$\int \dots \int_{\Pi_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right) dx_1 \dots dx_n = 0$$

при $\prod_{j=1}^n m_j = 0$, $m_j = 0, 1, \dots$,

$$\|p\|_{L_\infty(\Pi_n)} \leq 4^{-1} \min_{d \neq l} \rho(\lambda_d^{(k)}, \lambda_l^{(k)}),$$

восстановленного по заданной последовательности комплексных чисел, в определенном смысле близкой к $\{\lambda_t^{(k)}\}_{t=1}^\infty$.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Дюжева А.В. (Самара)
aduzheva@rambler.ru

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + c(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

в области $Q = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ и поставим следующую задачу: найти решение $u(x, t)$, удовлетворяющее уравнению (1) и условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (3)$$

и нелокальному условию

$$u(l, t) = \int_0^l K(y)u(y, t)dy. \quad (4)$$

Так как условие (4) нелокальное, то стандартные методы решения смешанных задач неприменимы. Поэтому поступим, следуя [1], следующим образом.

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$, положив $Bu \equiv v = u - \int_0^x K(y)u(y, t)dy$.

Тогда, если $u(x, t)$ - решение поставленной задачи (1)–(4), то $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$v_{tt} - v_{xx} + cv + \Phi(x, t, u) = F(x, t) \quad (5)$$

и условиям

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad (6)$$

$$v(x, 0) = u_0 - \int_0^x K(y)u_0(y)dy = \varphi(x), \quad (7)$$

$$v_t(x, 0) = u_1 - \int_0^x K(y)u_1(y)dy = \psi(x), \quad x \in Q. \quad (8)$$

Методом продолжения по параметру и метод регуляризации доказано существование единственного решения $u(x, t) \in W_2^2(Q)$.

Литература

1. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. Дифференц. уравн., 2006, Т.42, №12, с.1-14.

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРА

Елисеев А.Г., Шапошникова Д.А. (Москва)

Рассматривается сингулярно возмущенная задача для интегрального оператора Вольтера

$$\varepsilon u(t, \varepsilon) + \int_0^t a(t, s)u(s, \varepsilon)ds = h(t) \quad a(t, t) > 0, t \in [0, T].$$

$$a(t, s), h(t) \in C^\infty, h(0) = 0$$

В основу работы положены идеи, разработанные для данного типа уравнений С.А. Ломовым. Решение данной задачи имеет вид

$$u(t, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon} \varphi(t)} + z(t, \varepsilon),$$

где

$$\varphi(t) = \int_0^t a(s, s) ds$$

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t), z(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t)$$

при ε^0 соотношения для определения $x_0(t)$ и $z_0(t)$ имеют вид

$$\bar{a} z_0 + \int_0^t \dot{a} z_0(s) ds = \dot{h}(t), \bar{a} = a(t, t), \dot{a} = \partial a(t, s) / \partial t$$

$$z_0 = T^{-1} \left(\frac{\dot{h}(t)}{\bar{a}} \right),$$

где $T = I + \frac{1}{\bar{a}} \int_0^t \dot{a}(t, s) ds$ и задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_0 + \frac{\dot{a}(t, t)}{\bar{a}(t)} x_0 = 0 \\ x_0(0) = -z_0(0). \end{cases}$$

Начальные условия для задачи Коши при условии $h(0) = 0$ находятся из соотношения $x_0(0) + z_0(0) = 0$ при ε^n соотношения для определения $x_n(t)$ и $z_n(t)$ имеют вид

$$\bar{a}(t) z_n(t) + \int_0^t \dot{a}(t, s) ds + \dot{z}_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\bar{a}(s)} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \right)^k \left(\frac{\dot{a}(t, s)}{\bar{a}(s)} x_{n-k-1}(s) \right) \Big|_{s=0} = 0$$

или

$$z_n(t) = -T^{-1} \left(\frac{1}{\bar{a}(t)} \left(\dot{z}_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\bar{a}(s)} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \right)^k \left(\frac{\dot{a}(t, s)}{\bar{a}(s)} x_{n-k-1}(s) \right) \Big|_{s=0} \right) \right)$$

и задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_n - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{\bar{a}(s)} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \right)^k \left(\frac{\dot{a}(t,s)}{\bar{a}(s)} x_{n-k}(s) \right) \Big|_{s=t} = 0 \\ x_n(0) = -z_n(0). \end{cases}$$

В работе также доказана оценка остаточного члена.

Литература

1. Ломов С.А. "Введение в общую теорию сингулярных возмущений". Москва, Наука, 1981

О ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧКАХ НА КУБИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ МАРКОВА

Ермаков В.В. (Москва)

vikvve@rambler.ru

Рассмотрим кубическую поверхность Маркова:

$$V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz, x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

На этой поверхности действует дискретная группа преобразований G , свободно порожденная тремя преобразованиями t_1, t_2, t_3 : $t_1 : (x, y, z) \mapsto (3yz - x, y, z)$, $t_2 : (x, y, z) \mapsto (x, 3xz - y, z)$, $t_3 : (x, y, z) \mapsto (x, y, 3xy - z)$. Группа G имеет фундаментальную область V_0 [1]. В области V_0 нет G -эквивалентных точек, то есть таких точек, которые переводятся друг в друга с помощью каких-либо преобразований из G . В то же время $GV_1 = V$, где V_1 — замыкание V_0 .

Зададим на V_0 непрерывную метрику

$$ds = P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dx dz + R(x, y, z)dxdy$$

и продолжим ее непрерывным образом на всё V с помощью преобразований из группы G .

Пусть площадь области $D \subset V$ в этой метрике $S(D)$.

Теорема. Пусть $D \subset V$ — некоторая выпуклая область. $D_r = \{(x, y, z) \in V : (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}) \in D\}$. $N(D_r)$ — число точек с целочисленными координатами, принадлежащими области D_r . Тогда $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{S(D_r)}{N(D_r)} = S(V_0)$.

Литература

1. Ермаков В.В., "О группе преобразований, связанной с кубической поверхностью Маркова," *Математические заметки*, 19, No. 3, 419-428 (1976).

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА САФАРА ПРИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Еровенко В.А., Гулина О.В. (Минск)

erovenko@bsu.by, gulina_o@mail.ru

Пусть $\mathbf{B}(X)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих на X — бесконечномерном банаховом пространстве над полем комплексных чисел. Пусть $T \in \mathbf{B}(X)$ — линейный ограниченный оператор, действующий на банаховом пространстве X . Говорят, что оператор $T \in \mathbf{B}(X)$ имеет обобщенный обратный, если существует оператор $S \in \mathbf{B}(X)$ такой, что выполняется равенство $TST = T$. Обозначим через $N(T)$ ядро оператора T , а через $R^\infty(T) := \bigcap \{R(T^k) : k = 1, 2, 3, \dots\}$ — обобщенную область значений оператора T . Рассмотрим следующие два класса ограниченных линейных операторов, определенных на банаховом пространстве X :

$$\mathbf{S}(X) :=$$

$$:= \{T \in \mathbf{B}(X) : T \text{ имеет обобщенный обратный и } N(T) \subset R^\infty(T)\}$$

$$\mathbf{S}_e(X) :=$$

$$:= \{T \in \mathbf{B}(X) : T \text{ имеет обобщенный обратный и } N(T) \overset{e}{\subset} R^\infty(T)\}$$

Операторы класса $\mathbf{S}(X)$ называются регулярными, а класса $\mathbf{S}_e(X)$ — существенно регулярными.

Т е о р е м а. Пусть $T \in \mathbf{S}_e(X)$ — существенно регулярный оператор и возмущение $A \in \mathbf{B}(X)$ — оператор конечного ранга, тогда $T - A$ тоже существенно регулярный оператор, т.е. $T - A \in \mathbf{S}_e(X)$.

Для доказательства теоремы можно воспользоваться результатами, приведенными в работах [1, теорема 2], [2, следствие].

Вообще говоря, в формулировке теоремы нельзя заменить условие "существенно регулярный оператор" на "регулярный оператор" поскольку первый класс операторов шире второго из-за существенного вложения $N(T) \overset{e}{\subset} R^\infty(T)$, а не $N(T) \subset R^\infty(T)$. Для проверки этого утверждения приведем следующий пример.

К о н т р п р и м е р. Пусть $T = I$ — тождественный оператор на гильбертовом пространстве и пусть $A = P$ — одномерный ортогональный проектор. Тогда I — регулярный оператор, а

$I - P$ – нерегулярный, хотя и существенно регулярный оператор, т.к. $N(I - P) \not\subset R^\infty(I - P)$.

Рассмотренный выше класс операторов $S_e(X)$ порождает подмножество спектра, которое называется существенным спектром Сафара и определяется следующим образом:

$$\sigma_{es}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin S_e(X)\}.$$

С л е д с т в и е. Пусть $T \in B(X)$, тогда для возмущающих операторов конечного ранга $A \in B(X)$ справедливо равенство $\sigma_{es}(T - A) = \sigma_{es}(T)$.

Литература

1. Kordula V. The essential Apostol spectrum and finite-dimensional perturbations // Proc. Roy. Irish. Acad. 1996. Vol.96A, №1. P.105–109.
2. Koliha J.J., Mbekhta M., Müller V. Corrigendum and addendum: "On the axiomatic theory of spectrum II" // Stud. Math. 1998. Vol.130, №2. P.193–198.

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В МОДЕЛЯХ ГЛОБАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ В АТМОСФЕРЕ

Жидков А.А., Калинин А.В. (Нижний Новгород)

Artem.Zhidkov@gmail.com

При изучении широкого класса задач атмосферного электричества может быть применено квазистационарное электрическое приближение. В этом случае возможна замкнутая формулировка задачи об определении электрического потенциала $\varphi(x, t)$ ($t \in [0, T]$, $x \in \Omega$) в виде интегрального тождества, справедливого при всех $\psi \in V$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dx + 4\pi \int_{\Omega} \sigma (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dx = 4\pi \int_{\Omega} (\vec{J}^{ст} \cdot \nabla \psi) dx,$$

где область $\Omega = \{x \in R^3 : r_- \leq |x| \leq r_+\}$ — шаровой слой пространства R^3 , $\sigma(x)$ — существенно ограниченная функция, $\vec{J}^{ст} \in L_2(\Omega \times [0, T])$. $V = \{u \in W_2^1(\Omega) : u|_{|x|=r_-} = 0, u|_{|x|=r_+} = const\}$. Функция $\varphi(x, t)$ должна удовлетворять начальным и граничным условиям

$$\varphi|_{|x|=r_-} = 0, \quad \varphi|_{|x|=r_+} = C(t), \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0(x),$$

где $\varphi_0 \in V$, $C(t)$ — функция, подлежащая определению, при решении прямой задачи.

В работе доказывается теорема о корректности прямой задачи, представлены некоторые численные результаты [1] расчета электрического потенциала в заданной области.

Также в работе обсуждаются актуальные с физической точки зрения обратные задачи. В частности, рассматриваются задачи финального наблюдения, задачи об определении источников. При изучении этих задач используется регуляризация на основе двойственного метода [2].

Литература

1. Жидков А.А., Калинин А.В. Численное исследование задачи об определении электрических полей в квазистационарном электрическом приближении // VI Российская конференция по атмосферному электричеству. Сборник трудов. — Н. Новгород, 2007. — С.51–52.

2. Сумин М.И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2004. — Т. 41, №11. — С.2001–2019.

ВЛИЯНИЕ СТРАТИФИКАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СПЕКТР ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА ТЕОРИИ ДЛИННЫХ МГД-ВОЛН В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ Задорожный А.И. (Ростов-на-Дону)

simon@rsu.ru

Рассматривается плоская задача о малых свободных колебаниях тонкого слоя гравитирующей однородной вязкой несжимаемой жидкости бесконечной электрической проводимости, ограниченной снизу абсолютно твердым диэлектриком, а сверху — вакуумом. На систему наложено стационарное горизонтальное магнитное поле, являющееся переменным по вертикальной координате в заполненной жидкостью полосе и гладко сопрягающееся с постоянными по напряженности полями в подложке и вакууме. В такой постановке для амплитуды горизонтальной компоненты скорости $v_x(z, x, t) = U(z)\exp(ix - \lambda t)$ получается спектральная краевая

задача для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{1}{Rg}U''(z) + \left(\lambda + \frac{A(z)}{\lambda}\right)U(z) + \frac{1}{\lambda}\int_{-1}^0 U(z)dz = 0$$

с граничными условиями прилипания на дне $U(-1) = 0$ и обращения в нуль на свободной поверхности касательной компоненты тензора полных (вязких и магнитных) напряжений $U'(0) = 0$. Здесь λ — искомый спектральный параметр, Rg — гидродинамическое число (критерий) Рейнольдса, $A(z)$ можно назвать переменным критерием Альфвена. Например, при прохождении через жидкость в направлении перпендикулярном плоскости движения постоянного тока плотности γ будем иметь $A(z) = A_0(1 + \gamma z)^2$, где $A_0 = H_0^2/(\rho gh)$, — величина напряженности наложенного стационарного магнитного поля, ρ — плотность, g — гравитационная постоянная, h — глубина.

Принадлежность задачи к теории квадратичных операторных пучков [1] очевидна. Случай $A(z) = \text{const}$ рассмотрен в [2].

Сформулируем основные результаты. Спектр задачи дискретный, счетный и расположен в правой комплексной полуплоскости. При достаточно малых числах Рейнольдса он вещественный, то есть все моды апериодически затухают. Достаточным условием этого является, например, следующее $Rg \leq 1/\sqrt{1 + A_{\max}}$. Предельные точки спектра $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$ лежат на вещественной оси. Колебательных (немонотонных) режимов может быть лишь конечное число. Рождение пары комплексно сопряженных осциллятивных мод происходит при переходе через кратный вещественный корень, при этом наряду с собственной функцией имеется и присоединенная.

Асимптотически и численно исследовано влияние параметра γ .

Литература

1. Копачевский Н.В., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. М.: Наука. 1989. 416 с.
2. Задорожный А.И. Спектральные свойства длинных МГД-волн в вязкой жидкости. "Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании". Изд. ВГУ, 1993.

ПРИКЛАДНАЯ КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Зайцева И.В. (Ставрополь)

Как отмечается в [1], при решении дискретных оптимизационных задач эффективным является метод динамического программирования.

Используем данный метод для решения задачи нахождения рационального распределения отделов службы занятости между заявками по критерию — "Математическое ожидание числа обслуженных заявок с учетом их эффективностей" [1]. Обозначим параметр x_i — количество отделов службы занятости, определяемых для обслуживания i -ой заявки, поступающей от безработных. Установим различную эффективность (значимость) поступающих заявок и определим вероятность обслуживания заявок одним каналом службы занятости.

В работе, используя программный продукт "Служба занятости", находится оптимальное распределение отделов службы занятости методом динамического программирования.

Литература

1. Раскин Л. Г. Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. М.: "Советское радио", 1976 г.

НАБЛЮДАЕМОСТЬ ПО СОСТОЯНИЮ ЗА УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ¹

Знаменская Л.Н. (Долгопрудный)

lznam@lznam.pereslavl.ru

Пусть $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$. Рассмотрим колебания струны, которые описываются следующей краевой задачей

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Задача наблюдения. Найти начальное состояние (2) струны, процесс колебаний которой описывается уравнением (1), однородным

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-01-00279

ми краевыми условиями (3), по результатам наблюдения в некоторый момент времени t_1 , где $0 < t_1 < \ell/a$,

$$u(x, t_1) = w^1(x), \quad u_t(x, t_1) = w^2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (4)$$

Теорема. Задача наблюдения решается для следующих функций $w_1(x) \in C^2[0, \ell]$, $w_2(x) \in C^1[0, \ell]$ из (4) с дополнительными условиями $w_1(0) = w_1(\ell) = w_1'(0) = w_1'(\ell) = 0$, $w_2(0) = w_2(\ell) = 0$. При этом функции начального состояния (2) $\varphi(x) \in C^2[0, \ell]$ и $\psi(x) \in C^1[0, \ell]$ определяются формулами

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{w_1(c+x) - w_1(c-x) + \frac{\widehat{w}_2(c-x) - \widehat{w}_2(c+x)}{2a}}{w_1(x-c) + w_1(c+x) + \frac{\widehat{w}_2(x-c) - \widehat{w}_2(c+x)}{2a}}, & 0 \leq x \leq c; \\ \frac{\frac{w_1(x-c) - w_1(2\ell - c - x)}{2} + \frac{\widehat{w}_2(x-c) - \widehat{w}_2(2\ell - c - x)}{2a}}{w_1(x-c) + w_1(c+x) + \frac{\widehat{w}_2(x-c) - \widehat{w}_2(c+x)}{2a}}, & c \leq x \leq b; \\ \frac{\frac{w_1(x-c) - w_1(2\ell - c - x)}{2} + \frac{\widehat{w}_2(x-c) - \widehat{w}_2(2\ell - c - x)}{2a}}{w_1(x-c) + w_1(c+x) + \frac{\widehat{w}_2(x-c) - \widehat{w}_2(c+x)}{2a}}, & b \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

$$\frac{\psi(x)}{a} = \begin{cases} \frac{w_1'(c-x) - w_1'(c+x) - \frac{w_2(c-x) - w_2(c+x)}{2a}}{w_1(x-c) - w_1(x+c) + \frac{w_2(x-c) + w_2(x+c)}{2a}}, & 0 \leq x \leq c; \\ \frac{\frac{w_1'(x-c) - w_1'(2\ell - c - x)}{2} + \frac{w_2(x-c) - w_2(2\ell - c - x)}{2a}}{w_1(x-c) - w_1(x+c) + \frac{w_2(x-c) + w_2(x+c)}{2a}}, & c \leq x \leq b; \\ \frac{\frac{w_1'(x-c) - w_1'(2\ell - c - x)}{2} + \frac{w_2(x-c) - w_2(2\ell - c - x)}{2a}}{w_1(x-c) - w_1(x+c) + \frac{w_2(x-c) + w_2(x+c)}{2a}}, & b \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

где $c = at_1$, $b = \ell - c$ и $\widehat{w}_2(x)$ — первообразная функции $w_2(x)$.

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КОНТРОЛЬНЫХ ТОЧЕК

Зубова С.П., Ле Хай Чунг (Воронеж)

trungbvnvr@yahoo.com

Известен ([1]) критерий полной управляемости системы

$$A \frac{dx}{dt} = Bx(t) + Du(t) \quad (1)$$

с условиями:

$$x(0) = x^0, x(T) = x^T, \quad (2)$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$; $A, B \in L(R^n, R^l)$, $D \in L(R^m, R^l)$, $t \in [0, T]$.

Разработан ([2]) метод построения функции состояния системы $x(t)$ и функции управления $u(t)$ в виде многочленов по степеням t с векторными коэффициентами для системы (1), (2) с $A \in L(R^n, R^n)$, $A = I$ с условием прохождения "траектории" $x(t)$ через контрольную точку (t_1, x^{t_1}) , где $0 < t_1 < T$.

Здесь рассматривается задача построения $x(t)$ и $u(t)$ в виде многочленов по t для полностью управляемой системы (1), (2) с условием "прохождения" $x(t)$ через произвольное (конечное) количество контрольных точек (t_i, x^{t_i}) , $i = \overline{1, k}$, $0 < t_1 < \dots < t_k < T$, то есть

$$x(t_i) = x^{t_i}. \quad (3)$$

Доказывается

Теорема. Существует функция состояния $x(t)$ системы (1) с условиями (2), (3) в виде многочлена по степеням t с векторными коэффициентами порядка $(k+2)(p+1) - 1$ и функция управления $u(t)$ в виде многочлена степени не выше $(k+2)(p+1) - 1$, где $p = \min q$, а q равно минимальному количеству матриц в матрице управляемости для уравнения (1), полученной в [1].

Дается способ построения $u(t)$ и $x(t)$.

Литература

[1]. Раецкая Е.В. Условная управляемость и наблюдаемость линейных систем. Дисс.канд.-физ.-мат. наук. Воронеж, 2004.

[2]. Ле Хай Чунг, Зубова С.П. О полиномиальных управлениях линейной стационарной системой с контрольной точкой. Современные проблемы механики и прикладной математики. Сборник трудов международной школы-семинара. Воронеж. 2007. - с. 133-136.

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ СОСТОЯНИЯ И ВЫХОДА СИСТЕМЫ НАБЛЮДЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Зубова С.П., Раецкая Е.В. (Воронеж)

raetskaya@inbox.ru

Полностью наблюдаемая по выходу динамическая система

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = B\bar{x}(t) + f(t) \\ f(t) = A\bar{x}(t), \end{cases} \quad (1)$$

где $\bar{x}(t), F(t) \in R^n, B, A$ — матрицы соответствующих размеров, $t \in [0, \infty)$, возмущается с помощью матричных операторов C и D и числовых параметров ε и λ .

Требуется заменить входную функцию $F(t)$ функцией $G(t, \varepsilon, \lambda)$ так, чтобы возмущенная система осталась поностью наблюдаемой по выходу, и состояние систем $\bar{x}(t)$ и выходная функция $f(t)$ остались неизменными. То есть найти $G(t, \varepsilon, \lambda)$ такое, что $\bar{x}(t)$, определяемое системой (1), совпадает с $x(t)$, определяемым системой

$$\begin{cases} (I + \varepsilon CA)\dot{x} = (B + \lambda DA)x(t) + G(t, \varepsilon, \lambda) \\ f(t) = Ax(t). \end{cases} \quad (2)$$

Справедлива

Теорема. Если

$$G(t, \varepsilon, \lambda) = \varepsilon C \dot{f}(t) + \lambda D f(t), \quad (3)$$

то система (2) полностью наблюдаема по выходу и $x(t) = \bar{x}(t)$.

То есть: для того, чтобы состояние системы наблюдения не зависело от возмущений εCA и λDA , и на выходе получался прежний результат $f(t)$, достаточно заменить входную функцию $F(t)$ на функцию $G(t, \varepsilon, \lambda)$, определяемую формулой (3).

Литература

Зубова С.П., Раецкая Е.В. Построение управления для полной наблюдаемости одной динамической системы// Математические методы и приложения. Труды XVI математических чтений РГСУ. - Москва, 2007. - С. 49-53.

НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА В ПРОСТРАНСТВЕ L_2 НА ОТРЕЗКЕ $[-1,1]$ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ВЕСОМ

Иванов В.И., Иванов А.В. (Тула), Liu Yongping (Beijing)

ivaleryi@mail.ru, ypliu@bnu.edu.cn

Пусть $\alpha \geq -1/2$, $\lambda \geq 0$, $P_{-1/2+i\lambda}^{-\alpha}(z)$ — функция Лежандра первого рода, $\varphi_{\lambda}^{\alpha}(x) = c_{\alpha} P_{-1/2+i\lambda}^{-\alpha}(\operatorname{ch} x) / \operatorname{sh}^{\alpha} x$, $\varphi_{\lambda}^{\alpha}(0) = 1$, $d\nu_{\alpha}(x) = |\operatorname{sh} x|^{2\alpha+1} dx$, $L_{2,\alpha}[-1,1]$ — гильбертово пространство со скалярным произведением $(f, g)_{\alpha} = \int_{-1}^1 f(x)g(x)d\nu_{\alpha}(x)$, $\|f\|_{2,\alpha} = \sqrt{(f, f)_{\alpha}}$.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$(\operatorname{sh}^{2\alpha+1} xy'(x))' + (\lambda^2 + (\alpha + 1/2)^2) \operatorname{sh}^{2\alpha+1} xy(x) = 0, \quad y'(0) = y(1) = 0.$$

С ней связана полная ортогональная система в $L_{2,\alpha}[0, 1]$ собственных четных функций $\{\varphi_{\lambda_k}^\alpha(x)\}_{k=1}^\infty$ ($0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k < \dots$, $\varphi_{\lambda_k}^\alpha(1) = 0$). Тогда $\{\varphi_k(x) = \varphi_{\lambda_k}^\alpha, \psi_k(x) = \varphi_{\lambda_k}'(x)\}_{k=1}^\infty$ — полная ортогональная система в $L_{2,\alpha}[-1, 1]$.

Для $f \in L_{2,\alpha}[-1, 1]$, $f(x) = \sum_{k=1}^\infty (a_k \varphi_k(x) + b_k \psi_k(x))$ — ее ряд Фурье, $E_n(f)_{2,\alpha}$ — величина наилучшего приближения полиномами по $\{\varphi_k, \psi_k\}_{k=1}^n$, $T^t f(x) = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k(t)(a_k \varphi_k(x) + b_k \psi_k(x))$ — оператор обобщенного сдвига.

Его интегральное представление при $\alpha > -1/2$ имеет вид

$$T^t f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^\pi \{f(\theta)(1+\theta'_x) + f(-\theta)(1-\theta'_x)\} \sin^{2\alpha} \varphi d\varphi,$$

где $\operatorname{ch} \theta = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} t \cos \varphi$, $|\theta'_x| \leq 1$.

В интегральном представлении используется естественное продолжение функции $f(x)$ с отрезка $[-1, 1]$ на всю прямую, описываемое в следующей теореме.

Теорема 1. Для любых $\alpha \geq -1/2$, $a > 1$ и любой $f \in L_{2,\alpha}[-1, 1]$ ее ряд Фурье сходится в $L_{2,\alpha}[-a, a]$.

Для $f \in L_{2,\alpha}[-1, 1]$ определим модуль непрерывности

$$\omega(\delta, f)_{2,\alpha} = \sup \left\{ \left\| (E - T^t)^{1/2} f(x) \right\|_{2,\alpha} : |t| \leq \delta \right\}.$$

Пусть τ_{n+1} — наименьший положительный нуль $\varphi_{n+1}(x)$.

Теорема 2. Для любого $\alpha \geq -1/2$ и любой $f \in L_{2,\alpha}[-1, 1]$ справедливо точное неравенство

$$E_n(f)_{2,\alpha} < \omega(2\tau_{n+1}, f)_{2,\alpha}.$$

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ КЛАССА Γ_α^{*1} Иохвидов Е.И. (Воронеж)

Определение 1. Будем говорить, что линейный оператор A , действующий в пространстве Крейна $H = H_+ \oplus H_-$, где $H_\pm = P_\pm H$, а

¹Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203

P_+ и P_- - взаимно-дополнительные ортопроекторы, принадлежащий классу Γ_α ($\alpha \geq 0$), если выполнено условие:

$$\|P_+Ax\|^2 - \alpha\|P_-Ax\|^2 \leq \alpha \cdot \|P_+x\|^2 - \|P_-x\|^2 \quad \forall x \in D_A.$$

Определение 2. Через N_λ ($\lambda \geq 0$) будем обозначать семейство "горизонтальных" конусов, определяемых формулами:

$$N_\lambda = \{x \in H \mid \|P_-x\|^2 \leq \lambda \cdot \|P_+x\|^2\}.$$

Основные результаты.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) $A \in \Gamma_\alpha$, 2) $R_A \subset N_\lambda$, 3) $\alpha \cdot \lambda < 1$.

Тогда операторы P_+A , P_-A и A являются ограниченными, при этом имеют место следующие оценки:

$$\|P_+A\| \leq \sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha\lambda}}, \quad \|P_-A\| \leq \sqrt{\frac{\alpha\lambda}{1-\alpha\lambda}},$$

$$\|A\| \leq \sqrt{\frac{\alpha(1+\lambda)}{1-\alpha\lambda}}.$$

Построен также пример J -изометрического оператора A ($J = P_+ - P_-$), который определен на плотном в H_+ линейале, для которого множество значений R_A является положительным линейалом, однако все три оператора: P_+A , P_-A и A являются неограниченными. Таким образом, здесь мы имеем случай

$$\alpha = 1, \quad \lambda = 1,$$

поэтому построенный пример показывает, что условие 3) в теореме 1 является существенным.

Следствие 1. Всякий J -нерастягивающий оператор, у которого множество значений равномерно положительно, является ограниченным (случай $\alpha = 1$, $\lambda < 1$).

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МГД ТЕЧЕНИЕМ ГАРТМАНА

Ишмухаметов А.З., Цыба В.Е. (Москва)

tsiba-vl@yandex.ru

В работе рассматривается задача оптимального управления для модели одномерного магнитогидродинамического течения между параллельными плоскостями (течение Гартмана). Такое течение описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\dot{u} - \nu u_{xx} = -f + \beta B_x, \quad (1)$$

$$\dot{B} - \nu_m B_{xx} = \beta u_x, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (3)$$

$$B|_{x=0} = 0, \quad B|_{x=1} = 0, \quad B|_{t=0} = B_0(x). \quad (4)$$

Здесь u - скорость течения, B - магнитная индукция, f - перепад давления на единицу длины канала, β - индукция внешнего магнитного поля. Остальные параметры являются физическими константами, определяющими свойства среды.

Задача управления состоит в нахождении функции $\beta(t)$ такой, что функционал

$$J(\beta) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u|_{t=T} - u_D)^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_0^T \beta^2 dt, \quad \beta \in U_{ad} \subset L^2(0, T), \quad (5)$$

принимает минимальное значение на решениях системы (1) – (4). Здесь $u_D = u_D(x)$ – заданная функция, U_{ad} – множество допустимых управлений, $\lambda \geq 0$.

Для поставленной задачи доказывается разрешимость и выводится система оптимальности. На основе системы оптимальности доказываются теоремы о структуре множества решений.

ТЕОРЕМА. Если $\lambda > C_1$, то система оптимальности задачи (1)-(5) имеет единственное решение.

ТЕОРЕМА. Если $\lambda > C_2 J_0$, тогда задача (1)-(5) имеет конечное число решений.

Здесь C_1, C_2 - константы, зависящие от функции f и начальных данных u_0 и B_0 ; J_0 - значение функционала (5) при $\beta = 0$.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005, 656с.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 412 с.
3. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972, 587 с.
4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 480 с.
5. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999, 350 с.
6. Ишмухаметов А.З. Методы решения задач оптимизации. М.: МЭИ, 1998
7. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФфуЗИИ С ПОМОЩЬЮ КОММУТИРУЮЩЕЙ ОПЕРАТОРНОЙ СТРУКТУРЫ

Ищенко В.М. (Ставрополь)

ishchenko_vm@mail.ru

Рассмотрим одномерный случай нелинейного уравнения диффузии [1]

$$\gamma q_x + k(\ln q)_{xx} = q_t, \quad (1)$$

где $q(x, t)$ — функция, γ, k — const.

Теорема Если в уравнении (1) функция $q(x, t)$ стремится к нулю вместе со всеми своими производными, $\frac{q_x}{q} \rightarrow \mp c$ (c - const) при $x \rightarrow \pm\infty$ соответственно, собственные значения μ соответствующего операторного представления [1] вещественны, то уравнение (1) имеет

решение вида

$$q = \begin{cases} \begin{cases} -\frac{ikch_1 \exp[-c(x+(\gamma+i)t)]}{1+h_1 \exp[-c(x+(\gamma+i)t)]}, & \text{если } (x+(\gamma+i)t) \geq -\frac{1}{c} \ln \frac{1+\sqrt{2}}{h_1}, \\ -\frac{ikc \exp[c(x+(\gamma+i)t)]}{h_1 - \exp[c(x+(\gamma+i)t)]}, & \text{если } (x+(\gamma+i)t) < -\frac{1}{c} \ln \frac{1+\sqrt{2}}{h_1}; \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{ikch_2 \exp[-c(x+(\gamma-i)t)]}{1-h_2 \exp[-c(x+(\gamma-i)t)]}, & \text{если } (x+(\gamma-i)t) \geq -\frac{1}{c} \ln \frac{-1+\sqrt{2}}{h_2}, \\ -\frac{ikc \exp[c(x+(\gamma-i)t)]}{h_2 + \exp[c(x+(\gamma-i)t)]}, & \text{если } (x+(\gamma-i)t) < -\frac{1}{c} \ln \frac{-1+\sqrt{2}}{h_2}, \end{cases} \end{cases}$$

где $h_{1,2} - \text{const}$ и знак „+“ или „-“ выбирается под знаком логарифма в зависимости от знака постоянной $h_{1,2}$ так, чтобы подлогарифмическое выражение было положительным.

В доказательстве используется теорема Лакса [2].

Литература

1. В.М. Ищенко, Т.В. Редькина. Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. - Воронеж: ВГУ, 2005. С. 195–196.

2. П.Д. Лакс. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. - Математика, 13:5 - М.: Мир, 1969. С. 128–150.

УСТОЙЧИВОСТЬ, КОЛЕБАНИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Кабельков А.Н., Кабельков В.А., Нефедов В.В.

(Новочеркасск)

Получены уравнения движения системы деформируемых тел, подверженных действию неконсервативных нагрузок. Вариационными методами эти уравнения сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{v}, t)\mathbf{X} + \mathbf{N}(\mathbf{v}, \mathbf{X}), \quad (1)$$

где $\mathbf{X}$ - вектор состояний; $\mathbf{v}$ - вектор параметров, характеризующих систему; $\mathbf{N}$ - нелинейная вектор-функция.

Условия возбуждения колебаний, отвечающих от основного состояния $\mathbf{X} = 0$, получаем на основе дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{v}, t)\mathbf{X}. \quad (2)$$

Способы расчета критических значений $v_{кр}$ параметров, соответствующих поверхностям раздела областей устойчивости и неустойчивости основного состояния, зависят от вида матрицы **A** (метод замороженных коэффициентов, теория Флоке, метод бесконечных определителей).

Периодические решения, отвечающие от основных состояний в окрестностях критических значений параметров, находим на основе модифицированного метода Ляпунова-Шмидта [1,2].

Для подавления колебательных режимов или ограничения их амплитуд подключаем систему активного гашения с добавлением средств измерения. С учетом малости колебаний управляемая и наблюдаемая система описывается уравнениями

$$\dot{X} = A(v, t)X + B_G G, \quad (3)$$

$$Z = CX,$$

где **G**- вектор управляющих воздействий, **Z** - вектор измерений.

Оптимальные управления определяем с использованием квадратичного функционала качества

$$2\Phi = \int_{t_1}^{t_2} (X^* V_1 X + G^* V_2 G) dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

С использованием описанной методики решены задачи нахождения оптимальных управлений различных роботов-манипуляторов и высотных сооружений.

Литература

1. Воронцов Г.В., Кабельков А.Н. Применение метода Ляпунова-Шмидта к исследованию устойчивости и автоколебаний сложных механических систем // Прикл. механика. - 1983. - Т.19, N12.-С. 102-109.
2. Кабельков А.Н., Кабельков В.А., Нефедов В.В., Федий В.С. Применение метода Ляпунова-Шмидта к расчету параметрических колебаний вязкоупругих систем // Современные проблемы механики сплошной среды: тр. 8-й междунар. конф., Ростов н/Д, 1-16 октября 2002 г. - Ростов н/Д, 2003.- Т.2.-С. 104-109.

К ВЫВОДУ ТЕОРЕМ О СВОЙСТВАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Кадченко А.И. (Магнитогорск)

kadchenko@masu.ru

Алгоритмизационный подход в методе векторных функций Ляпунова, примененный в системах, описываемых дифференциальными и дифференциально-разностными уравнениями, привел Матросова В.М., Васильева С.Н. и Анапольского Л.Ю. к методу сравнения с алгоритмом вывода теорем сравнения по формулам динамических свойств с унификацией их представлений. Унифицированное представление формул не предполагает с необходимостью, что эти формулы принадлежат языку исчисления предикатов, формальной аксиоматической теории множеств или какой-нибудь другой формальной теории. Заключительные формулы и типовые условия квантифицируемых переменных могут являться выражениями общепринятого математического языка. Кроме того, алгоритмизация и автоматизация получения формулировок теорем и их доказательств предполагают представление формул в виде, допускающем их эффективную расчленимость на некоторые элементы. Другим методом, развивающим алгоритмы вывода теорем метода векторных функций Ляпунова, является метод редукции, предложенный Васильевым С.Н. Это логический метод формулировки гипотез. В отличие от метода сравнения, он позволяет формализовать независимо от предметной области определенную технику получения гипотез и имеет индуктивный метод обоснования своей корректности. Из теоретических обоснований метода следует, что конструируемое формальное решение будет заведомо истинным. В методе редукции, примененном к задачам динамики управления, условие связи может иметь разнообразный смысл, но оно обязательно связывает поведение некоторых отображений типа векторных функций сравнения на процессах исходной и вспомогательных систем.

В системе движений с управлениями исследовано некоторое свойство достижимости целевого множества из любого начального состояния с соблюдением фазовых ограничений до момента попадания и получены теоремы методом редукции, выражающие достаточные условия наличия свойства в системе движений с управлениями.

НАХОЖДЕНИЕ ПОПРАВОК ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Кадченко С.И. (Магнитогорск)

kadchenko@masu.ru

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор T и ограниченный оператор P , заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ - собственные числа оператора T , занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, а $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ - его ортонормированные собственные функции, соответствующие этим собственным числам. Допустим, что кратность собственного числа μ_n оператора T равна ν_n . Обозначим через n_0 количество всех неравных друг другу собственных чисел μ_n оператора T , которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \frac{|\mu_{n_0+1} + \mu_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ - собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Если для всех $n \geq n_0$, для которых $\mu_n \neq \mu_{n-1}$ выполняются неравенства $q = \frac{2\|P\|}{|\mu_n + \nu_n - \mu_n|} < 1$, то первые $m_0 = \sum_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственные числа $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $T + P$ являются решениями системы нелинейных уравнений

$$\sum_{n=1}^{m_0} \beta_n^p = \sum_{n=1}^{m_0} \mu_n^p + \sum_{k=1}^{m_0} \alpha_n^{(p)}(m_0), p = \overline{1, m_0}.$$

Здесь $\alpha_n^{(p)}(m_0) = \frac{(-1)^n p}{2\pi n i} S_p \int_{T_{n_0}} \mu^{p-1} [PR_{\mu}(T)]^n d\mu$ - n -тые поправки теории возмущений оператора $T + P$ целого порядка p , $R_{\mu}(T)$ - резольвента оператора T .

В работе разработан новый, вычислительно эффективный метод, позволяющий с необходимой точностью находить суммы $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n^{(p)}(m_0)$ числовых рядов Релея-Шредингера. Проведенные численные эксперименты показали его надежность и эффективность.

МЕТОД ДВОЙСТВЕННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗАДАННОЙ КОНФИГУРАЦИИ¹

Калинин А.В., Климов А.В., Сумин М.И.

(Нижний Новгород)

msumin@nn.ru

Методы создания электромагнитных полей заданной конфигурации играют важную роль в решении различных прикладных задач. В квазистационарном магнитном приближении уравнение для определения напряженности магнитного поля может быть записано в виде:

$$\frac{4\pi\mu\sigma}{c} \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} H(x, t) = \frac{4\pi\sigma}{c} \operatorname{rot} E^{\text{ср}}(x, t),$$

$$\operatorname{div} H(x, t) = 0, [H(x, t)]_{\tau} = 0, x \in \partial\Omega, H(x, t)|_{t=0} = H_0(x), x \in \Omega,$$

$$H(x, t_{\text{фикс}}), E^{\text{ср}}(x, t_{\text{фикс}}) : \Omega \rightarrow R^3, \Omega \subset R^3, \mu, \sigma - \text{const} > 0,$$

где H - вектор напряженности магнитного поля, $E^{\text{ср}}$ - вектор-функция, описывающая сторонние источники электрического поля; c - скорость света в вакууме, μ - магнитная проницаемость среды, σ - удельная проводимость среды. В докладе вводится понятие обобщенного решения $H[E^{\text{ср}}](x, t)$ задачи (1), соответствующего источнику поля $E^{\text{ср}}$, и доказываются теоремы его существования и единственности в классе $\{V_2^{1,0}(Q_T)\}^3$.

Обратная задача создания электромагнитного поля заданной конфигурации заключается в нахождении источника поля $E^{\text{ср}}$, при котором электромагнитное поле будет иметь в момент времени $t = T$ заданную конфигурацию $H(x, T) \equiv \bar{H}(x)$. Для ее решения предлагается использовать алгоритм двойственной регуляризации [1]. При этом обратная задача записывается в виде уравнения первого рода на паре соответствующих гильбертовых пространств и ищется минимальный по норме источник поля.

Литература

1. Сумин М.И. *Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44. – № 11. – С. 2001–2019.

¹Работа поддержана грантом РФФИ (код проекта 07-01-00495)

О СПЕКТРЕ И ЧАСТЯХ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА РОМАНОВСКОГО МНОГОСВЯЗНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Калитвин А.С. (Липецк)

kalitvin@mail.ru

К интегральному уравнению $\lambda u = \Phi u + f$, где $u = u(x_1, \dots, x_n)$, $f = f(x_1, \dots, x_n)$, $\Phi u = \int_a^b \varphi(t, x_1, \dots, x_n) u(t, x_1, \dots, x_{n-1}) dt$, а интеграл понимается в смысле Лебега, приводятся некоторые задачи цепей Маркова, в которых вероятности различных значений случайной величины X в каком-нибудь опыте зависят от значений X в n предыдущих опытах ($n \geq 2$). При $n = 2$ эти цепи были названы В.И. Романовским двусвязными, а при $n > 2$ – многосвязными. Разрешимость и свойства решений уравнения $\lambda u = \Phi u + f$ в выбранном пространстве зависят от свойств оператора Φ в этом пространстве. Характерная особенность оператора Φ связана с циклической перестановкой $(x_1, \dots, x_{n-1}, t) \rightarrow (t, x_1, \dots, x_{n-1})$ переменных у функции u под знаком интеграла и последующим интегрированием по одной из n переменных. Ненулевой оператор Φ не является компактным в пространстве $C = C(D)$ непрерывных на $D = [a, b]^n$ функций и в пространствах $L^p = L^p(D)$ ($1 \leq p \leq \infty$). Поэтому представляют интерес свойства спектра и частей спектра оператора Φ в этих пространствах. Напомним, что дополнение до множества n - нормальности, d - нормальности, нётеровости, фредгольмовости, множества изолированных собственных чисел конечной кратности называется существенным спектром в смысле Густавссона-Вайдмана, Вольфа, Шехтера, Браудера и обозначается через σ_+ (σ_-), σ_{ew} , σ_{es} , σ_{eb} соответственно.

Пусть $L^1 = L^1([a, b])$, а $C(L^1)$ – пространство непрерывных на D вектор-функций $\varphi(t, \cdot, \dots, \cdot)$ со значениями в L^1 .

Теорема. Если функция φ измерима на $D \times [a, b]$ и выполнено одно из условий: а) $X = C(D)$, $\varphi \in C(L^1)$; б) $X = L^p(D)$ ($1 < p < \infty$), $\|\cdot\|_{q,t} \|\varphi\|_{q,t} \|_{\infty, x_1, \dots, x_{n-1}} \|_{p, x_n} < \infty$ или $\|\cdot\|_{q,t} \|\varphi\|_{p, x_n} \|_{\infty, x_1, \dots, x_{n-1}} \|_{q,t} < \infty$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, а записи $\|\cdot\|_{q,t}$, $\|\cdot\|_{p, x_n}$ и $\|\cdot\|_{\infty, x_1, \dots, x_{n-1}}$ означают, что норма функции вычисляется в L^q , L^p и L^∞ по переменным t , x_n и $x_1, \dots, x_{n-1}$ соответственно, то в пространстве X спектр оператора Φ не более, чем счетное множество, единственной предельной точкой которого может быть только число

0, ненулевые точки спектра – собственные числа конечной кратности, а $\sigma_a(\Phi) = \{0\}$, где $a \in \{+, -, ew, es, eb\}$.

Литература

1. Romanovsky V. Sur une classe d'équations intégrales linéaires // Acta Mathematica. – 1932. V. 59. – P. 99-208
2. Романовский В.И. Избранные труды. Т. 2: Теория вероятностей, статистика и анализ. – Ташкент: Наука, 1964. – 390с.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА SCILAB

Калитвин В.А. (Липецк)

kalitvin@mail.ru

К интегральным уравнениям Вольтерра с частными интегралами приводятся некоторые задачи теории изгиба тонких пластинок, теории упругих оболочек, дифференциальных уравнений с частными производными [1]. Найти решения таких уравнений в замкнутом виде не представляется возможным, поэтому важное значение имеют приближенные и численные методы их решения.

В заметке рассматривается численное решение уравнения
$$x(t, s) = \int_0^t l(t, s, \tau) x(\tau, s) d\tau + \int_0^s m(t, s, \sigma) x(t, \sigma) d\sigma + f(t, s), \quad (1)$$
 где $(t, s) \in D = [0, 1] \times [0, 1]$, а l, m, f – заданные непрерывные функции. Оператор K , определяемый первыми двумя слагаемыми правой части уравнения (1), непрерывен в пространстве $C(D)$ непрерывных на D функций и его спектральный радиус равен нулю. Поэтому уравнение (1) имеет единственное решение в $C(D)$ и его можно получить методом итераций.

При численном решении уравнения (1) отрезок $[0, 1]$ разбивается на равные части точками $t_k = s_k = k \cdot h$, где $h = 1/n, k = 1, \dots, n$, а интегралы вычисляются с применением квадратурных формул. При этом уравнение (1) заменяется системой линейных алгебраических уравнений с нулевым спектром у оператора системы. Тогда эта система имеет единственное решение $\tilde{x}(t_i, s_j)$ ($i, j = 1, \dots, n$), причем $\max_{1 \leq i, j \leq n} |x(t_i, s_j) - \tilde{x}(t_i, s_j)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где $x(t_i, s_j)$ – значения решения уравнения (1) в точках (t_i, s_j) ($i, j = 1, \dots, n$). Алгоритмы численного решения уравнения (1) легко реализуются в пакете Scilab и дают достаточно хорошие результаты. Например, при использовании формулы левых прямоугольников для вычисления интегралов

получается система

$$x(t_i, s_j) = \sum_{k=0}^{i-1} l(t_i, s_j, \tau_k) x(\tau_k, s_j) + \sum_{k=0}^{j-1} m(t_i, s_j, \sigma_k) x(t_i, \sigma_k) + f(t_i, s_j),$$

решение которой находится последовательно, при $i = j = 0$, $i = 0$ и $j = 1, \dots, n$, $j = 0$ и $i = 1, \dots, n$, затем при $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, n$.

Литература

1. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000. — 252 с.

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СИММЕТРИЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ¹

Карулина Е.С. (Москва)

KarulinaES@yandex.ru

Рассматривается следующая задача Штурма – Лиувилля:

$$y''(x) - q(x)y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{cases} y'(0) - k^2 y(0) = 0, \\ y'(1) + k^2 y(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $q(x)$ — неотрицательная ограниченная на $[0, 1]$ функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_0^1 q^\gamma(x) dx = 1, \quad \gamma \neq 0. \quad (3)$$

Множество таких функций $q(x)$ обозначим A_γ .

Оценивается минимальное собственное значение λ_1 этой задачи при различных значениях γ и k . Пусть $m_\gamma = \inf_{q(x) \in A_\gamma} \lambda_1$, $M_\gamma =$

$\sup_{q(x) \in A_\gamma} \lambda_1$. Тогда имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. При всех $k \neq 0$:

- 1) если $\gamma \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, то $M_\gamma = +\infty$;
- 2) если $\gamma \geq 1$, то $M_\gamma \leq 2k^2 + 1$.

Теорема 2. 1) Если $k = 0$, $\gamma \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, то $m_\gamma = 0$.
При всех $\gamma \neq 0$: 2) если $0 < k^2 < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, то $m_\gamma \geq \frac{k^2}{2k^2+2}$;

¹Работа выполнена при поддержке гранта НШ-1698.2008.1

3) если $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} < k^2 < \frac{\pi}{2}$, то $m_\gamma > k^4$;

4) если $k^2 = \pi/2$, то $m_\gamma \geq \pi^2/4$ и если $k^2 > \pi/2$, то $m_\gamma > \pi^2/4$.

Замечание. Задача для уравнения $y'' + \lambda q(x)y(x) = 0$ при условиях $y(0) = y(1) = 0$, (3) рассматривалась в работе [1]. Задача для уравнения (1) при условиях $y(0) = y(1) = 0$, (3) изучалась в работе [2].

Литература

1. Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. *On Spectral theory of elliptic operators* // in Operator theory: Advances and Applications. Birkhäuser. – 1996. – V.89. – P. 1-325.

2. Ежак С.С. *Об оценках минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с интегральным условием* // Современная математика и ее приложения. – 2005. – т.36. – с.56-69.

СХЕМА ФРИДРИХСА ДЛЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Касымбекова А.С. (Алматы)

kasarnay@mail.ru

В работах В. М. Шалова в терминах гильбертова пространства показана возможность распространения вариационного принципа на широкий класс несамосопряженных уравнений. В области $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область с границей Γ , $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ рассматривается задача

$$u_{tt} - Au = f \text{ на } Q, \quad u(x, 0) = u_0, \quad u_t(x, 0) = u_1 \text{ на } \Omega, \quad (1)$$

где $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $D(-A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Проводя "параболическую регуляризацию" исходную задачу можно записать в следующем виде:

$$L(t)\vec{u} \equiv \Lambda \vec{u} + M_\varepsilon \vec{u} = \{0, g\}, \quad \vec{u}(0) = \{u_0, u_1\}, \quad (2)$$

где $\vec{u} = \{u, \frac{du}{dt}\}$, $g = \exp(-kt)f$, $\Lambda = \frac{d}{dt} + \mu I$, $M_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda I & -I \\ A(t) & \varepsilon(A(t) + \lambda I) + \lambda I \end{pmatrix}$, k, λ, μ — числа [1]. При выполнении некоторых предположений данная постановка задачи дает возможность применения вариационного принципа [2].

Теорема. В силу предположений 1, 2 существует расширение C_e по Фридрихсу оператора $C\vec{u} \equiv \{L\vec{u}, \vec{u}(x, 0)\}$, для которого уравнение $C_e\vec{u} = q$, $q \equiv \{f, \vec{u}(x, 0)\}$ является уравнением Эйлера для функционала $J(u) = \|\vec{u}\|^2 - 2((q, B\vec{u}))$, где B — симметризирующий оператор [2].

Литература

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М. Мир, 1971. — 371 с.
2. Шалов В.М. Решение несамосопряженных уравнений вариационным методом // Докл. АН СССР. — 1963. — Т.151, № 3. — С. 511–512.

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ В НЕГОМОГЕННОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С ЛИНЕЙНО-ОДНОРОДНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ ФАКТОРОВ ВЕЩЕСТВЕННОГО И ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА

Кетова К.В. (Ижевск)

ketova_k@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления макроэкономической системой в непрерывном времени в негомогенной постановке [1]. В модели критериальный функционал есть интегральное удельное дисконтированное потребление. Размеры выпуска определяются производственной функцией типа функции Кобба-Дугласа, характеризующей изменение валового регионального продукта в зависимости от величины вещественного и человеческого капитала [2]. Ежегодно ВРП распределяется на три составляющие: расширение основных производственных фондов, развитие человеческого капитала и потребление. Доли инвестирования есть управляющие переменные задачи.

Рассматривается случай линейно-однородной производственной функции, когда квазистационарной траектории [1] не существует, а имеет место траектория оптимального сбалансированного роста, которая определяется соотношением факторов производства экономической системы.

Определение оптимального управления сводится к решению линейной задачи математического программирования. Строится систе-

ма, которая позволяет рассчитать траекторию в каждый момент времени. Для обеспечения сходимости в начальной точке кривой процесс вычисления приближений (решение задачи Коши) производится в прямом и обратном направлении поочередно.

Литература

1. Русяк И.Г., Кетова К.В., Сабирова О.Р. Построение оптимального управления в неомогенной конечномерной макроэкономической модели, обладающей квазиматриалью // Анализ и моделирование экономических процессов / Сборник статей под ред. В.З.Беленького. Выпуск 4 - М.: ЦЭМИ РАН, 2007. - С.83-98.

2. Русяк И.Г., Кетова К.В. Построение производственной функции экономической системы региона с учетом человеческого капитала // Вестник МГУ, серия "Экономика № 3, 2008.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕПЛОВОГО ВЗРЫВА

Китаева Е.В. (Самара)

el_kitaeva@mail.ru

Рассматривается математическая модель задачи о тепловом взрыве

$$\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \eta e^{\theta} + \frac{1}{\delta} D_{\xi} \theta, \quad \varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = -\varepsilon \eta e^{\theta} + \frac{1}{\rho} D_{\xi} \eta, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \theta \Big|_{\xi=1} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad \theta \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \eta \Big|_{\tau=0} = 1, \quad (2)$$

$$D_{\xi}(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \xi^2} + \frac{n}{\xi} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi}, \quad n = 0, 1, 2.$$

Здесь θ — безразмерная температура, η — безразмерная концентрация, τ — безразмерное время. ε и β , малые положительные параметры, δ — скалярный параметр, характеризующий начальное состояние системы. Значение параметра δ , отделяющее медленные режимы от взрывных, называется критическим.

Особенностью данной задачи является то, что соответствующий искомому критическому значению параметра δ режим описывается медленным интегральным многообразием, неустойчивым как в прямом, так и в обратном времени. Этот режим не может быть найден

обычными численными методами в прямом времени из-за численной неустойчивости, а расчеты в обратном времени требуют решения некорректной обратной эволюционной задачи на асимптотически большом промежутке времени.

В докладе предлагается итерационный метод [1], суть которого состоит в подавлении части компонент вектора ошибки решения разностной задачи при движении в прямом времени, а остальных компонент — в обратном времени, с применением быстрого преобразования Фурье. Излагается алгоритм метода и приводятся результаты численных экспериментов.

Литература

[1] Китаева Е.В., Соболев В.А. Численное отыскание ограниченных на всей оси решений дискретных сингулярно возмущенных уравнений и критических режимов горения. Журн. вычисл.матем. и матем. физики. 2005. Т.45, №1. с.56-87.

VW-ПРОСТРАНСТВО

Ключанцев М.И. (Воронеж)

klych@pisem.net

Множество всех кортежей $(x, t, t_1, \dots, t_n, A, A_1, \dots, A_n)$ любой длины, т.е. $n = 0, 1, \dots$, в которых $AA_1 \dots A_n$ — наборы (композиции) операторов, $t, t_1, \dots, t_n$ — значения параметров (времен) $t_i \in [0, T_i]$, характеризующих структуру операторов A_i , x — пространственная координата, где рассматриваются события $\{f(x), \dots, f(x, \dots, t_i, \dots)\} \in D(A \dots A_i, \dots) \cup R(AA_1 \dots A_i \dots)$, будем называть VW-пространством. В VW-пространстве определяем группу последовательных действий

$$V_{0,1,2,\dots,n} : (x, t, t_1, \dots, t_n, AA_1 \dots A_n) \rightarrow (x, t', t'_1, \dots, t'_n, A' A'_1 \dots A'_n),$$

где нижние индексы λ группы V_λ соответствуют тем операторам кортежа, которые под действием V изменяют свои свойства (вид), и группу параллельных действий

$$W_n^m : (x, t, t_1, \dots, t_n, AA_1 \dots A_n) \rightarrow (x, t', t'_1, \dots, t'_m, A' A'_1 \dots A'_m).$$

удовлетворяющих основному свойству $V_\lambda V'_\lambda = V''_\lambda$, $W_n^m W_m^k = W_n^k$.

Для заданного оператора A множество кортежей $(x, t, t_1, \dots, t_n, A, A_1, \dots, A_n)$, в которых все A_i являются временными формами [1] оператора A , т.е. $A_i = A \dots p(\dots t_i) A \dots r(\dots t_i)$, образуют пространство $Dtt_1 \dots t_i \dots R(AA_1 \dots A_n) \subset VW$ -пространство. Переходы

$V_n: (x, t, t_1, \dots, t_n, AA \dots A_n) \rightarrow (x, t, t_1, \dots, t_{n-1}, t'_n, AA_1 \dots A_{n-1} A'_n)$,
 $W_n^m: (x, t, t_1, \dots, t_n, A \dots A_n) \rightarrow (x, t, t_1, \dots, t'_m, A \dots A'_m)$ и преобразования $V_n: Dtt_1 \dots t_n R(A \dots A_n) \rightarrow Dtt_1 \dots t_{n-1} t'_n R(A \dots A_{n-1} A'_n)$, $W_n^m: Dtt_1 \dots t_n R(AA_1 \dots A_n) \rightarrow Dtt_1 \dots t_n t'_{n+1} \dots t'_m R(AA_1 \dots A_n \dots A'_m)$ эквивалентны. В силу самоиндукции V и W [1], т. е. действия V_n всегда заканчиваются действием W_n^k , результатом W_n^k будет либо новое W_k^1 , либо действия V_k , пространство $Dtt_1 \dots t_n R(AA_1 \dots A_n)$ самоэволюционирует в VW -пространстве.

Интерпретация: VW -пространство — это множество всевозможных и невозможных (когда композиции $AA_1 \dots A_n$ лишены смысла) структурных форм всех объектов, самоэволюционирующееся пространство $Dtt_1 \dots t_n R(AA_1 \dots A_n)$ — временные (структурные) формы реального объекта.

Литература

1. Ключанцев М.И. Эволюционирующие пространства // Журнал проблем эволюции открытых систем. — 2006. Алматы. — т.1, Вып.8. — С.63 — 75.

Краевые задачи для гармонических функций с обобщенными контактными условиями¹

Ковалева Л.А., Солдатов А.П. (Белгород)

Kovaleva_l@bsu.edu.ru, soldatov48@mail.ru

Рассматривается тройка гармонических функций u^i , $i = 1, 2, 3$, в областях D^i на плоскости, имеющих общий участок границы L . Для этих функций на дуге L задаются обобщенные контактные условия

$$u^1 = u^2 = u^3, \quad \frac{\partial u^1}{\partial n} + \frac{\partial u^2}{\partial n} + \frac{\partial u^3}{\partial n} = 0,$$

где n — единичная внешняя нормаль. Оставшаяся часть границы $\partial D^i \setminus L$ занята обычными краевыми условиями (Дирихле, Неймана или смешанными условиями). Задачи такого типа встречаются в теории дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах [1]. В работе установлена однозначная разрешимость каждой из этих задач.

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., и др., Дифференциальные уравнения на геометрических графах, М.: Физматлит,

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ(проект № 07-01-00299)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПРЕДЕЛОМ ПРИМЕНИМОСТИ НЬЮТОНОВСКОЙ МОДЕЛИ

Колодезнов В.Н., Капранчиков С.С. (Воронеж)

kvn@vgta.vrn.ru

Рассматривается математическая модель одномерного, установившегося течения в цилиндрическом канале жидкости, динамическая вязкость μ которой изменяется в зависимости от скорости сдвига $\dot{\gamma}$, следующим образом

$$\mu(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \mu_1 = \text{const}; & 0 < -\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0; \\ \mu_1 + \mu_0 \cdot (2 + \dot{\gamma}/\dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma}_0/\dot{\gamma}) & -\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = du/dr < 0; \quad \dot{\gamma}_0 > 0,$$

где μ_1 — ньютоновская вязкость жидкости при достаточно малых (по модулю) значениях скорости сдвига; $\dot{\gamma}_0$ — пороговое значение скорости сдвига; μ_0 — реологическая константа; $u(r)$ — распределение скорости течения жидкости в канале в зависимости от радиальной координаты r .

Аналогичная реологическая модель для динамической вязкости была использована в ряде работ других авторов при рассмотрении задач динамики нелинейно-вязкой жидкости, на примере течения расплавленных металлов. Особенностью такой реологической модели вязкости является наличие ограничения на реологические константы, обусловленного требованием безусловной положительности динамической вязкости.

Представление вязкости в форме (1) предполагает разбиение области течения на две зоны в зависимости от соотношения значений $\dot{\gamma}$ и $\dot{\gamma}_0$.

Принимая во внимание соответствующие граничные условия, в том числе предполагающие разбиение области течения на две зоны и “сшивание” характеристик течения на их границе, было получено распределение скорости в канале от радиальной координаты. Проведен анализ влияния основных параметров задачи на расходные характеристики течения.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛОГА ТЕПЛОВОГО ВЗРЫВА ПРИ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЯЗКОСТЬ КОТОРОЙ ЗАВИСИТ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Колодежнов В.Н., Колтаков А.В. (Воронеж)

kvn@vgta.vrn.ru

Рассматривается установившееся сдвиговое течение в плоском канале неньютоновской жидкости, вязкость которой зависит от температуры и скорости сдвига следующим образом

$$\mu \left(T, \frac{du}{dy} \right) = K(T) \cdot \left(\frac{du}{dy} \right)^{n-1}; \quad K(T) = \frac{\mu_0}{(T - T_p)^k},$$

где T , u — температура и скорость жидкости, представляющие собой функции поперечной координаты y ; μ_0 , T_p , k , n — реологические константы.

Можно показать, что распределение температуры в канале с учетом эффекта диссипации находится из решения нелинейного дифференциального уравнения, которое в безразмерной форме записи имеет вид

$$\frac{d^2 T'}{dy'^2} + Na \cdot (T')^{\frac{k}{n}} = 0,$$

где Na — критерий подобия Наме-Гриффитса, определяемый через исходные параметры традиционным образом.

Решение уравнения проводили методом малого параметра, когда $|(k - n)/n| \ll 1$, для случая постановки температурных граничных условий на стенках канала второго рода.

Проведен анализ решения задачи в рамках нулевого и первого приближений. Получены условия, накладываемые на основные критерии подобия, при выполнении которых максимальное значение температуры в канале принимает неограниченно большое значение, что может быть интерпретировано как гидродинамический аналог теплового взрыва.

О ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА МЕТАЛЛИЗАЦИИ ОДИНОЧНОГО ОКИСЛЕННОГО ОКАТЫША

Коржов Е.Н. (Воронеж)

ken@amm.vsu.ru

Рассматривается вопрос о постановке краевой задачи сопряженного типа, возникающей при математическом моделировании одного из этапов электросталеплавильного производства бездоменной технологии MIDREX [1]. Твердая частица правильной сферической формы попадает в высокотемпературный поток восстановительного газа. Под действием на частицу теплового фактора происходит химическая реакция восстановления железа. Фронт гетерогенной реакции продвигается с переменной скоростью в виде сферической поверхности к центру частицы. Газообразные продукты реакции диффундируют через расширяющееся сферическое кольцо образующегося губчатого железа в окружающее частицу газовое пространство. Процессы тепло- и массопереноса в трех фазах — твердое ядро частицы (окисленный окатыш), пористая оболочка вокруг него с движущейся внутренней границей (металлизированный окатыш) и неограниченное газовое пространство взаимообусловлены. Система дифференциальных уравнений в частных производных относительно температуры во всех трех фазах и уравнения радиальной конвективной диффузии в двух фазах замыкается уравнениями движения поверхности химической реакции восстановления железа и уравнениями динамики восстановительного газа в пористой оболочке и покоящемся неограниченном пространстве вокруг частицы. На границах раздела фаз сформулированы соответствующие условия баланса и получены уравнения для температуры, концентрации газообразных продуктов реакции и скорости восстановительного газа, направленной по радиусу к центру частицы. Обсуждается вопрос о построении базовой модели указанного процесса и дается оценка порядков величин безразмерных параметров, определяющих протекание процесса металлизации.

Литература

1. Кудрин В.А. Теория и технология производства стали. М.: Мир, 2003. 528 с.
2. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных систем: В 2-х томах.

**О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО
СВОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
С ИНВОЛЮЦИЕЙ¹**

Корнев В.В. (Саратов)

KornevVV@info.sgu.ru

Рассмотрим оператор

$$Ly = \frac{d}{dx}y(\theta(x)), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

определенный на множестве абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$y(1) = 0,$$

принимая значения в пространстве $L[0, 1]$; $\theta(x)$ — непрерывная функция, трижды непрерывно дифференцируемая на $(0, 1)$, $\theta'(x) < 0$, $\theta(\theta(x)) \equiv x$, $\theta(0) = 1$, $\theta(1) = 0$ и в некоторой окрестности нуля $\theta'(x) = -x^\alpha$, $\alpha > 0$.

Доказан следующий аналог признака Жордана сходимости тригонометрических рядов Фурье.

Теорема. Пусть $f(x)$ и $f(x)(1-x)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ суммируемы на $(0, 1)$, на $[a, b] \subset (0, 1)$ $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию. Тогда на любом $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ ряд Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям оператора L равномерно сходится к $f(x)$.

Литература

1. Корнев В.В., Хромов А.П. О сходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора с инволюцией, имеющей особенность // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 14-й Саратов. зимней школы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2008. С. 94–95.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-2970.2008.1).

**ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР, ОБРАЩАЮЩИЙ
ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ
ГРАФЕ ПРИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ 2-ГО РОДА**
Коровина О.В. (Борисоглебск), Прядиев В.Л. (Белгород)
olesya_korovina@mail.ru, Pryadiev@bsu.edu.ru

Рассмотрим начально-краевую задачу для неоднородного волнового уравнения на ограниченном геометрическом графе при гладких условиях трансмиссии и краевых условиях 2-го рода. Описание её решения сводится, стандартно, к описанию решения задачи

$$\begin{cases} u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t) & (x \in \Gamma \setminus \mathcal{V}, t > 0) \\ \sum_{h \in T(x)} u_h^+(x, t) = 0 & (x \in \mathcal{V}, t \geq 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0+) = 0 & (x \in \Gamma) \end{cases}, \quad (1)$$

где $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — геометрический граф с прямолинейными рёбрами (см. [1]), $\mathcal{V}$ — множество всех его вершин, $T(x) := \{h \in \mathbb{R}^n \mid \|h\| = 1 \text{ и } x + \varepsilon h \in \Gamma \text{ при достаточно малых } \varepsilon > 0\}$, $u_h^+(x, t)$ — правая производная $u(\cdot, t)$ в x по h , φ — заданная функция.

Пусть функция $G(x, s_1, s_2)$ действует из $\Gamma \times R(\Gamma) \times R(\Gamma)$ в $\mathbb{R}$ и 1) $G_{xx}(x, s_1, s_2) = 0$ при $x \notin \{s_1, s_2\}$, 2) если $s_1 \neq s_2$ и $h_i \in T(s_i)$, то $G_{h_i}^+(s_i, s_1, s_2) + G_{-h_i}^-(s_i, s_1, s_2) = (-1)^i$, 3) $G(x, s, s) = 0$, 4) $\sum_{h \in T(x)} G_h^+(x, s_1, s_2) = 0$ при $x \in \mathcal{V}$ (здесь все производные — по первому аргументу), 5) $\int_{\Gamma} G(x, s_1, s_2) dx = 0$. Пусть

$$g(x, t, s_1, s_2) := \sum_{p \in P(x, t)} \beta_p G(a_{k(p)}(p), s_1, s_2), \quad (2)$$

где $P(x, t)$ — множество всех ломаных p с последовательными вершинами $x = a_0(p), a_1(p), \dots, a_{k(p)}(p)$ такими, что 1) $\sum_{i=1}^{k(p)} \|a_i(p) - a_{i-1}(p)\| = t$, 2) $a_i(p) \in \mathcal{V}$ при $0 < i < k(p)$, 3) $(a_{i-1}, a_i) \cap \mathcal{V} = \emptyset$ при $1 \leq i \leq k(p)$; β_p — коэффициенты трансфера вдоль ломаной p (см. [2]).

Теорема. Пусть $\varphi|_{\gamma} \in C^2(\gamma)$ для любого ребра γ , причём $\forall x \in \mathcal{V} \forall h, \eta \in T(x) : (\varphi_h^+)^+(x) = (\varphi_{\eta}^+)^+(x)$. Пусть $\int_{\Gamma} \varphi(x) dx = 0$. Тогда при

$x \in \Gamma$ и $t > 0$ решение задачи (1) представимо в виде:

$$u(x, t) = - \int_{R(\Gamma)} \left(\int_{R(\Gamma)} g(x, t, s_1, s_2) ds_2 \right) \varphi''(s_1) ds_1.$$

Отметим существенную деталь: функция g , определяемая формулой (2), кусочно-линейна.

Литература

[1] Покорный Ю. В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[2] Покорный Ю. В., Прядиев В. Л., Боровских А. В. Волновое уравнение на пространственной сети// Докл. РАН. - 2003. - Т. 388, № 1. - С. 16-18.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ БИОРТОГОНАЛЬНОГО РЯДА ОТВЕЧАЮЩЕГО ОПЕРАТОРУ ШРЕДИНГЕРА

Курбанов В.М. (Баку)

b_bilalov@mail.ru

Рассмотрим на интервале $G = (0, 1)$ формальный дифференциальный оператор Шредингера $Lu = u'' + q(x)u$ с суммируемым потенциалом $q(x)$. Пусть $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ произвольная система удовлетворяющая условиям (см [1]).

1) система $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна и минимальна в $L_2(G)$; 2) каждая функция абсолютно непрерывна со своей первой производной на сегменте $\bar{G}$, причем каждая функция $u_k(x)$ для некоторого комплексного числа λ_k почти всюду на $\bar{G}$ удовлетворяет уравнению $Lu_k = \lambda_k u_k + \theta_k u_{k-1}$, в котором число θ_k равно либо 0, либо 1 (в этом случае $\lambda_k = \lambda_{k-1}$), причем $\theta_1 = 0$; 3) ранг собственных функций равномерно ограничен; 4) для любого номера $k \in N$ выполняется оценка $\|u_k\|_2 \|v_k\|_2 \leq \text{const}$, где $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ биортогонально сопряженная система к $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $v_k(x)$ удовлетворяет уравнению $L^* v_k = \bar{\lambda}_k v_k + \theta_{k+1} v_{k+1}$ ($L^* = -\frac{d^2}{dx^2} + \overline{q(x)}$) почти всюду на $\bar{G}$. Обозначим $\mu_k^2 = \lambda_k$, $\text{Re} \mu_k \geq 0$; $\sigma_n(x, f) = \sum_{|\mu_k| < n} f_k u_k(x)$, $f_k = (f, v_k)$,

$f \in L_p(G)$, $1 < p \leq 2$; $E_n^{(p)}(f) = \|\sigma_n(\cdot, f) - f\|_p$.

Теорема. Пусть выполняются условия 1)-4). Тогда для абсолютной и равномерной сходимости биортogonalного ряда функции $f(x) \in L_p(G)$, $1 < p \leq 2$ достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{p}-1} E_n^{(p)}(f) < \infty$, причем при $p = 2$ биортogonalный ряд равномерно сходится к самой функции $f(x)$.

Отметим, что в случае тригонометрической системы из этой теоремы следует известная теорема Б.С. Стечкина (см. [2]).

Литература

1. Ильин В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка. // Докл. АН СССР. 1983. Т.273. №5. с.1048-1053.
2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М, Физматгиз. 1961. 932с.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С УРАВНЕНИЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹

Курдюмов В.П. (Саратов)

Рассматривается задача оптимального управления:

$$\frac{du}{dt} = Lu + f, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(0) = \varphi; \quad f, \varphi \in K; \quad (2)$$

$$J(\varphi, f) = \|u(T) - u_0\|^2 + \|\varphi\|^2 + \|f\|^2 \rightarrow \min. \quad (3)$$

Здесь L — интегро-дифференциальный оператор:

$$Ly(x) = y^{(n)}(1-x) + \int_0^x N(x,t)y^{(n-1)}(1-t)dt, \\ y^{(k-1)}(1) = 0, \quad k = 1, \dots, n;$$

$N(x, t)$ — непрерывная функция; $K \subset L_2[0, 1]$ — выпукло и замкнуто; f и φ — управления; u_0 — фиксированный элемент из $L_2[0, 1]$, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0, 1]$, $n = 4q + 2$.

Оператор L является обращением оператора A из [1], поэтому справедлива теорема 5 из [1] о базисности Рисса из его собственных и присоединенных функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, в $L_2[0, 1]$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-2970.2008.1).

Теорема 1. *Решение задачи (1)–(3) существует и единственно.*

Теорема 2. Пусть T_m – подпространство из $L_2[0, 1]$, порожденное функциями $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, m$; $\varphi^{(m)}(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(m)} \varphi_i(x)$, $f^{(m)}(x) = \sum_{i=1}^m \beta_i^{(m)} \varphi_i(x)$ – решение задачи (1)–(3), когда $K = T_m$; и пусть $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^0 \varphi_i(x)$, $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^0 \varphi_i(x)$ – решение задачи (1)–(3), когда $K = L_2[0, 1]$. Тогда для всех $i = 1, 2, \dots$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_i^{(m)} = \alpha_i^0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_i^{(m)} = \beta_i^0.$$

Литература

1. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Матем. заметки. 2004. Т. 76, вып. 1. С. 97–110.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Курухтин В.Т. (Москва)

vkt54@rambler.ru

Результаты экспериментов [1] показывают наличие вихревых движений в зоне контакта медных образцов при скоростях соударения от 200 м/сек до 500 м/сек. Эти данные подтверждают гипотезу, выдвинутую автором, о возникновении отдельных блоков, образующихся в процессе импульсного деформирования. Ниже приводятся некоторые концептуальные положения, используемые при построении математической модели данного процесса: 1) отказ от детерминизма, 2) признание того факта, что физической основой пластичности является лавинообразный рост дефектов кристаллической решётки, 3) необходимость учёта роста энтропии и внутренней энергии. Кроме того, предполагается использовать зависимость скорости деформации от мощности энергии, поглощаемой в вышеописанном процессе. Предлагается также ввести в модель некоторые параметры, характеризующие свойство материала впитывать в себя энергию в процессе деформирования. Выдвигается также гипотеза о том, что эта энергия выделяется главным образом вблизи поверхностей

скольжения, которые с позиции теории функций пространственного комплексного переменного можно трактовать как конусы-фильтры делителей нуля. Предполагается также, что на начальной стадии процесса соударения движение в зоне контакта будет вихревым. Тогда, используя принцип Эйнштейна о распределении энергии по степеням свободы, можно на начальном этапе свести задачу о соударении к более простой задаче о распространении упругопластических волн сдвига в массивном стержне круглого сечения. Представлен алгоритм численного решения задачи о распространении волн сдвига методом характеристик.

Литература

1. Yu.I. Meshcheryakov, N.I. Zigacheva, A.K. Divakov, I.P. Makarevich, S.V. Razorenov. Turbulization of dynamic straining//International conference "Shock waves in condensed matter S-Peterburg, 2006, P.196.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ДВОЙСТВЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО ГРАНИЧНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ¹

Кутерин Ф.А., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

kufa2@uic.nnov.ru, m_sumin@mm.unn.ru

Доклад посвящен конструированию алгоритма двойственного типа [1] для решения обратной задачи нахождения минимальной по норме пары $\pi = (u, w)$ из заданного замкнутого выпуклого ограниченного множества допустимых воздействий $\mathcal{D} \subset L_2(Q_T) \times L_2(S_T)$ по дискретному наблюдению $q = (q_1, \dots, q_l) \in \mathbb{R}^l$ решения $z[\pi]$ третьей краевой задачи для параболического уравнения дивергентного вида

$$z_t - \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x, t) z_{x_j}) + b_i(x, t) z_{x_i} + a(x, t) z + \langle f(x, t), u(x, t) \rangle = 0, \quad (1)$$

$$z(x, 0) = z_0(x), \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial z}{\partial N} + \sigma(x, t) z = w(x, t), \quad (x, t) \in S_T$$

на границе S_T цилиндра Q_T , $q_i = z[\pi](x_i, t_i)$, $(x_i, t_i) \in S_T$, $i = 1, \dots, l$. Условия на коэффициенты краевой задачи (1) таковы, что ее решение лежит в классе $V_2^{1,0}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00495).

В докладе на основе идеологии двойственной регуляризации [1] предлагается алгоритм решения поставленной обратной задачи, рассматривается его итеративный вариант с правилом останова в случае, если задан фиксированный уровень ошибки наблюдения. Доказывается сходимость решений последовательности обратных задач дискретного наблюдения к решению задачи, в которой наблюдается все решение на границе S_T . Существенной особенностью реализации указанной схемы в рассматриваемом случае является необходимость использования при обосновании метода двойственной регуляризации теории линейных параболических уравнений с мерами Радона в исходных данных.

Литература

1. Сумин М.И. *Регуляризация в линейно-выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности.* //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т. 47. – № 4. – С. 602–625.

КОМБИНАЦИЯ КРИТЕРИЯ ГЕРМЕЙЕРА И ОБОВЩЕННОГО КРИТЕРИЯ ГУРВИЦА ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫИГРЫШЕЙ В ИГРАХ С ПРИРОДОЙ

Лабскер Л.Г., Гулюгин А.Н. (Москва)

llabsker@mail.ru, agulyugin@yandex.ru

Пусть $S_A^C = \{A_i : i = 1, \dots, m\}$ — множество чистых стратегий игрока A в игре с природой; $\Pi_j, j = 1, \dots, n$ — состояния природы с вектором вероятностей $q = (q_1, \dots, q_n), q_j > 0; j = 1, \dots, n, q_1 + \dots + q_n = 1$; $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}}$ — матрица выигрышей игрок A и $G(q) = (g_{ij} = q_j a_{ij})_{i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}}$ — матрица Гермейера. Определим новый критерий, представляющий собой результат применения обобщенного критерия Гурвица [1] к матрице Гермейера. Переставим элементы Гермейера $g_{i1}, \dots, g_{in}$ при каждой стратегии A_i в неубывающем порядке $g_{il_1(i)} \leq \dots \leq g_{il_n(i)}$, где $l_1(i), \dots, l_n(i)$ — некоторая перестановка номеров $1, \dots, n$, зависящая от номера i . Тогда матрица $G(q)$ преобразуется в матрицу $(\tau_{ij} = g_{il_j(i)})_{i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}}$. Элементы $\tau_{ij}, i = 1, \dots, m, n$ зовем элементами Гермейера j -го ранга. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_j \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, где λ_j — количественная оценка субъективного представления игрока A в том, что при выборе

им любой стратегии он получит выигрыш, элемент Гермейера которого будет j -го ранга. Критерием $(GEHur)(q; \lambda)$ назовем критерий, по которому $(GEHur)_i(q; \lambda) \equiv \lambda_1 \tau_{i1} + \dots + \lambda_n \tau_{in}$ — показатель эффективности стратегии A_i ; $(GEHur)_{S_A^C}(q; \lambda) \equiv \max\{(GEHur)_i(q; \lambda) : i = 1, \dots, m\}$ — цена игры в чистых стратегиях; стратегия A_k оптимальна, если $(GEHur)_k(q; \lambda) = (GEHur)_{S_A^C}(q; \lambda)$. Пусть $(S_A^C)^{O((GEHur)(q; \lambda))}$ — множество оптимальных стратегий, $t_j = \max\{\tau_{ij} : i = 1, \dots, m\}$, $\text{supp } \lambda \equiv \{j \in \{1, \dots, n\} : \lambda_j > 0\}$ — спектр вектор λ , $(S_A^C)^{\text{supp } \lambda} \equiv \{A_{kl} : \tau_k = t_j, j \in \text{supp } \lambda\}$. Доказаны следующие утверждения: $t_1 \leq (GEHur)_{S_A^C}(q; \lambda) \leq \lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n$; $((S_A^C)^{O((GEHur)(q; \lambda))} = (S_A^C)^{\text{supp } \lambda}) \Leftrightarrow ((S_A^C)^{\text{supp } \lambda} \neq \emptyset)$ и если $\theta \in \text{supp } \lambda$, то

$$(A_k \in (S_A^C)^{O((GEHur)(q; \lambda))} \Leftrightarrow (\tau_{kj} \geq (\lambda_\theta)^{-1}[(GEHur)_{S_A^C}(q; \lambda) - \sum_{l \in (\text{supp } \lambda) \setminus \{\theta\}} \lambda_l \tau_{kl}]) \text{ для } j = \theta, \theta + 1, \dots, n.$$

Литература

1. Лабскер Л.Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Финансовая математика. — М., МГУ им. М. В. Ломоносова, 2001. с. 401–414.

КРИТЕРИИ ИЗМЕНЕНИЯ НАБОРА СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ В ИНТЕРЕСАХ СНИЖЕНИЯ СУММАРНЫХ ЗАТРАТ НА СОДЕРЖАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ

Ландсберг С.Е., Солодов Р.А. (Воронеж)

solodovr@yandex.ru

Важнейшим условием эффективной работы компьютерной системы является правильный выбор уровня защищенности каждого из ее ресурсов. Это связано с тем, что повышение уровня защищенности, с одной стороны, ведет к уменьшению возможного ущерба от несанкционированного доступа к ресурсам, а с другой — к возрастанию расходов, связанных с обслуживанием системы, закупкой современных средств защиты информации (СЗИ), а также к росту упущенной выгоды от ограничения доступа к ресурсам [1, 2]. При этих условиях для каждого ресурса важно выбрать такой уровень защищенности, при котором сумма размеров возможного ущерба и накладных расходов была бы минимальной. Будем называть этот уровень оптимальным.

Однако на практике могут возникать ситуации, когда применяемый набор СЗИ не может обеспечить оптимальный уровень защиты какой-либо группы информационных ресурсов по одной или нескольким угрозам. В таких случаях необходимо принимать решение о добавлении новых СЗИ или замене старых. При этом предлагается использовать следующий критерий: добавление нового СЗИ целесообразно только в том случае, если разница между суммами размеров возможного ущерба и накладных расходов до (U_1) и после его добавления (U_2) не будет меньше стоимости внедрения данного средства защиты (Z):

$$U_1 - U_2 \geq Z.$$

На этапе проектирования подсистемы защиты компьютерной системы, когда закупка различных СЗИ только планируется, критерий изменения набора СЗИ будет формулироваться следующим образом: замена одного СЗИ на другое целесообразна только в том случае, если разница между суммами размеров возможного ущерба и накладных расходов для этих СЗИ не будет меньше разницы затрат на внедрение каждого из этих средств:

$$U_1 - U_2 \geq Z_2 - Z_1,$$

где U_i и Z_i — сумма размеров возможного ущерба и накладных расходов при использовании i -го СЗИ и стоимость его внедрения соответственно.

Данные критерии наиболее применимы в тех случаях, когда требуется максимально снизить затраты на содержание компьютерной системы (примером могут служить большинство коммерческих организаций). Это возможно за счет принятия некоего допустимого уровня ущерба и только в том случае, если в системе отсутствуют информационные ресурсы с неприемлемым уровнем ущерба от несанкционированного доступа к ним (например, содержащие информацию, относящуюся к государственной тайне).

Литература

1 Голубева А.Ю. Минимизация затрат при создании комплексной системы безопасности // Защита информации. Конфидент, 2001. — N2. — С. 30–31.

2 Петренко С.А. Оценка затрат на информационную безопасность // Защита информации. Конфидент, 2003. — N1. — С. 68–73.

О ТОЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РЕЖИМОМ

Лашин Д.А. (Москва)
dalashin@gmail.com

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(l, t) = \psi(t), \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

где $\varphi(t) \in W_2^1(0, T)$, $\psi(t) \in W_2^1(0, T)$ для любого $T > 0$.

Обозначим через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ пространство, состоящее из элементов $\eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, таких, что $\eta(x, T) = 0$, $\eta(0, t) = 0$. Будем рассматривать обобщенное решение задачи (1) – (3) из энергетического класса, то есть функцию $u(x, t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$, где $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ ([1], с.179), удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (u_x \eta_x - u \eta_t) dx dt = \int_0^T \psi(t) \eta(l, t) dt \quad (4)$$

для любой функции $\eta(x, t) \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$, такой что $u(0, t) = \varphi(t)$.

Пусть $T > 0$, $z(t) \in L_2(0, T)$. Обозначим через U множество функций

$$U = \{\varphi \in W_2^1(0, T), \|\varphi\|_{W_2^1(0, T)} \leq M, \varphi_1(t) \leq \varphi(t) \leq \varphi_2(t)\},$$

где $M > 0$, а $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in W_2^1(0, T)$, причем $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$.

Для произвольного $c \in (0, l]$ определим функционал

$$J[\varphi] = \int_0^T (u(c, t) - z(t))^2 dt.$$

Рассмотрим задачу минимизации данного функционала. Обозначим

$$\inf_{\varphi \in U} J[\varphi] = m.$$

Теорема 1. *Существует и единственна такая управляющая функция $\varphi_0(t) \in U$, что $m = J[\varphi_0]$.*

Наряду с вопросом о существовании и единственности решения экстремальной задачи, важным вопросом является точная управляемость. Под точной управляемостью будем понимать возможность получения в точке с следа $u(x, t)$ почти всюду совпадающего на $[0, T]$ с заданной функцией $z(t)$, и соответственно точным управлением будем называть такую функцию $\varphi(t) \in U$ при которой функционал $J[\varphi(t)]$ обращается в ноль.

Теорема 2. *Для любых $M > 0$ и $M_1 > 0$ и для любых $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in W_2^1(0, T)$ существует функция $z(t) \in C(0, T)$ такая, что для любой функции $\varphi(t) \in U$ и любой $\psi(t) \in W_2^1(0, T)$ такой, что $\|\psi(t)\|_{W_2^1(0, T)} \leq M_1$, выполняется неравенство $J[\varphi] > 0$.*

Литература

[1] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973.

[2] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир. 1972.

СИСТЕМА ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА

Лексина С.В. (Самара)

lesveta@rambler.ru

Доклад посвящен решению задачи управления процессом, колебание которого описывается системой [1], [2]

$$u_{tt} - Au_{xx} = 0 \quad (1)$$

в области $Q_{l,T} = [0; l] \times [0; T]$, где $u = [u_1(x, t), u_2(x, t)]^T$ -вектор-функция, A - постоянная, квадратная матрица второго порядка.

В работах [3], [4] В.А. Ильина сформулированы и решены задачи управления упругими колебаниями с краевыми условиями первого рода.

Пусть

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \psi_1(x), 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(x, T) = \varphi_2(x), \quad u_t(x, T) = \psi_2(x), 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

$$u_x(0, t) - \beta u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) + \alpha u(l, t) = \nu(t), 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ — две произвольные вектор-функции из классов $C^2[0, l]$, $C^1[0, l]$ соответственно, $\mu(t)$, $\nu(t)$ — вектор-функции.

Задача. Найти момент времени $t = T$ и функции $\mu(t)$, $\nu(t) \in C^1[0, T]$ такие, чтобы для решения $u(x, t)$ третьей краевой задачи с заданными начальными условиями (2) в момент времени T выполнялись финальные условия (3). [5]

Утверждение. Для любого $0 < T < \frac{1}{\max\{\lambda_1, \lambda_2\}}$ и для любых функций $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\varphi_i(x) \in C^2[0, l]$, $\psi_i(x) \in C^1[0, l]$;
- 2) $\varphi'_i(0) - \beta\varphi_i(0) = 0$, $\varphi'_i(l) + \alpha\varphi_i(l) = 0$;
 $\psi'_i(0) - \beta\psi_i(0) = 0$, $\psi'_i(l) + \alpha\psi_i(l) = 0$; где $i = \overline{1, 2}$,
- 3) справедливы тождества

$$\begin{cases} (\langle \bar{l}_i \cdot \varphi_1(x) \rangle)' - \frac{\langle \bar{l}_i \cdot \psi_1(x) \rangle}{\lambda_i} \equiv 0, 0 \leq x \leq l - \lambda_i T, \\ (\langle \bar{l}_i \cdot \varphi_1(x) \rangle)' + \frac{\langle \bar{l}_i \cdot \psi_1(x) \rangle}{\lambda_i} \equiv 0, \lambda_i T \leq x \leq l, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} (\langle \bar{l}_i \cdot \varphi_2(x) \rangle)' + \frac{\langle \bar{l}_i \cdot \psi_2(x) \rangle}{\lambda_i} \equiv 0, 0 \leq x \leq l - \lambda_i T, \\ (\langle \bar{l}_i \cdot \varphi_2(x) \rangle)' - \frac{\langle \bar{l}_i \cdot \psi_2(x) \rangle}{\lambda_i} \equiv 0, \lambda_i T \leq x \leq l, \end{cases} \quad (6)$$

граничные управления $u(0, t) = \mu(t)$ и $u(l, t) = \nu(t)$ определяются в явном виде. [5]

Литература

- [1]. Горошко О.А. К вопросу о продольно - крутильных колебаниях упругой естественно закрученной нити (каната) переменной длины с концевым грузом, движущимся по жестким направляющим: В кн.: Стальные канаты/ О.А. Горошко, А.А. Чиж.; - Киев: Техника, 1964. - Т.1, - С.56-64.
- [2]. Горошко О.А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины/ О.А. Горошко, Г.Н. Савин. - Киев: Наукова думка, 1971. - 225 с.
- [3]. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах / В.А. Ильин // Докл. РАН. 1999. Т. 369, №5. С. 592-596.
- [4]. Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени / В.А. Ильин // Дифференциальные уравнения, 1999. Т.35, №11. С. 1517-1534.
- [5]. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями/ Л.Н. Знаменская. - М.:ФИЗМАТЛТИТ, 2004. - 176 с.

О ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ

ГУРСА-ДАРБУ¹

Лисаченко И.В. (Нижний Новгород)

i_lisach@mail.ru

Рассматривается краевая задача Гурса-Дарбу

$$\begin{aligned} x''_{t_1 t_2}(t) &= g(t, x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t)), t \in \Pi \equiv [0, 1]^2, \\ x(t_1, 0) &= \varphi_1(t_1), t_1 \in [0, 1]; x(0, t_2) = \varphi_2(t_2), t_2 \in [0, 1], \end{aligned} \quad (1)$$

где $g(t, l) : \Pi \times R^{3k} \rightarrow R^k$ вместе с $g'_l(t, l)$ измерима по $t \forall l$ и непрерывна по l для п.в. t , $\varphi_i(t_i) : [0, 1] \rightarrow R^k$ абсолютно непрерывны, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. Обсуждаются условия сохранения глобальной разрешимости (1) при возмущении g, φ_1, φ_2 в случае, когда решение (1) естественно искать в классе W функций с $x'_{t_1}(t)$ и $x'_{t_2}(t)$ из пространств со смешанными нормами $L^k_{p, \infty} \equiv (L_p(t_1)[L_\infty(t_2)])^k$ и $L^k_{\infty, p} \equiv (L_p(t_2)[L_\infty(t_1)])^k$, соответственно, и $x''_{t_1 t_2}(t)$ из L^k_p , $p \in (1, \infty)$. Пусть: $\varphi'_1, \varphi'_2 \in L^k_p[0, 1]$; $M \equiv L^k_\infty \times L^k_{p, \infty} \times L^k_{\infty, p}$, $M' \equiv (L_p)^{k \times k} \times (L_\infty(t_1)[L_p(t_2)])^{k \times k} \times (L_\infty(t_2)[L_p(t_1)])^{k \times k}$, $f(t, l) \equiv g(t, l_1 + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), l_2 + \varphi'_1(t_1), l_3 + \varphi'_2(t_2))$; $A[z] \equiv \{A_1[z], A_2[z], A_3[z]\}$, $A_1[z](t) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} z(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$, $A_2[z](t) = \int_0^{t_2} z(t_1, \xi) d\xi$, $A_3[z](t) = \int_0^{t_1} z(\xi, t_2) d\xi$; задано $N(\cdot) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$; Ψ — класс таких троек $\psi \equiv \{g, \varphi_1, \varphi_2\}$, что $\|f'_l(\cdot, \mathbf{y}(\cdot))\|_{M'} \leq N(K)$ при $\|\mathbf{y}\|_M \leq K$ и формула $F[\mathbf{y}](t) \equiv f(t, \mathbf{y}(t))$ задает оператор $F[\cdot] : M \rightarrow L^k_p$. Пусть Ψ_0 — та часть Ψ , каждому элементу которой отвечает (заведомо единственное) глобальное решение (1) класса W . Для $\psi = \{g, \varphi_1, \varphi_2\}$ из Ψ и $\psi_0 = \{g_0, \varphi_{01}, \varphi_{02}\}$ из Ψ_0 положим $\Delta(\psi, \psi_0)(x_0) = g(t, x_0 + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2, x'_{0t_1} + \Delta\varphi'_1, x'_{0t_2} + \Delta\varphi'_2) - g_0(t, x_0, x'_{0t_1}, x'_{0t_2})$, где $\Delta\varphi_i \equiv \varphi_i(t_i) - \varphi_{0i}(t_i)$, $x_0 \in W$ — решение, отвечающее ψ_0 . Пусть $r(\psi, \psi_0) \equiv \|A[\Delta(\psi, \psi_0)]\|_M$. Следующая теорема дополняет результат [1], где задача (1) рассматривалась при других условиях.

Теорема. $\forall \psi_0 \in \Psi_0 \exists \delta > 0, C > 0$: $\psi \in \Psi, r(\psi, \psi_0) < \delta \Rightarrow \psi \in \Psi_0, \|(x - x_0)\|_C + \|(x - x_0)'\|_{L^k_{p, \infty}} + \|(x - x_0)''\|_{L^k_{\infty, p}} \leq Cr(\psi, \psi_0)$, где x — решение (1), отвечающее ψ .

Литература

1. Лисаченко И.В., Сумин В.И. // Понтрягинские чтения -XVIII. Тезисы докл. / Воронеж: ВГУ. 2007. С. 108-109

¹Работа поддержана грантом РФФИ (проект 07-01-00495).

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ломовцев Ф.Е. (Минск)

lomovcev@bsu.by

Исследована корректность уравнения переменного порядка

$$\partial u(t, x) / \partial t + A(t)u(t, x) = f(t, x), \quad \{t, x\} \in G =]0, T[\times]0, l[, \quad (1)$$

где дифференциальный оператор $A(t) = a(t)\partial^3/\partial x^3$ для $t \in [0, t^*[$ и $A(t) = -a(t)\partial^6/\partial x^6$ для $t \in [t^*, T]$, при граничных условиях

$$\frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} = -a_1(t)u(t, 0), \quad \frac{\partial^2 u(t, l)}{\partial x^2} = a_2(t)u(t, l), \quad \frac{\partial u(t, l)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^5 u(t, 0)}{\partial x^5} &= -a_1(t) \frac{\partial^3 u(t, 0)}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} = a_1(t)u(t, 0), \quad \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^5 u(t, l)}{\partial x^5} &= a_2(t) \frac{\partial^3 u(t, l)}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^2 u(t, l)}{\partial x^2} = -a_2(t)u(t, l), \quad \frac{\partial^4 u(t, l)}{\partial x^4} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

для $t \in [0, t^*[$ и $t \in [t^*, T]$ соответственно и начальном условии

$$u(0, x) = u_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (4)$$

Операторы $A(t)$ начально-краевой задачи (1)–(4) разрывны в счётном числе точек t^* и t_r вследствие роста порядка производной по x в t_* и разрывов коэффициента уравнения $a(t)$ в t_r , $r = 1, 2, \dots$

Теорема. Пусть коэффициенты $0 < a_0 \leq a(t)$, $t \in [0, T]$; $0 < a_{i,0} \leq a_i(t)$, $t \in [0, t^*[$; $0 \leq a_i(t)$, $t \in [t^*, T]$; $a(t) \in C^{(1)}(\mathcal{I}_r)$, $a_i(t) \in C[0, T] \cap C^{(1)}(\mathcal{I}_r)$, $\mathcal{I}_r = [t_r, t_{r+1}]$, $t_0 = 0$, $t_\infty = T$, $i = 1, 2$, $r = 0, 1, \dots$ Тогда для каждой $f \in L_2(]0, T[, W_{2,t}^{*-}(0, l))$ и $u_0 \in L_2(0, l)$ слабое решение $u \in L_2(G)$ задачи (1)–(4) существует и единственно.

Здесь гильбертовы пространства $W_{2,t}^{*-}(0, l)$ – антидвойственные к гильбертовым пространствам $W_{2,t}^{*+}(0, l)$, которые являются замыканием множеств $D(A^*(t)) = \{v \in W_2^3(0, l) : \partial^2 v(t, 0)/\partial x^2 = a_1(t)v(t, 0), \partial^2 v(t, l)/\partial x^2 = -a_2(t)v(t, l), \partial v(t, 0)/\partial x = 0\}$ для $t \in [0, t^*[$ и $D(A^*(t)) = \{v \in W_2^6(0, l) : v \in (3)\}$ для $t \in [t^*, T]$ по эрмитовым нормам $\langle v \rangle_{(t)} = (Re \int_0^l A_0^*(t)v \bar{v} dx)^{1/2}$, где сопряженные

дифференциальные операторы $A_0^*(t) = A^*(t) + c_0$, $c_0 \geq 0$, $A^*(t) = -a(t)\partial^3/\partial x^3$ для $t \in [0, t^*]$ и $A^*(t) = A(t)$ для $t \in [t^*, T]$.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ¹

Луконина А.С. (Саратов)

Lukonina_Anna@mail.ru

Рассмотрим оператор, порожденный

$$l(y) = \beta y'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

где $\beta^2 \neq 1$, $p_j(x) \in C^1[0, 1]$ ($j = 1, 2$), и интегральным граничным условием

$$U(y) = \int_0^1 p(t)y(t)dt = 0, \quad p(t) = \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha}, \quad (2)$$

где $0 < \alpha < 1$, $k(t) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$ и удовлетворяет:

$$(k^2(0) - \gamma^2 k^2(1))(k^2(1) - \gamma^2 k^2(0)) \neq 0, \quad \gamma = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

Граничное условие схожего с (2) вида: $\int_{-1}^1 \frac{k(t)}{(1-|t|)^\alpha} y(t) dt = 0$

для оператора дифференцирования $y'(x)$ было впервые рассмотрено А.М. Седлецким. Оператор (1)–(2) при $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 0$ был подробно изучен А.П. Хромовым.

Теорема. Собственные значения оператора (1)–(2) асимптотически стремятся к корням

$$P(\lambda) = \begin{cases} a_0 + a_1 e^{-\lambda\omega} + a_2 e^{-2\lambda\omega}, & \operatorname{Re} \lambda\omega \geq 0, \\ b_0 + b_1 e^{\lambda\omega} + b_2 e^{2\lambda\omega}, & \operatorname{Re} \lambda\omega \leq 0, \end{cases} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}},$$

$$\text{где } a_0 = h_1(k^2(1) - \gamma^2 k^2(0)), \quad b_0 = h_2(k^2(0) - \gamma^2 k^2(1)), \quad a_1 = b_1 = (-1)^{\alpha-1}(1 - \gamma^2)k(0)k(1)(1 + h_1 h_2), \quad a_2 = (-1)^{2(\alpha-1)}b_0, \quad b_2 = (-1)^{2(\alpha-1)}a_0, \quad h_1 = \exp\left(-\omega \int_0^1 p_1(t)dt\right), \quad h_2 = \exp\left(\omega \int_0^1 p_1(t)dt\right).$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-2970.2008.1).

Литература

1. Хромов А.П. Об аналоге теоремы Жордана–Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Докл. РАЕН. – 2004. – № 4. – С. 80–87.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА У РЕШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМА НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Лылов Е.В., Прядиев В.Л. (Воронеж)

zhenua86@mail.ru, pryad@mail.ru

Рассматривается характеристическая задача:

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = F \quad (0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq y_0), \quad (1)$$

$$u(0, y) = \varphi_1(y) \quad (0 \leq y \leq y_0), \quad u(x, 0) = \varphi_2(x) \quad (0 \leq x \leq x_0), \quad (2)$$

где a, b, c, F – функции переменных x, y .

В [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в задаче (1)–(2) a, b, c, F обладают непрерывными (по совокупности переменных) производными, как по x , так и по y , а φ_1 и φ_2 – дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда решение задачи (1)–(2) существует, и все его вторые частные производные существуют и непрерывны в прямоугольнике $[0; x_0] \times [0; y_0]$.

Нами доказана следующая теорема для решения задачи (1)–(2) в случае непрерывных коэффициентов $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ специального вида.

Теорема 2. Если в задаче (1)–(2) функция $a(x, y)$ имеет вид $\tilde{a}(x+y)$ или $\tilde{a}(x-y)$, функция $b(x, y)$ имеет вид $\tilde{b}(x+y)$ или $\tilde{b}(x-y)$, функция $c(x, y)$ имеет вид $\tilde{c}(x+y)$ или $\tilde{c}(x-y)$, то для выполнения утверждения теоремы 1 достаточно потребовать от $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ только непрерывность (оставляя остальные требования к коэффициентам неизменными).

Отметим, что вариант теоремы 1 для случая непрерывного коэффициента $c(x, y)$, имеющего вид $\tilde{c}(x+y)$ или $\tilde{c}(x-y)$, доказан в [1] (см. также [2]).

Литература

[1] Гаршин С. В. Свойства гиперболических уравнений на сетях: Дисс. ... физ.-мат. наук. - Воронеж, 2005.

[2] Гаршин С. В., Прядиев В. Л. Неулучшаемые условия существования и непрерывности производных второго порядка у решения характеристической задачи для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными. // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия "Фундаментальная математика". - 2005. - № 1 (1). - С. 83-98.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОПЕРАТОРОМ $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}$, ДЛЯ ПАРЫ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ Лысенко З.М., Матвиюк Л.В., Нечаев А.П., Башкарёв П.Г. (Одесса)

ivanpribegin@rambler.ru

Рассматривается задача об отыскании пары полианалитических в односвязной области G и H -непрерывных в $G \cup \Gamma$ (Γ — простая кривая Ляпунова, ограничивающая G) функций вида

$$F_1(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(z) \bar{z}^k, \quad F_2(z, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(z) \bar{z}^k,$$

(здесь φ_k и ψ_k ($k = \overline{0, n-1}$) — аналитические в области G функции, представимые интегралами типа Коши с плотностями из $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$), угловые предельные значения которых $F_1(t, \bar{t})$ и $F_2(t, \bar{t})$ почти всюду на Γ удовлетворяют краевым условиям:

$$D_i F_1(t, \bar{t}) = \bar{D}_i F_2(t, \bar{t}) + h_i(t),$$

где $D_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(t) \frac{\partial^j}{\partial \bar{t}^j}$, $\bar{D}_i = \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij}(t) \frac{\partial^j}{\partial \bar{t}^j}$, при этом $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t) \in C(\Gamma)$, $h_i(t) \in L_p(\Gamma)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n-1}$.

С помощью операторного подхода [1] найдены необходимые и достаточные условия нётеровости, а также формула для нахождения индекса указанной краевой задачи. При этом существенно используются результаты [2], касающиеся некоторых вспомогательных операторов, играющих ключевую роль в операторном подходе. До последнего времени, насколько известно авторам, задача в приведённой выше постановке не рассматривалась.

Литература

1. Литвинчук Г.С. Об операторном подходе к теории краевых задач со сдвигом для функций, аналитических в области // Научные Труды юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф.Д. Гахова. Минск, Изд-во "Университетское", 1985, С.69-76.

2. Лисовец Н.И. Исследование некоторых смешанных краевых задач теории аналитических функций // Диссертация ... канд. физ.-мат. наук. Одесса, ОГУ, 1984, 149 с.

5

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ Лысова Т.В. (Самара)

Ранее нами было исследовано уравнение

$$y'' + x^a y^\sigma = 0, \quad (1)$$

где $\sigma = \text{const} < 0$, $a = \text{const}$, $y(x) > 0$ — решение уравнения (1) на $(0, +\infty)$. Теперь рассмотрим уравнение

$$y'' - x^a y^\sigma = 0, \quad (2)$$

Асимптотические свойства решений уравнения (2) зависят от соотношения a и σ . В случае $\lambda(\lambda - 1) > 0$ уравнение (2) имеет частное решение вида $y = Cx^\lambda$, где $\lambda = \frac{2+a}{1-\sigma}$, $\lambda(\lambda - 1) = C^{\sigma-1}$.

Теорема 1. Если $1 + a + \sigma > 0$, то всякое решение уравнения (2), определенное при $x \geq x_0 = \text{const} > 0$, имеет вид

$$y = \left(\frac{(a+2)(1+a+\sigma)}{(1-\sigma)^2} \right)^{1/(\sigma-1)} (1+o(1)) x^{\frac{2+a}{1-\sigma}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Замечание. Если $a + \sigma + 1 > 0$, то существует бесконечно много решений уравнения (2), таких, что

$$y(x) = C(a, \sigma) x^\lambda (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Теорема 2. Если $a + \sigma + 1 < 0$, $a + 2 \geq 0$, $\sigma < 0$, то всякое решение уравнения (2), продолжаемое на $[1, \infty)$, имеет вид

$$y(x) = Ax(1 + o(1)), \quad A > 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Теорема 3. Если $a + 2 < 0$, то всякое решение уравнения (2) удовлетворяет условиям

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = B > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = 0$$

либо $\lim_{x \rightarrow +\infty} y'(x) = A > 0$, $x \rightarrow +\infty$.

Теорема 4. Всякое решение уравнения (2) при $1 + a + \sigma = 0$, $\sigma < 0$, продолжаемое на $[1, +\infty)$, имеет вид

$$y(x) = (1 - \sigma)^{1/(1-\sigma)} x (\ln x)^{1/(1-\sigma)} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Литература

1. Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. - Москва: Наука, 1990. - 432 с.

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ЯДРА КОШИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ОТНОСИТЕЛЬНО КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРИЛОЖЕНИЙ

Магомедов Г.М., Нурмагомедов А.М. (Махачкала)

nurmamagomedov@bk.ru

Доказано, что

$$(Au)(t_1) \doteq \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\tau_1) d\tau_1}{\tau_1 - t_1} = \frac{1}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{\bar{u}(\tau) d\tau}{\tau - t} \doteq (A\bar{u})(t), \quad (1)$$

где Γ - замкнутый контур на комплексной плоскости, удовлетворяющий условию $(ds/|dr|) \leq N < \infty$, $\bar{u} = u(t_1(t))$; $t_1 = t_1(t)$ — функция соответствия границ при конформном отображении единичного круга на внутренность области, ограниченной контуром Γ .

Из формулы (1) вытекает обобщение классического неравенства Рисса-Зигмунда в виде

$$\|Au\|_p \leq B_p(\Gamma) \cdot \|u\|_p, \quad B_p = A_p^o \cdot \frac{M}{m}, \quad 0 < m \leq \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^{\frac{1}{p}} \leq M < \infty, \quad (2)$$

где A_p^o — соответствующий коэффициент из неравенства Рисса - Зигмунда.

Равенство (1) позволяет обобщить формулу Шварца на контуры вышеуказанного класса, т.е. если $u(s) \in L_p (p > 1)$ — действительная функция, заданная на контуре Γ , то

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(s) d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2 \cdot l} \int_0^l u(s) ds + C \cdot i.$$

Имеются и другие приложения.

Неравенство, аналогичное (2), ранее получено Карлеманом [1], но там нет единого для всех соответствующих контуров коэффициента $B_p(\Gamma)$, что существенно.

Литература

[1] Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. М.: "Наука" 1977, 420с.

ОБОВЩЕННЫЙ МЕТОД МОНОТОННОСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Магомедов Г.М., Ханикалов Х.Б. (Махачкала)

ugnsi@iwt.ru

Рассматриваются нелинейные уравнения типа

$$au + \lambda A \circ Fu = g, \quad (1)$$

где $(Au)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{|\tau|=1} \frac{u(\tau) d\tau}{\tau - t}$, $(Fu)(\tau) = f[\tau, u(\tau)]$, $|t| = 1$.

Теорема. Пусть функция $f(t, z)$ измерима по t и принадлежит L_p при каждом комплексном z , непрерывна и монотонна по t почти при каждом t и

$$\operatorname{Re}(\bar{z}f(t, z)) \geq m|z|^p - N;$$

функция $a(t)$ действительная, знакопостоянная и $a^{-1} \in L_{p_1}$. Тогда при $p > 1$, $g \in L_p$ и достаточно большом p_1 уравнение (1) имеет решение в L_p .

Если, кроме того, оператор F строго монотонный, то это решение единственное в L_p .

Для доказательства теоремы рассматривается эквивалентное (1) уравнение

$$\Psi u \stackrel{\circ}{=} -A(au) + Fu = -Ag. \quad (2)$$

Используя положительность операторов $\pm A$, т.е. $\operatorname{Re}(Au, u) = 0$, доказываем формальную коэрцитивность оператора Ψ . Отсюда следует разрешимость уравнения $[\Psi u_n]_n = [g]_n$ ($[u]_n = \sum_{k=-n}^n a_k t^k$). Далее, пользуясь монотонностью оператора F , получаем решение уравнения (2), значит, и уравнения (1), как слабый предел некоторой подпоследовательности от $\{u_n\}$.

Ранее уравнения (1) исследовались при строгих ограничениях на рост $|f|$ в зависимости от $|z|$ на бесконечность.

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Макагонова М.А., Плаксина В.П. (Пермь)

vm@pstu.ru

В монографии [1] предложен оригинальный эффективный подход к решению задач вариационного исчисления. Ниже этот подход применяется к оценке предельной нагрузки P , при которой сохраняется устойчивость стержня с упругой характеристикой $\varphi(s) = (EI)(s)$, где E - модуль Юнга, I - момент инерции поперечного сечения относительно вертикальной оси. Стержень (колонна) оперт в точке $x = 0$, а в точке $x = b$ имеет опору, которая предотвращает боковой прогиб, но допускает свободное вращение. Стержень находится под воздействием осевой нагрузки P . Как известно [2], вопрос сводится к верхней оценке P_0 величины P , при которой $x(t) = 0$ доставляет минимум функционалу

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_0^b [(\varphi(s)\ddot{x}(s))^2 - P(\dot{x}(s))^2] ds$$

с краевыми условиями $x(0) = x(b) = 0$. Если φ не является постоянной величиной, то классический метод предполагает дифференцируемость функции $\varphi(t) = (EI)(t)$. Использование методики, изложенной в [1], позволяет расширить класс изучаемых функций и рассматривать суммируемые ограниченные функции φ . Например, для функции, определенной следующим образом: $\varphi(s) = 2$, если $0 \leq t \leq \frac{b}{2}$ и $\varphi(s) = 1$, если $\frac{b}{2} \leq t \leq b$, получена оценка $P_0 = 1,21 \cdot \frac{\pi^2}{b^2}$.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы

современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. - М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002.- 383 с.
2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения.- М.: Наука, 1968.- 504 с.

ОБОВЩЕННАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ¹

Малахова Н.А., Солдатов А.П. (Белгород)

В области D на плоскости, ограниченной простым гладким контуром Γ , для эллиптического уравнения четвертого порядка с вещественными коэффициентами

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial y^3 \partial x} - a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} - a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y \partial x^3} - a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

рассматривается естественное обобщение задачи А.В.Бицадзе [1] — обобщенная задача Дирихле-Неймана. Она заключается в отыскании решения этого уравнения в классе $C^{k_2-1,\mu}(\bar{D})$ по краевым условиям

$$\left. \frac{\partial^{k_j-1} u}{\partial n^{k_j-1}} \right|_{\Gamma} = g_j, \quad j = 1, 2,$$

где n - единичная нормаль и $1 \leq k_1 < k_2$.

Установлен критерий фредгольмовости этой задачи и найдена формула ее индекса. В частности, показано, что при $1 \leq k_2 - k_1 \leq 3$ задача всегда фредгольмова и ее индекс равен нулю.

Литература

1. Бицадзе А.В. Дифференц. уравнения, 1988, т. 24, №5, с. 825-831.

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДУ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В УСЛОВИЯХ НАРУШЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

Малюгина М.А. (Воронеж)

Изучение ветвления решений уравнения

$$\frac{d^4 p}{dx^4} + \kappa \frac{d^2 p}{dx^2} + \varepsilon \frac{dp}{dx} + \alpha p + p^3 = 0, \quad x \in [0, 1],$$

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ(проект № 07-01-00299)

при краевых условиях $p(0) = \frac{d^2 p}{dx^2}(0) = p(1) = \frac{d^2 p}{dx^2}(1) = 0$ и локализации параметров $\kappa = 5 + \delta_1$, $\alpha = 4 + \delta_2$, $\varepsilon, \delta_1, \delta_2$ — малые параметры, сводится (методом Ляпунова–Шмидта) к изучению ветвления решений ключевого уравнения

$$\theta(\xi) := \text{grad } W(\xi) + \varepsilon B\xi = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^2$$

на координатной плоскости, где $W(\xi)$ — ключевая функция, отвечающая функционалу

$$V(p, \kappa, \alpha) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{d^2 p}{dx^2} \right)^2 - \kappa \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 + \alpha p^2 \right) + \frac{p^4}{4} \right) dx$$

— потенциалу исходного уравнения при $\varepsilon = 0$, $B = (b_{i,j})$, $b_{i,j} = \langle \frac{de_i}{dx}, e_j \rangle$, $e_1 = \sqrt{2} \sin(x)$, $e_2 = \sqrt{2} \sin(2x)$ — моды бифуркации.

Так как исходное уравнение нечетно и нарушение потенциальности происходит лишь за счет внесения в уравнение малого несамосопряженного линейного слагаемого $\varepsilon \frac{dp}{dx}$, то ключевое уравнение приобретет малое непотенциальное слагаемое, главная линейная часть которого (по параметру ε) является галеркинской аппроксимацией непотенциального слагаемого (по модам e_j). Структура ключевой функции ранее была исследована в работах Б.М. Даринского и Ю.И. Сапронова [1]. На основе этого нетрудно вычислить главную часть ключевого уравнения и, следовательно, дать локальное описание дискриминантного множества с перечислением допустимых раскладов бифурцирующих решений.

Литература

Даринский Б.М., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004), с.3-140.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОПИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В R^n

Мамедов Э.М. (Баку)

elchin_mamedov@fromru.com

Рассматривается задача $u_{tt} - \alpha \Delta u_t - \beta \Delta u = f(u)$, $u(0, x) = \hat{u}_0(x)$, $u_t(0, x) = \hat{u}_1(x)$ где $x \in R^n$, $n \geq 1$, $\hat{u}_0(x) \in W_2^1(R^n)$,

$\hat{u}_1(x) \in L_2(R^n)$ -заданные функции, α, β -некоторые положительные числа, $f : C(0, T; W_2^1(R^n)) \rightarrow C(0, T; L_2(R^n))$ -некоторое отображение. Здесь $C(0, T; X)$ -пространство непрерывных отображений $t : u(t) : [0, T] \rightarrow X$, X -гильбертово пространство. $W_2^{-1}(R^n)$ -сопряженное пространство $W_2^1(R^n)$.

Предположим, что $f : W_2^1(R^n) \rightarrow W_2^{-1}(R^n)$ удовлетворяет условию: (М) : Для каждого шара B из $W_2^1(R^n)$ существует $K_B > 0$ такое, что для любых $\rho, \theta \in B$

$$\|f(\rho) - f(\theta)\|_{W_2^{-1}(R^n)} \leq K_B \|\rho - \theta\|_{W_2^1(R^n)}.$$

Справедлива следующая

Теорема. *Предположим, что f удовлетворяет условию (М), $\hat{u}_0(x) \in W_2^1(R^n)$, $\hat{u}_1(x) \in L_2(R^n)$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ -некоторые числа. Тогда существует $T > 0$ такое, что рассматриваемая задача имеет единственное решение $u(t, x)$ обладающее следующими свойствами:*

$$a) u(t, x) \in C(0, T; W_2^1); b) u'(t, x) \in C(0, T; L_2) \cap L_2(0, T; W_2^1);$$

$$\frac{d}{dt}(u'(t), \nu) + \alpha a(u'(t), \nu) + \alpha \beta a(u'(t), \nu) = (f(u(t), \nu)) \text{ для } \forall \nu \in W_2^1, \text{ причем } u(0) = \hat{u}_0, u'(0) = \hat{u}_1, \text{ где } a(u, \nu) = (\nabla u, \nabla \nu).$$

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ¹

Мамчуев М.О. (Нальчик)

matchuev@rambler.ru

В области $\Omega = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < T\}$, рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) - D_{0y}^\alpha u(x, y) = 0, \quad (1)$$

где D_{0t}^γ — оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегриродифференцирования порядка γ ([1, с.9]), $\alpha \in (0, 2)$. Пусть $n \in \{1, 2\}$ выбрано из условия $n - 1 < \alpha \leq n$.

Задача N. В области Ω найти решение $u(x, y)$ уравнения (1), такое, что $D_{0y}^{\alpha-k} u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $1 \leq k \leq n$, $u_{xx}(x, y)$, $D_{0y}^\alpha u(x, y) \in$

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-96625-р_ юг_ а) и Фонда содействия отечественной науке.

$C(\Omega)$, $u_x \in C([0; \infty) \times (0; T))$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-k} u(x, y) = \tau_k(x), \quad 1 \leq k \leq n, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

$$A(y)u_x(0, y) + \sum_{j=1}^m B_j(y)D_{0y}^{\alpha_j} u(0, y) = C(y), \quad 0 < y \leq T, \quad (3)$$

где $\alpha_m < \alpha_{m-1} < \dots < \alpha_1$, $A(y) \neq 0$, $B_1(y) \neq 0$, $\tau_k(x)$, $A(y)$, $B_j(y)$, $C(y)$ – заданные функции.

Теорема. Пусть $\alpha_1 < \frac{\alpha}{2}$, $A(y) \in C^{H(\alpha_1)}[0; T]$, $B_j(y) \in C^{H(\alpha_j)}[0; T]$, $C(y) \in C[0; T]$, $\tau_k(x) \in C[0; \infty)$, и при $x \rightarrow \infty$, $\tau_k(x) = o(\exp(\sigma x^\varepsilon))$, ($k = 1, n$). Тогда существует единственное решение задачи N , в классе функций таких, что $u_x(0, y) \in L[0, T]$, и при $x \rightarrow +\infty$

$$y^{n-\alpha} u(x, y) = o(\exp(\sigma x^\varepsilon)), \quad y^{n-\alpha} u_x(x, y) = o(\exp(\sigma x^\varepsilon)), \quad (4)$$

где $\varepsilon = \frac{2}{2-\alpha}$, $\sigma = \text{const} > 0$.

Условия (4) являются аналогами условий Тихонова ([2]) для уравнения (1).

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. - М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
2. Псху А.В. Докл. Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2003. Т. 6, №2. С. 72-73.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ИНДЕКС ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛАГУНЫ

Мартынова И.С. (Воронеж)

IrinaMartynova@yahoo.ru

При помощи численного моделирования в работе Garulli-Moscenni-Vicino-Tesi [1] получены значения параметров $\lambda_i > 0$, $i \in \overline{1, 5}$, при которых следующая математическая модель лагуны

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 s(t)x_1 - \lambda_2 x_1^2 - \lambda_3 x_2 \frac{x_1}{k+x_1}, \\ \dot{x}_2 = \lambda_4 x_2 \frac{x_1}{k+x_1} - \lambda_5 x_2, \end{cases} \quad (1)$$

где $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – заданная T -периодическая непрерывная функция, имеет T -периодические решения.

В докладе обсуждается теорема, предлагающая теоретическое обоснование численных результатов работы [1]. Для формулировки теоремы введем следующие константы: $s_1 = \min_{t \in [0, T]} s(t)$, $s_2 = \max_{t \in [0, T]} s(t)$, $u_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} s_1$, $p_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} s_2$, $r_1 = \frac{\lambda_5 k}{\lambda_4 - \lambda_5}$, $r_2 = (k + r_1)(\lambda_1 s_2 - \lambda_2 r_1)$. Далее, $\text{гес}(p_1, q_1, p_2, q_2)$ обозначает внутренность прямоугольника с координатами противоположных вершин (p_1, q_1) и (p_2, q_2) , причем имеет место следующая операция сложения: $\text{гес}(x_1, y_1, x_2, y_2) + \text{гес}(p_1, q_1, p_2, q_2) = \text{гес}(x_1 + p_1, y_1 + q_1, x_2 + p_2, y_2 + q_2)$. Наконец, определим $U \subset \mathbb{R}^2$ как $U = \text{гес}\left(0, 0, p_1, \max\{1, r_2\}e^{\lambda_4 T \frac{p_1}{k+p_1} + \lambda_5 T}\right)$. **Теорема.** *Предположим, что $s(t) > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, 5}$, $k > 0$, $\lambda_4 > \lambda_5$, $u_1 > r_1$. Тогда, для всех достаточно малых $\eta > 0$, существует открытое ограниченное множество $U_\eta \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющее условию $U + \text{гес}(\eta, \eta, 0, 0) \subset U_\eta \subset U + \text{гес}(0, 0, \eta, \eta)$, и такое, что для топологической степени $d(I - \Omega, U_\eta)$ оператора Пуанкаре Ω (за период $T > 0$) системы (1) относительно множества U_η имеет место равенство*

$$d(I - \Omega, U_\eta) = 1.$$

Литература

- [1] A. Garulli, C. Mocenni, A. Tesi, A. Vicino. Integrating identification and qualitative analysis for the dynamic model of a lagoon, *Int. J. Bif. Chaos*, Vol. 13, No. 2 (2003) 357–374.

ВЕТВЯЩИЙСЯ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ХОДЖКИНА-ХАКСЛИ

Милованов А.В., Покровский А.Н. (Воронеж, Санкт-Петербург)

avm@econ.vsu.ru, anpokr@petrodvoretz.spb.ru

Объект исследования – модифицированная система уравнений Ходжкина – Хаксли [1]. Цель исследования – изучить поведение потенциала на мембране нервной клетки во времени $V = V(t)$ при вариации управляющих параметров функционирования нервной клетки u, s , которые играют роль параметров возбуждения и торможения соответственно, а также в вычислении границы области периодических решений на плоскости управляющих параметров u, s , внутри

которой колебания потенциала во времени устойчивы.

Методика построения границы области D устойчивости постоянного решения уравнений [1] сводится к линеаризации системы дифференциальных уравнений, вычислению якобиана и решению нелинейного алгебраического уравнения степени $(n-1)$ относительно параметров s, u , где n - количество уравнений исходной системы. По результатам решения строится область D в системе координат s, u . Внутри области D колебания устойчивы.

При вычислении границы области колебаний, не совпадающей, вообще говоря, с границей D , фазовые переменные уравнений изменяются во времени. Заранее трудно определить необходимый для вычислений интервал времени и интервалы значений переменных системы V, t, h, n . Поэтому в программе численного интегрирования системы Ходжкина - Хаксли предусмотрен возврат в любую заданную точку (t_0) и возобновление вычислений с новыми значениями параметров u, s . Если колебания не стабилизируются, интервал времени для вычислений автоматически увеличивается. Наоборот, слишком большой интервал времени (отклонение переменных за период меньше заданной величины) автоматически уменьшается. В этом основной смысл ветвящегося алгоритма.

Литература

[1] Покровский А.Н. Синаптическое управление состоянием возбудимой мембраны // Биофизика, 1985. Т. 30. Вып. 2. С. 370-372.

УТОЧНЕНИЕ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ХОДЖКИНА-ХАКСЛИ

Милованов А.В., Портнов М.М. (Воронеж)

milovanov_av@econ.vsu.ru, mmporntnov@mail.ru

Модифицированная система Ходжкина-Хаксли с управляющими параметрами s, u [1,3] в последнее время является предметом пристального изучения в связи с возможностью практического применения в искусственных нейроноподобных системах в качестве реалистической модели нейронной сети, без привлечения широко известных идей коннекционизма. До сих пор область устойчивости импульсных решений системы Ходжкина-Хаксли рассчитывалась классическими методами, например метода D -разбиений [2], с исполь-

зованием методологии линеаризации, неизбежно приводящей к искажению реальной картины поведения нелинейной системы, хотя и значительно упрощающей численные процедуры и анализ такой системы.

В работе предложена новая методика исследования, не предусматривающая линеаризации исходной системы. Разработаны алгоритм и программа численного исследования нелинейной модифицированной системы Ходжкина-Хаксли. Программа делает все необходимые вычисления и строит область, напоминающую область D , рассчитанную с применением методологии линеаризации [2,3], но имеющая различные нелинейные включения (возможно, фрактальной природы), обусловленные нелинейностями исходной системы.

Литература

1. Покровский А.Н. Процессы управления в нервных клетках. – Л., Изд-во ЛГУ, 1987.
2. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. – М.: Высшая школа, 2001. – С.41-44.
3. Покровский А.Н. //Доклады Академии наук, 2004. Том 395, №3, с.1-3.

МОДАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Минюк С.А., Панасик О.А. (Гродно, Беларусь)

zhuk@grsu.by

Объект исследования – линейная алгебро-дифференциальная система Σ :

$$\frac{dA_0x(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t),$$

где $A_0, A(B)$ – постоянные матрицы размерности $n \times n$ ($n \times r$), пара матриц (A_0, A) – регулярная (существует комплексное λ , при котором $\det[\lambda A_0 - A] \neq 0$); x – n -вектор фазовых переменных; u – r -вектор управления.

Пусть $\det[\lambda A_0 - A] = a_0 \lambda^N + a_1 \lambda^{N-1} + \dots + a_N$, где $N \leq n, a_0 \neq 0$ – характеристический многочлен матричного пучка $\lambda A_0 - A$.

Обозначим через $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ набор, вообще говоря, комплексных чисел, где каждое λ_j записано столько раз, какова его кратность, симметричный относительно действительной оси. т.е. если число $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ ($i = \sqrt{-1}$) содержится в наборе Λ , то и сопря-

женное число $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j \in \Lambda$. Такой набор Λ назовем допустимым спектром для системы Σ . Ясно, что набор Λ допустим, если существуют такие вещественные числа $a_i, i = \overline{0, N}, a_0 = 1$, что указанный набор составляет совокупность корней уравнения $\sum_{i=0}^N a_i \lambda^{N-i} = 0$.

Определение 1. Систему Σ назовем модально управляемой (или управляемой спектром), если для произвольного наперед заданного допустимого набора Λ существует такая линейная обратная связь (регулятор) $u(t) = Dx(t)$, где D – постоянная $r \times n$ матрица, что спектр замкнутой системы Σ_1

$$A_0 \dot{x}(t) = [A + BD]x(t)$$

совпадает с Λ , т.е. набор Λ составляет совокупность характеристических чисел матричного пучка $\lambda A_0 - A - BD$, с учетом их кратности (корней уравнения $\det[\lambda A_0 - A - BD] = 0$).

Теорема 1. Регулярная система Σ модально управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}[\lambda A_0 - A, B] = n$$

для всех комплексных λ .

ПЛАТОНИСТСКАЯ КОМПОНЕНТА СИСТЕМНОЙ ТРИАДЫ ПРОГРАММ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Михайлова Н.В. (Минск)

erovenko@bsu.by

Математические теории развиваются, сохраняя единство разнообразных ветвей математики, согласуясь с физической реальностью, и каждый раз на новом мировоззренческом уровне возвращается к целостному философскому пониманию мира. Эффективность математики, хорошо приспособленной для формулировки физических законов, свидетельствует о живучести платонистского взгляда на математику. Умеренный скептический платонизм можно понимать как потенциальную убедительность, когда истинной считается теория соответствующая чему-то существующему вне нас. Обоснование математики как систематической науки, охватывающей различные ветви естественной истории математики, должно использовать экстраординарные концепции. Их можно интерпретировать как комбинации

обычных концепций, в которых при сохранении качественных различий имеется достаточно оснований для оправдания конкретных областей математики.

Целостность программы обоснования математики позволяет объяснить и познать во всей специфике то, что нельзя вывести исходя лишь из внешних признаков по отношению к исследуемой проблеме. Стремление к целостности неразрывно связано с идеей триадичности, которая позволяет в проблеме обоснования замкнуть бинарную оппозицию "формализм — интуиционизм" в системную триаду, объединяющую при равноправных элемента обоснования, а именно, "формализм — платонизм — интуиционизм" каждый из которых позволяет участвовать в разрешении противоречий как некая "мера компромисса" во взаимодоплнительных программах обоснования. Платонистская компонента в обосновании математики позволяет снять субъективные сомнения в абсолютности существования некоторых концептуально шатких определений сложно сконструированных множеств, без которых невозможен прогресс математики. Различные варианты платонизма опираются на аргументации в пользу реального существования мира математических идей [1]. Математический реализм стремится объяснить естественность математических образов не из свойств разума, а из отношения этих образов к объективным сущностям.

Рациональный момент платоновской компоненты в системной триаде обоснования состоит в том, что она фиксирует связь фундаментальных математических понятий с категориальными представлениями о мире. Поскольку формализация допускает не вполне формализуемые теории, то целостность программы обоснования характеризует их лучше, чем полнота. Тринитарная методология не заменяет, а развивает диалектику, раскрывая ее новые возможности, когда о математике, при сохранении достаточной точности, требуется лишь сохранять целостность исследуемых математических объектов. Признание молчаливым большинством прогресса с точки зрения философии математики при тринитарном подходе к обоснованию показало бы не только философскую принципиальность, но и методологическую силу философских результатов. Если философскую концепцию можно отвергнуть на чисто математических основаниях, развивая до пункта, где она входит в конфликт с имеющимся математическим опытом, то следует подчеркнуть важность и необходимость для образования теоретических экспериментов в философии

Литература

1. Михайлова Н.В. Загадка "непостижимой эффективности математики" и математический платонизм // Математика: проблемы выкладання. 2007. №1. С.12—18.

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ПЛОСКОГО УПРУГОГО ВАЛА

Мотузка В.А., Мотузка Д.А. (Воронеж)

Основное дифференциальное уравнение для определения функции напряжений в задаче кручения имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = -2 \quad (1)$$

$$\tau_{rz} = G \cdot \theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}; \quad \tau_{z\varphi} = -G \cdot \theta \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2)$$

Для полого вала должны выполняться следующие граничные условия [2]:

$$\psi(r = R_1, \varphi) = \Omega = const; \quad \psi(r = R_2, \varphi) = 0 \quad (3)$$

Авторами получено новое решение данной задачи:

$$\psi = Ar^2 + B + C \ln r \quad (4)$$

$$A = -\frac{1}{2}; \quad C = \frac{\left[\Omega - \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) \right]}{\ln(R_1/R_2)} \quad (5)$$

$$B = -\frac{\left[\Omega - \frac{1}{2} (R_2^2 - R_1^2) \right] \cdot \ln R_2}{\ln(R_1/R_2)} + \frac{R_2^2}{2} \quad (6)$$

Формула (4) дает прямое обобщение классического решения задачи о кручении сплошного круглого вала, приведенного в [1].

Константа Ω находится из следующего уравнения [2]:

$$\mu = 2G\theta \iint_L \psi(x, y) dL + 2G\theta\Omega L, \quad (7)$$

где L — площадь кольца; μ — заданный крутящий момент; G и θ — физические константы.

Литература

[1] Варданян Г. С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. — М., 1995 — 572 с.

[2] Арутюнян Н. Х. Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. — М., «Наука», 1963 — 686 с.

О ТОЧКАХ БИФУРКАЦИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Мустафокулов Р. (г. Душанбе)

mitas@mail.tj

Пусть Γ — связный открытый геометрический граф из R^3 , состоящий из объединения конечного набора $\{\gamma_i\}_1^m$, взаимно непересекающихся прямолинейных интервалов (ребер) и совокупности $J(\Gamma)$ некоторых их общих концов (внутренних вершин). Множество остальных концов γ_i (не вошедших в Γ), называемых граничными вершинами, обозначим через $\partial\Gamma$. Пусть $V(\Gamma) = J(\Gamma) \cup \partial\Gamma$ и $\overset{\circ}{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^m$.

Через $\mathcal{M}$ обозначим множество $y(\cdot)$ непрерывных на Γ функций, сужение $y_i(\cdot)$ которых на $\overset{\circ}{\Gamma}$ принадлежит классу $C^3(\overset{\circ}{\Gamma})$ и в вершинах графа удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} y_i''(a) &= 0 \quad (i \in I(a), a \in V(\Gamma)), \\ \sum_{i \in I(a)} [(p_i y_i'')' - q_i y_i'](a+0) + \rho(a) y(a) &= 0 \quad (a \in J(\Gamma)), \end{aligned}$$

где $I(a)$ — множество индексов ребер γ_i , примыкающих к a и $\rho(a)$ — соответствующая вершине a неотрицательное число.

Рассмотрим на $\mathcal{M}$ дифференциальное уравнение

$$Ly = (p(x)y'')' - (q(x)y')' = f(x, y; \mu) \quad (x \in \overset{\circ}{\Gamma}), \quad (1)$$

зависящее от скалярного параметра μ вместе с граничными условиями на $\partial\Gamma$:

$$y(a; \mu) = 0 \quad (a \in \partial\Gamma). \quad (2)$$

Будем считать, что задача (1)-(2) имеют нулевое решение (состояние равновесие) при всех значениях параметра μ : $f(x, 0; \mu) \equiv 0$. Ниже

обсуждается вопрос о рождении малых неотрицательных решений из состояния равновесия.

Значение параметра $\mu = \mu_0$ называется *точкой бифуркации* задачи о неотрицательных решениях, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\mu : |\mu - \mu_0| < \varepsilon$, при котором задачи (1)-(2) имеет нулевое неотрицательное решение $y(x; \mu)$ такое, что $\|y(x; \mu)\| < \varepsilon$ ($x \in \overset{\circ}{\Gamma}$).

Пусть правая часть уравнения (1) представима в виде

$$f(x, y; \mu) = a(x; \mu)y + \varphi(x, y; \mu) + \varepsilon(x, y; \mu) \quad (y(x) \geq 0, x \in \overset{\circ}{\Gamma}), \quad (3)$$

где $a(x; \mu)$ — непрерывная по x и μ функция, $\varphi(x, y; \mu)$ — однородный член порядка k относительно y , а $\varepsilon(x, y; \mu)$ — член высшего порядка малости для всех значениях μ . Предположим, что уравнение

$$\lambda Ly = a(x; \mu)y \quad (y \in \mathfrak{M}; x \in \Gamma^\circ) \quad (4)$$

при $\mu = \mu_0$ и граничных условиях (2) имеет при $\lambda = 1$ единственное неотрицательное решение $y_0(x; \mu_0)$. Из соображения непрерывности вытекает, что задача (4), (2) при близких к μ_0 значениях μ имеет непрерывно зависящее от μ собственное значение $\lambda(\mu)$, удовлетворяющее условию $\lambda(\mu_0) = 1$. Обозначим $\alpha(\mu) = \lambda(\mu) - 1$.

Теорема. Пусть в каждой окрестности $[\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon]$ точки μ_0 выполнено одно из следующих условий: либо $\operatorname{sgn}_{\mu < \mu_0} \alpha(\mu) \neq \operatorname{sgn}_{\mu > \mu_0} \alpha(\mu)$, либо $\operatorname{sgn}_{\mu < \mu_0} \alpha(\mu) = \operatorname{sgn}_{\mu > \mu_0} \alpha(\mu) = \operatorname{sgn} \alpha(\mu)$, имеет место представление (3) и в случае $\operatorname{sgn} \alpha(\mu) = -1$ задачи

$$Ly = a(x; \mu_0)y + \varphi[x, y_0(x; \mu_0); \mu_0], \quad y(0; \mu_0) = 0,$$

а в случае $\operatorname{sgn} \alpha(\mu) = 1$ задача

$$Ly = a(x; \mu_0)y - \varphi[x, y_0(x; \mu_0); \mu_0], \quad y(0; \mu_0) = 0$$

имеет положительное решение. Тогда точка μ_0 является точкой бифуркации задачи о неотрицательных решениях краевой задачи (1)-(2) на графе Γ .

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Наимов А.Н., Кокшаров И.С. (Вологда)

naib67@rambler.ru, pm02kis@yandex.ru

Рассмотрим периодическую задачу

$$z'' = \overline{(z' - c_1 z)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z' - c_r z)^{m_r}} + f(t, z, z'), \quad 0 < t < \omega, \quad (1)$$

$$z(0) = z(\omega), \quad z'(0) = z'(\omega), \quad (2)$$

где $\omega > 0$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{C}$, верхняя черта означает комплексное сопряжение, $r, m_1, \dots, m_r$ - натуральные числа, $m = m_1 + \dots + m_r$, $f \in R_{\omega, m}$, $R_{\omega, m}$ - множество непрерывных отображений $f(t, z_1, z_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, ω -периодических по t и удовлетворяющих условию

$$\lim_{|z_1|+|z_2| \rightarrow \infty} (|z_1| + |z_2|)^{-m} \max_{0 \leq t \leq \omega} |f(t, z_1, z_2)| = 0.$$

В работе [1] исследована априорная оценка и существование ω -периодических решений для систем вида

$$z'' = \overline{(z' - B_1(z))^{m_1} \cdot \dots \cdot (z' - B_r(z))^{m_r}} + f(t, z, z'),$$

где $f \in R_{\omega, m}$, отображения $B_j : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, r$ непрерывные, положительно однородные первого порядка и удовлетворяют условиям: 1) при каждом $j = 1, \dots, r$ система $w' = B_j(w)$ не имеет ненулевых ω -периодических решений; 2) $B_{j_1}(z) \neq B_{j_2}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $j_1 \neq j_2$; 3) при каждом фиксированном $z_0 \in \mathbb{C}$ автономная система $w' = \overline{(w - B_1(z_0))^{m_1} \cdot \dots \cdot (w - B_r(z_0))^{m_r}}$ не имеет нестационарных ограниченных траекторий. В случае системы (1) условие 3) не выполняется. В данном случае можно обходить условие 3) и доказать разрешимость задачи (1)-(2).

Теорема. Пусть множество всевозможных выпуклых комбинаций $c_1, \dots, c_r$ не содержит ни одно из чисел $i2\pi k/\omega$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда задача (1)-(2) разрешима при любом $f \in R_{\omega, m}$.

Литература

1. Наимов А.Н. // Материалы международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения Новосибирск, 2007. С. 238-239.

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Небольсина М.Н. (Воронеж)

marinanebolsina@yandex.ru

Рассматривается краевая задача

$$-u''(t) = Au(t), \quad t \in [0, a], \quad (1)$$

$$u'(0) = \varphi, \quad u'(a) = \psi, \quad (2)$$

где A — некоторый линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с плотной в E областью определения $D(A)$. Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1) удовлетворяющее условиям (2) ($\varphi, \psi \in D(A)$).

Определение 1. Краевая задача (1)-(2) называется корректной, если она однозначно разрешима для всех $\varphi, \psi \in D(A)$ и существует $c > 0$ такое, что для всех решений $u(t)$ справедливы неравенства

$$\left\| \int_0^a \sin \frac{\pi}{a} \left(n - \frac{1}{2}\right) u(t) dt \right\| \leq c \frac{(\|\varphi\| + \|\psi\|)}{n - \frac{1}{2}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Отметим, что по Адамару функции $u(t)$, удовлетворяющие условию (3) называются функциями с ограниченными отклонениями.

Теорема 1. Задача (1)-(2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при всех $n = 1, 2, \dots$ точки $\frac{\pi^2}{a^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и выполняется оценка

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \left\| \left(A - \frac{\pi^2}{a^2} \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 I\right) \right\| < c. \quad (4)$$

Заметим, что если задача (1)-(2) корректно разрешима, то в силу ее линейности существуют линейные операторы $S(t, A)$ такие, что

$S(0, A) = I$, $S'(a, A) = I$, $S'(0, A) = 0$, $D(A) \subset D(S(t, A))$, $S(t) = \frac{\cos A(a-t)}{\cos At}$ и для любого $x \in D(A)$

$$\frac{d^2 S(t, A)x}{dt^2} = AS(t, A)x, \quad t \in [0, a].$$

В таких обозначениях решением уравнения (1) с условиями

$$u'(0) = \varphi, u'(a) = \psi$$

является функция

$$u(t) = S(t, A)\varphi + S'(a-t, A)\psi. \quad (5)$$

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ УПРУГОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ

Никитин А.А. (Москва)

nikitin@proc.ru

Данная работа посвящена изучению задачи граничного управления, основанной на смешанной задаче для волнового уравнения с неоднородным условием второго рода на левом конце струны $u_x(0, t) = \mu(t)$ и с упруго закрепленным правым концом $u_x(l, t) + hu(l, t) = 0$. В качестве решения этой задачи рассматривается обобщенное решение волнового уравнения из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$. Отметим, что этот класс был введен В. А. Ильиным в работе [1]. Принадлежность обобщенного решения данному классу позволяет точно определить требования гладкости, накладываемые на начальные, финальные и граничные условия.

Под задачей граничного управления понимается задача нахождения функции $\mu(t) \in L_2[0, T]$, такой, чтобы для решения $u(x, t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$ рассматриваемой смешанной задачи с заданными начальными условиями в момент времени $t = T$ выполнялись заданные финальные условия.

При $T > 2l$ данная задача имеет бесконечно много решений. Поэтому может быть поставлена задача об определении среди них оптимального. При этом среди всех функций $\mu(t)$, являющихся граничными управлениями, отыскивается функция, которая доставляет

минимум интегралу граничной энергии $\int_0^T \mu^2(t) dt$.

Трудность решения этой задачи состоит в отсутствии условия закрепления. Поэтому, кроме условия связи, являющегося равенством функций из L_2 , потребовалось выписать еще одно условие согласования начальных и финальных смещений. Для решения поставленной задачи потребовалось разработать новый метод оптимизации, основанный на продолжении финальных функций на отрезок $[-T, T]$, а также использовать технику из работ [2]–[3]. Функция $\mu(t)$, минимизирующая указанный интеграл выписывается в явном виде.

Литература

1. Ильин В.А., Дифференциальные уравнения. 2000. Т.36, N 11. с. 1513–1528.
2. Ильин В.А., Моисеев Е.И., Дифференциальные уравнения, 2007. Т.43, N 12. с. 1655–1663.
3. Ильин В.А., Моисеев Е.И., Дифференциальные уравнения, 2008. Т.44, N 1. с. 89–110.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ БЛОКА КОМПЕНСАЦИИ ДАВЛЕНИЯ АТОМНОГО РЕКАТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОГНИТИВНОЙ ГРАФИКИ

Новосёлов Ю.В. (Москва)

NovoselovA500@yandex.ru

Достаточно очевидно, что графический образ-картинка обращается прежде всего именно к образному мышлению человека, к его интуиции, и только через них и лишь на последующих этапах принятия решений включаются логико-дедуктивные процедуры анализа этих визуальных восприятий [1]. Можно сказать, что графический образ является инструментом прямого воздействия на интуицию человека. Невысокая эффективность управленческих решений, сделанных на основе интуиции, объясняется тем, что причины и следствия в сложных системах разнесены во времени и пространстве, поэтому человеку трудно предсказать, какие последствия вызовет то или иное решение. В тех случаях, когда для оценки принимаемых решений эксперимент с реальными системами невозможен либо слишком дорог, используется когнитивная графика [2].

Одной из отраслей, в которых находит своё применение когнитивная графика, является энергетика. Когнитивные образы широко используются для диагностики состояния атомных станций. В настоящее время большое значение в атомной энергетике имеет ис-

пользование Водо-Водяных Энергетических Ректоров (ВВЭР). Они применяются для выработки 30% электроэнергии в России. Одной из важнейших задач при эксплуатации ВВЭР является обеспечение его долговечной работы. Для этого необходимо обеспечить поддержание работы всех блоков атомной станции в штатном режиме и своевременно устранять причины аварий. Одним из важнейших блоков первого контура ВВЭР является компенсатор объёма (давления) (КО). Он предназначен для компенсации температурных изменений объёма воды, заполняющей первый контур реактора. Подсистема компенсации объёма содержит 80 контролируемых параметров. Работа данной подсистемы регламентируется набором из 396 производственных правил. Большое количество анализируемых данных, требует значительного времени для их ручной обработки и принятия решения согласно сложившейся ситуации. Для сокращения времени, необходимого на принятие решения в конкретной ситуации, необходимо наглядно представить её. Наиболее быстро человеком читается динамически синтезируемый образ, построенный на базе измеренных, вычисленных и справочных данных. Хорошо развитый у человека двумерный и трехмерный механизм распознавания образов, а также чувство симметрии позволяет очень быстро и эффективно воспринимать и обрабатывать различные виды данных, если они представлены как зрительные когнитивные образы.

Система представления информации, основанная на идеях когнитивной графики, может прийти на помощь лицам, принимающим решение, которые зачастую испытывают стрессовые перегрузки при работе с большими объемами информации [3]. Проектирование, разработка и применение систем поддержки принятия решений на основе когнитивной графики в сфере атомной энергетики приведет к экономии бюджетных средств, а своевременно принятые меры по повышению автоматизации управления атомной станцией позволят сократить время и средства на диагностику и предотвращение аварий.

Литература

1. ВАГИН В.Н., ГОЛОВИНА Е.Ю., ЗАГОРЯНСКАЯ А.А., ФОМИНА М.В. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах. Изд-во Физматлит, 2004. - 703 с.
2. ЗЕНКИН А.А. ПОСПЕЛОВ Д.А. Когнитивная компьютерная графика. - М: Наука, 1991. - 192 с.
3. БАШМАКОВ А.И., БАШМАКОВ И.А. Интеллектуальные информационные технологии. - М.:

ОБОВЩЕННАЯ ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Огарков В.Б., Бугаков В.М. (Воронеж)

Рассмотрена задача обобщенной симметричной деформации пластического цилиндра под действием давлений p и q .

В учебнике [1] дано аналитическое решение данной задачи для частного случая плоской деформации ($\varepsilon_z = 0$).

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T \left(\ln \frac{r}{T} + C_1 \right) \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T \left(\ln \frac{r}{r_T} + C_1 + 1 \right); \quad \sigma_z = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T \left(\ln \frac{r}{r_T} + C_1 + \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_i = \sigma_T; \quad \sigma_\theta - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_T \quad (3)$$

Отметим, что выражения (1)–(2) содержат только одну свободную константу C_1 , что не позволяет реализовать полную пластическую деформацию цилиндра (двухточечная краевая задача).

Авторами в случае обобщения плоской деформации впервые получено точное аналитическое решение:

$$\sigma_r = C_4 (1 + 2 \ln r) + 2C_3; \quad \sigma_\theta = C_4 (3 + 2 \ln r) + 2C_3 \quad (4)$$

$$\sigma_z = 2C_4 \ln r + 2C_3; \quad 2 - \beta = \frac{-8C_3C_4 \pm \sqrt{64C_3^2C_4^2 - 4 \cdot 2C_3^2[14C_4^2 - 2\sigma_T^2]}}{4C_3^2} \quad (5)$$

При воздействии сил p и q :

$$C_4 = \frac{(q-p)}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2}; \quad C_3 = -\frac{p}{2} - \frac{C_4}{2} (1 + 2 \ln r_1); \quad \frac{\sqrt{7}|q-p|}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2} \leq \sigma_T \quad (6)$$

Решение (4)–(6) позволяет реализовать полное пластическое состояние цилиндра в случае $\varepsilon_z = \text{const} \neq 0$. Последнее условие реализуется в практических задачах.

Без решения (4)–(6) переход к изучению слоистого цилиндра невозможен.

Литература

[1] Н. Н. Малинин. Прикладная теория пластичности и ползучести.-М., «Машиностроение», 1975—400с.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ШАРА

Огарков В.Б., Мильцин А.Н. (Воронеж)

Рассмотрена задача центрально-симметричного деформирования упруго-пластического шара по теории малых упруго-пластических деформаций.

Уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (1)$$

Геометрические соотношения:

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r = 0 \quad (2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{d\varphi}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\varphi}{r} \quad (3)$$

Геометрические соотношения по деформационной теории для сжимаемого материала записывается так [1].

$$\sigma_{ср.} = 3k\varepsilon_{ср.}; \quad l_i = \psi S_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

Для упруго-пластического материала без упрочнения получено аналитическое решение:

$$\sigma_r = 3kA + \frac{C_1}{r^3}; \quad \sigma_\theta = 3kA - \frac{C_1}{2r^3}; \quad (5)$$

В отличие от упругого решения напряжения (5) зависят в явной форме от модуля k , что соответствует физическому синусу. Дано обобщение данного решения на неоднородный модуль $k(r)$.

Приведено аналитическое решение задачи о вибрации пластического шара, зависящее от физических констант k и ρ .

Для пластического шара со степенным упрочнением дано аналитическое решение с использованием простого трансцендентного уравнения для функции напряжений.

Литература

[1] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М., «Наука», 1969. — 430 с.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ АНОРМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Павлова Н. Г. (Москва)

natasharussia@mail.ru

Рассматривается задача оптимального импульсного управления

$$J = J(x_1, x_2, u, \mu) = W_0(x_1, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f^0(x(t), u(t), t) dt + \\ + \int_{[t_1, t_2]} g^0(t) d\mu(t) \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$dx(t) = f(x(t), u(t), t) dt + G(t) d\mu(t), \quad t \in [t_1, t_2], \quad (2)$$

$$W(x_1, x_2) = 0, \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2, \quad \mu \in \mathbb{K}. \quad (3)$$

Здесь $t \in [t_1, t_2]$ — время, $t_1 < t_2$ заданы, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ — управление, f — n -мерная, g^0 — k -мерная, G — $n \times k$ -мерная, а W — w -мерная вектор-функции (k, n, m, w — натуральные числа), W_0 и f^0 — скалярные функции. Функция W_0 непрерывно дифференцируема, W дважды непрерывно дифференцируема. Для п.в. t $f^0(x, u, t)$ непрерывно дифференцируемая, а $f(x, u, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по (x, u) функция для почти всех t ; для любых фиксированных (x, u) функции $f^0(x, u, t)$, $\partial f^0(x, u, t)/\partial(x, u)$, $f(x, u, t)$, $\partial f(x, u, t)/\partial(x, u)$, $\partial^2 f(x, u, t)/\partial(x, u)^2$ измеримы по t и на любом ограниченном множестве ограничены и непрерывны по (x, u) равномерно по t . Функции g_0 и G непрерывны. $\mathbb{K} = \left\{ \mu \in \mathbb{C}^*([t_1, t_2]; \mathbb{R}^k) : \int_B \varphi(t) d\mu \geq \right.$

$0 \forall$ борел. $B \subset [t_1, t_2]$, $\forall \varphi \in \mathbb{C}[t_1, t_2] \mid \varphi(t) \in K^0 \forall t \}$, где $K \subseteq \mathbb{R}^k$ — заданный острый выпуклый замкнутый конус, K^* — сопряженный к нему. В качестве класса допустимых управлений рассматривается множество пар $(u, \mu) : \mu \in \mathbb{K}, u \in L_\infty^m[t_1, t_2]$.

Получены необходимые условия оптимальности второго порядка для задачи (1)-(3), основанные на модифицированной функции Лагранжа.

О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВИНЕРА-ХОПФА В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Пасенчук А.Э. (Новочеркасск)

pasenchuk@mail.ru

Пусть s — линейное пространство двусторонних финитных последовательностей. Введем на s счетно-нормированную топологию, порождаемую набором норм: $\|\{\varphi_j\}\|_m = \sum (|j| + 1)^m |\varphi_j|$, $m = 0, 1, \dots$. Пополнение s является счетно-нормированным пространством, которое мы обозначим через l . Пространство l^* с сильной топологией можно рассматривать как пополнение s по этой топологии. В пространствах l, l^* определим стандартные операторы проектирования $P_\pm$ и положим $\pi = (P_- l^*) \oplus (P_+ l)$. Множество π с координатными линейными операциями и топологией декартова произведения является линейным топологическим пространством. В этом пространстве можно ввести операцию свертывания $*$, превращающую его в коммутативную топологическую алгебру (КТА) с единицей. Пусть $a = \{a_j\} \in \pi$, назовем преобразованием Лорана этого элемента и будем обозначать $A(\xi) = L(a)$ пару функций $A(\xi) = (A^-(\xi), A^+(\xi))$, $A^-(\xi) = \sum_{j < 0} a_j \xi^j, |\xi| > 1, A^+(\xi) = \sum_{j \geq 0} a_j \xi^j, |\xi| \leq 1$.

Положим $\Pi = L(\pi)$ и введем в Π структуру КТА с очевидными линейными операциями, умножением: $A(\xi) \cdot B(\xi) = L(L^{-1}(A(\xi)) * L^{-1}(B(\xi)))$ и следующей топологией: будем считать, что $A_n(\xi) \rightarrow 0$ в Π , если $L^{-1}(A_n(\xi)) \rightarrow 0$ в π . Через $M_n(\pi), M_n(\Pi)$ обозначим топологические матричные алгебры порядка n с элементами из π, Π соответственно.

В пространстве l^n рассмотрим дискретный оператор Винера-

Хопфа:

$$(W_a \varphi)_k = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k-j} \varphi_j, k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $a = \{a_j\}$ последовательность матриц порядка n , $\varphi = \{\varphi_j\} \in l^n$.

Современное состояние теории оператора (1) и родственных операторов, а также также ссылки на многочисленные оригинальные работы можно найти в обзоре [1].

Теорема 1. Оператор $W_a : l^n \rightarrow l^n$ ограничен тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий: 1) $a = \{a_j\} \in M_n(\pi)$; 2) $A(\xi) = L(a) \in M_n(\Pi)$.

Матрицу-функцию $A(\xi) = L(a)$ называют символом оператора (1).

Теорема 2. Оператор $W_a : l^n \rightarrow l^n$ фредгольмов тогда и только тогда, когда его символ обратим в алгебре $M_n(\Pi)$.

Ядро и образ оператора (1) эффективно описываются в терминах обобщенной факторизации Винера-Хопфа.

Аналогичные результаты получены для континуальных операторов Винера-Хопфа.

Литература

1. G.S. Litvinchuk, J.M. Spitkovski. Factorization of Measurable Matrix Functions. Oper. Theory: Advances and Appl. 25, Birkhauser, Basel, 1987.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРОВ СЛАБОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Пелешенко Б.И. (Днепропетровск)

Пусть Φ - объединение функции $\varphi(t) = \text{sign } t$ и множества положительных, возрастающих выпуклых или вогнутых на полупрямой $[0, \infty)$ функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям $\lim_{t \rightarrow +0} \varphi(t) = \varphi(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$ и $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$, когда $t \rightarrow +0$, $t \rightarrow \infty$. Для функции $\varphi(t)$ из множества Φ обозначим $\gamma_\varphi, \delta_\varphi$ соответственно её нижний и верхний показатели растяжений. Пусть LM обозначает множество положительных измеримых на полуоси $(0, \infty)$ медленно меняющихся в нуле и на бесконечности функций $h(t)$. Обозначим через $S(R^n)$

пространство вещественных измеримых функций на R^n и через $f^*(t)$ не возрастающую перестановку модуля функции $f(x) \in S(R^n)$.

Пусть $a \in (0, \infty)$ и $\varphi(t) \in \Phi$, пространство Лоренца $\Lambda_{\varphi,a}(R^n)$ состоит из функций $f(x) \in S(R^n)$, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{\Lambda_{\varphi,a}} = \left\{ \int_0^\infty (f^*(t))^a d\varphi(t) \right\}^{1/a} \text{ в случае } f(x) \neq \text{sign } t, 0 < a < \infty \text{ или}$$

квазинорма $\|f\|_{\Lambda_{\varphi,\infty}} = \sup_{0 < t < \infty} f^*(t)\varphi(t)$, если $a = \infty$. Пусть функ-

ции $\varphi(t), \psi(t) \in \Phi$, квазилинейный оператор T называется оператором слабого типа (φ, ψ) , если найдется такое $C > 0$, что для любой $f(x) \in \Lambda_{\varphi,1}(R^n)$ и $t > 0$ выполняется неравенство $(Tf)^*(t) \leq$

$$C(\psi(t))^{-1} \int_0^\infty f^*(u) d\varphi(u).$$

В данной работе доказаны теоремы интерполяции квазилинейных операторов слабого типа $(\varphi_0, \psi_0), (\varphi_1, \psi_1)$ в пространствах Лоренца $\Lambda_{\varphi,a}(R^n)$ в случае, когда одна из функций $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$, $\varphi_1(t)/\varphi_0(t)$ является медленно меняющейся в нуле и на бесконечности. Полученные теоремы интерполяции операторов дополняют соответствующие результаты А. Кальдерона, С.Г. Крейна и Е.М. Семенова, К. Беннета и К. Рудника и других авторов.

Теорема 1. Пусть $a > 1$ и функции $\varphi_0(t), \psi_0(t), \varphi_1(t), \psi_1(t)$ из множества Φ такие, что $\varphi_1(t) \neq \text{sign } t, \delta_{\varphi_1} < \gamma_{\varphi_0}$, функция $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ возрастает, функция $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ возрастает или убывает, области значений функций $\varphi_0(t)/\varphi_1(t), \psi_0(t)/\psi_1(t)$ совпадают и $m(t)$ - измеримое положительное решение уравнения $\varphi_0(m(t))/\varphi_1(m(t)) = \psi_0(t)/\psi_1(t)$. Пусть $h(t)$ - непрерывная функция из множества LM ,

удовлетворяющая условиям: $\int_0^1 \frac{dt}{th(t)} = \infty, \int_1^\infty \frac{dt}{th(t)} < \infty$, и при любом

$$b \in (0, \infty) \text{ сходится интеграл } \int_0^b \left(\varphi_0'(t) \left(1 + h(t) \int_t^\infty \frac{du}{uh(u)} \right) \right)^a t^{\alpha-1} \frac{dt}{h(t)}$$

$= \varphi(b)$. Если T - квазилинейный оператор слабого типа $(\varphi_0, \psi_0), (\varphi_1, \psi_1)$ одновременно, то существует такое $C_1 > 0$, что для всякой функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi,a}(R^n)$ выполняется неравенство

$$\int_0^\infty ((Tf)^*(m^{-1}(t)))^a \psi_0^a(m^{-1}(t)) \frac{dt}{th(t)} \leq C_1^a \int_0^\infty (f^*(t))^a d\varphi(t).$$

Теорема 2. Пусть $a \in (0, 1]$, функции $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \psi_0(t), \psi_1(t)$ из множества Φ таковы, что $\varphi_1(t) \neq \text{sign } t, \varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ возрастает, $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ возрастает или убывает, области значений функций $\varphi_0(t)/\varphi_1(t)$ и $\psi_0(t)/\psi_1(t)$ совпадают.

Если для функций $\psi(t)$, $\varphi(t)$ из множества Φ выполняются условия

$$\sup_{0 < t < \infty} \frac{\int_0^t [\varphi_1(t) - \varphi_1(z)]^a [\varphi_1(z)]^{-a} d\psi(z) + \varphi_0^a(t) \int_t^\infty [\varphi_0(z)]^{-a} d\psi(z)}{\varphi(t)} < \infty,$$

$$\sup_{0 < t < \infty} (\psi(t)/\varphi(t)) < \infty$$

и квазилинейный оператор T слабого типа (φ_0, ψ_0) , (φ_1, ψ_1) одновременно, то существует такая константа $C_2 > 0$, что для всех функций $f(x) \in \Lambda_{\varphi, a}(R^n)$ выполняется неравенство

$$\int_0^\infty (\psi_0(m^{-1}(t))[\varphi_0(t)]^{-1} (Tf)^*(m^{-1}(t)))^a d\varphi(t) \leq C_2^a \int_0^\infty (f^*(t))^a d\varphi(t)$$

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАХ¹

Пенкин О.М. (Белгород)

На стратифицированном множестве (связном множестве, составленном из конечного числа гладких многообразий – подмногообразий фиксированного евклидова пространства, примыкающих друг к другу по типу клеточного комплекса) можно определить оператор дивергенции на специальных векторных полях по аналогии с классическим его определением. А именно, он оказывается плотностью потока векторного поля по так называемой "стратифицированной мере". Как следствие, на достаточно гладких скалярных функциях удается определить точный аналог оператора Лапласа – Бельтрами.

В докладе приводятся аналогии некоторых классических свойств решений неравенства вида $\Delta u \geq 0$ (субгармонических функций) на стратифицированном множестве. В числе них – сильный принцип максимума. В отличие от классического случая, формульный аппарат для средних по сферам субгармонических функций на стратифицированных множествах значительно более громоздок. К примеру, вместо простой формулы связывающей значения в центрах сфер

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ: проект 07-01-00299

со средними по этим сферам приобретает вид дифференциального неравенства

$$\varphi_n(r)f'_n(r) + \dots + \varphi_0(r)f'_0(r) \geq 0,$$

где $f'_k(r)$ – производная от среднего по некоторым k -мерным фрагментам сферы. Под сферой мы понимаем пересечение обычной сферы объемлющего пространства со стратифицированным множеством в случае плоских стратов (в этом случае $\varphi_k(r) = \alpha_k r^k$). В общем случае сфера склеивается из фрагментов геодезических сфер различных размерностей. Приведенное выше неравенство удастся применить к доказательству строгого принципа максимума.

Часть приводимых нами результатов выполнены совместно с С.Н. Ощепковой и Д.В. Савастеевым.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Пеньков В.Б., Викторов Д.В., Саталкина Л.В. (Липецк)
viktorp@lipetsk.ru

Прикладная сторона означенной темы восходит к задачам термоэластостатики, в которых состояние сплошной среды подчинено уравнениям равновесия, закону термоупругости Дюамеля - Неймана; малые перемещения связаны с деформациями соотношениями Коши. Разрешающей является система дифференциальных уравнений Ламе и Пуассона эллиптического типа относительно вектора перемещения и температуры.

Метод граничных состояний [1] исходит из понятия состояния среды, под которым понимается достаточный набор характеристик поля. В термоэластостатике удобно под внутренним состоянием понимать набор из вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений, температуры. Множество допустимых состояний (т.е. удовлетворяющих уравнениям среды) образует пространство внутренних состояний, линейное относительно операций суммирования состояний и умножения состояния на число. След внутреннего состояния на границе тела (векторы поверхностных перемещений, усилий, температура) образует граничное состояние, изоморфное внутреннему. Пространство граничных состояний также линейно. Определение скалярного произведения, в основу которого кладется внутренняя энергия тела, делает пространство евклидовым; процедура пополнения - гильбертовым. Пространства внутренних и граничных

состояний связаны гильбертовым изоморфизмом.

Центральным является вопрос о назначения счетного базиса пространства внутренних состояний. При отсутствии массовых сил и распределенных источников тепла базисы можно строить исходя из известных наборов гармонических функций (например, однородных гармонических многочленов), оперируя общим решением уравнения Лапе в форме Папковича - Нейбера [2]. Далее следует ортогонализация базиса, построение изоморфного базиса граничных состояний. Состояние, отвечающее граничным условиям, ищется в виде ряда Фурье по элементам ортонормированного базиса. В зависимости от типа граничных условий краевая задача в конечном итоге сводится либо к рутинному вычислению квадратур скалярного произведения, либо к решению бесконечной системы уравнений относительно коэффициентов Фурье. Технически важным является вопрос обеспечения высочайшей точности при подсчете квадратур. Принципиален вопрос о сходимости решения. В случае, когда температура не "завязана" с механическими характеристиками, можно провести декомпозицию задачи (и состояний), предварительно решив задачу о теплопереносе. При наличии массовых сил и распределенных источников тепла декомпозицию также можно провести, выделив соответствующие частные решения.

Метод граничных состояний в союзе с методом возмущений позволяет выполнить решения "связанных" задач термоэластостатики, в которых упругие параметры среды являются функциями температуры. Удобство такого сочетания методов, в частности, состоит в том, что построение базиса пространства состояний, как и его ортогонализацию, приходится выполнять единожды (для последующих приближений базис тот же).

Литература

1. Пеньков В. Б., Пеньков В. В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. - 2001. - Т.2, №2. - С.115-137.

2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука, 1979. - 844 с.

МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ПРОГНОЗА И ЭКСПЕРТНАЯ СИСТЕМА ПРОГНОЗА СИЛЬНЫХ ШКВАЛОВ И СМЕРЧЕЙ СРЕДНИХ ШИРОТ

Переходцева Э.В. (Москва)

perekhod@mecom.ru

Применение успешных методов прогноза штормовых летних ветров (включая сильные шквалы и смерчи) заблаговременностью 12-36ч, приносящих значительные экономические потери позволило бы принять своевременные меры для предотвращения разрушений жилых зданий и построек и предотвратить возможную гибель людей. Прогнозирование этих явлений до настоящего времени является одной из актуальных проблем оперативной синоптической практики. Синоптический прогноз этих явлений, использующий графические и расчетные методы прогноза сильных ветров, в значительной степени зависят от интуиции синоптика и достаточно субъективен. Синоптики дают штормовое предупреждение об опасном ветре скоростью более 24м/с согласно Наставлению по гидрометеорологическим прогнозам всего за 3ч. Однако чаще всего при наличии термогидродинамической неустойчивости синоптиками прогнозируются грозы и порывы ветра скоростью 15-18м/с. В России в настоящее время не имеется успешной численной гидродинамической модели прогноза максимальной скорости сильных ветров заблаговременностью 12-36ч. Поэтому основными методами объективного прогноза таких явлений являются статистические методы, использующие зависимость указанных явлений от большого числа параметров атмосферы (предикторов). Метод прогноза сильных ветров и шквалов (скоростью более 19 м/с) на основании гидродинамико-статистической модели прогноза был нами разработан для Европейской части России более 15 лет назад и применялся в качестве оперативного метода с 1993г. Гидродинамико-статистические методы прогноза штормовых ветров (включая шквалы и смерчи) со скоростями более 24 м/с заблаговременностью 12ч и 24ч были рекомендованы для использования в оперативной практике с 2002 года в Гидрометцентре России, в Волго-Вятском районе, Северо-Западном Федеративном Округе, в Центрально-Черноземных областях, на Северном Кавказе. Метод прогноза этих явлений по той же модели заблаговремен-

ностью 36ч после оперативных испытаний, проведенных в 2003-05гг в трех Управлениях по Гидрометслужбе (ВВУГМС, СЗУГМС, УГМС Татарстана) также был рекомендован для использования в оперативной практике с результатами успешности по критерию Пирси-Обухова $T=0,47-0,75$. Эти методы с использованием гидродинамико-статистической модели прогноза также были в 2004г адаптированы и для территории Сибири). Нами была проведена верификация этих прогнозов для территории Сибири. Для нее метод также оказался достаточно успешным. Значение предупрежденности явлений составило 86%. Ошибка "ложной тревоги" оказалась также невысокой, и поэтому значение критерия Пирси-Обухова составило $T=0,78$, что свидетельствует об успешности разработанной модели прогноза. Выбранный информативный вектор-предиктор для прогноза сильных летних штормовых ветров включал наиболее информативных представителей от блоков зависимых предикторов средней матрицы корреляции R и также отдельные информативные предикторы (в качестве критерия информативности использовались расстояние Махаланобиса и критерий минимальной энтропии Вапника В.Н.). Оптимальное количество векторов в векторе-предикторе обычно составляет 6-8. Это число связано с количеством собственных значений матрицы R . В данном случае число потенциальных предикторов для прогноза штормовых ветров ($V>24\text{м/с}$) составило $n=40$. В результате проведенного отбора для распознавания и прогноза таких явлений (ветров с $V>24\text{м/с}$) был выбран наиболее информативный вектор-предиктор размерности 8. Для выбранных предикторов на обучающих выборках случаев наличия и отсутствия сильных ветров была получена дискриминантная функция их диагноза и прогноза $F(X)$. Вероятность P штормового ветра по гидродинамико-статистической модели рассчитывалась по функции $F(X)$ в узлах декартовой сетки $150\times 150\text{ км}$ с использованием прогностических значений выходных полей полусферной гидродинамической модели краткосрочного прогноза. Области с вероятностями, превышающими эмпирически выбранный порог вероятности $P_{\text{пор}}$, выделяют прогнозируемую область возникновения таких явлений. В докладе наряду с другими даются примеры прогноза смерчей в Москве в 2000 году, в Дубне в 2005 году, в Костроме в 2005 году, для территории Сибири в 2005г: для Красноярской области, для Новосибирска и Алтая, ($V=37\text{м/с}$), для Туруханска. И Таймыра. Следующим шагом локализации прогноза смерчей в пунктах является использование экспертной систе-

мы прогноза данных явлений. Экспертная система включает эмпирические синоптические правила и коэффициенты доверия - вероятности возникновения смерчей в зависимости от осуществления этих правил. Эти коэффициенты пересчитываются каждый раз при поступлении новых данных, система способна к обучению. Применение такой системы прогноза в пакете рабочего места синоптика наряду с использованием гидродинамико-статистического прогноза явлений ветра $V > 24 \text{ м/с}$ позволяет синоптику с большой вероятностью выделить смерчи среди явлений штормовых ветров.

К ВОПРОСУ ОБ УРАВНЕНИИ ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Плаксина И.М. (Пермь)

impl@list.ru

Пусть L^p — пространство суммируемых с p -ой степенью функций с нормой $\|\cdot\|_{L^p}$, $p \geq 1$; $L(t^k)$ — пространство суммируемых с весом t^k функций, $t \in [0; b]$, $k \in (-1; 1)$, $k \neq 0$. Рассмотрим при $t \in [0; b]$ квазилинейное уравнение

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \ddot{x} + \frac{k}{t}\dot{x} = f(t, x(t)). \quad (1)$$

Изучению уравнения химического реактора (1) посвящен большой цикл работ (см. [1]). Рассмотрим уравнение (1) на пространстве W_σ^2 непрерывных на $[0; b]$ функций x , первая производная которых абсолютно непрерывна, а вторая суммируема на каждом отрезке $[\epsilon; b]$, $\epsilon \in (0; b)$, причем произведение $\delta(x) \equiv t^k(\ddot{x} + \frac{k}{t}\dot{x})$ суммируемо на $[0; b]$. Норму в пространстве W_σ^2 определим равенством:

$$\|x\|_{W^{2,p}} = \|\delta(x)\|_{L^p} + |x(0)| + |x(1)|.$$

Лемма. Пусть $p(t) \in L^1$, $p(t) \geq 0$. В пространстве W_σ^2 ослабленная задача Коши $(\mathcal{L}x)(t) + t^k \cdot p(t)x(t) = y(t)$

$$x(0) = \alpha, \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^k \dot{x}(t) = \beta, \quad (2)$$

однозначно разрешима при $y \in L(t^k)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, и ее оператор Коши изотонен. Используя схему $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2$ квазилинеаризации Н.В.Азбелева [1], сформулируем условия разрешимости задачи (1)-(2). **Теорема.** Пусть существуют такие функции $v, z \in W_\sigma^2$, что

$(\mathcal{L}v)(t) \leq f(t, x(t)), v(0) = \alpha_1, \lim_{t \rightarrow +0} t^k \dot{v}(t) = \beta_1; (\mathcal{L}z)(t) \geq f(t, z(t)),$
 $z(0) = \alpha_2, \lim_{t \rightarrow +0} t^k \cdot \dot{z}(t) = \beta_2; \alpha_1 \leq \alpha_2; \beta_1 \leq \beta_2.$ Пусть функция $f(t, x(t))$ удовлетворяет условию $\mathcal{L}_1$ на $[v; z]$ и соответствующий оператор Немыцкого непрерывен на $[v; z]$. Тогда задача (1)-(2) имеет решение $x \in [v; z]$.

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. - М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002, 384 с.

О СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ АСПЕКТАХ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Плетнева О.К., Покорный Ю.В. (Воронеж)

Дифференциально-интегральное исчисление стало образовательной базой высшей математики (или базой учебных курсов по высшей математике) уже в IX в., когда дифференциалы и интегралы стали неотъемлемой компонентой технических языков физиков, геометров, инженеров и др. Первое время основы анализа преподавались в соответствии с основами Лейбница и Ньютона, когда математическая суть дела объяснялась как бы "на пальцах". Следует отметить, что эти полуинтуитивные соображения довольно хорошо отображали глубинную суть проблем "анализа неделимых". Эта суть была отмечена еще в древней Греции Демокритом, чьи атомы, образовавшие в совокупности континуум, у Лейбница превратились в дифференциалы. Интеграл по Лейбницу до конца IX в. преподносился в виде площади криволинейной трапеции. Такого сорта взгляд на основу анализа позволил к концу IX в. сформировать всю, как сказал А.Н. Колмогоров, содержательную математику. Следующий этап развития математики был связан с всемерной формализацией и внедрением не только формально-дедуктивных, но и топологических аспектов. Наконец, последний этап ставил задачу создать формальный фундамент (с помощью той же теории пределов), и проверить на прочность возникшее к тому времени математическое здание как базу естествознания. Этот процесс формального "ометодичивания" математических знаний ничуть не изменился наработанными в более примитивной форме математическими фактами уже вошедшими в сердцевину естественных и технических знаний. Однако у препода-

вателей математики, воспитанных в новых формальных традициях в течение XX в. сложилось впечатление, что главным достижением в математическом анализе являются кванторы, язык, формально-дедуктивные конструкции, навыки строгих дефиниций и пр. - то, что А.Н. Колмогоров, в отличие от "содержательной математики", называл "формальной математикой". Мы, преподаватели математики, зачастую забываем, что главную ценность формализованная математика представляет для математиков-учеников, а не для будущих пользователей математических знаний, для которых они являются всего лишь математическим инструментом.

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЕ СТИЛЬТЪЕСА НА ГРАФЕ¹

Покорный Ю.В., Зверева М.Б. (Воронеж)

pokorny@kma.vsu.ru

Согласно [1], под дифференциалом Стильтъеса от функции ограниченной вариации $g(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, удобно понимать функционал из сопряженного к $C[a, b]$ пространства, определяемый равенством

$$(dg, \varphi) = \int_a^b \varphi dg, \quad \varphi \in C[a, b].$$

Для случая упругого континуума с импульсными неоднородностями и возмущениями формализм интеграла Стильтъеса дает возможность поточечного описание уравнения Штурма-Лиувилля в интегро-дифференциальной форме

$$-(pu')(x) + \int_0^x u dQ = F(x) - F(0) - pu'(0). \quad (1)$$

Уравнение (1) оказывается удобным представлять (в дифференциалах Стильтъеса) в виде

$$-d(pu') + u dQ = dF. \quad (2)$$

Для случая, когда упругий континуум является ребрами некоторого геометрического графа Γ , при наличии сингулярной потери гладко-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-00397)

сти аналог уравнения (1) на графе имеет место быть, однако приобретает чрезвычайно неудобоваримый вид. Оказывается, что этому уравнению можно придать форму (2), если под дифференциалом Стильтеса понимать функционал из пространства сопряженного ко множеству непрерывных на Γ функций. При этом удобнее говорить о дифференциале меры, определяемой функцией ограниченной вариации, ибо во внутренних вершинах графа атомы соответствующей меры описываются в терминах, не имеющих аналога на отрезке.

Литература

1. Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач // Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. – УМН, 2008. – Т.63, выпуск 1(379). – С.111-154.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ МЕРЫ НА ГРАФЕ¹

Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Бахтина Ж.И. (Воронеж)
pokornyy@kma.vsu.ru

Пусть Γ — некоторый геометрический связный граф. Будем называть Γ -интервалом любой связный открытый подграф Γ . Если Γ_0 — такой подграф, то его замыкание $\bar{\Gamma}_0$ — Γ -сегмент. Пусть Q — функция ограниченной вариации на Γ , где вариация определяется естественным образом. Определим соответствующую функцию сегмента $\tilde{Q}$: если Γ_0 — некоторый Γ -интервал, то

$$\tilde{Q}(\bar{\Gamma}_0) = \int_{\bar{\Gamma}_0} dQ,$$

где интеграл понимается как интеграл Стильтеса на каждом ребре Γ_0 (открытом интервале), плюс соответствующие "скачки" Q во внутренних вершинах Γ , определяющие соответствующие "атомы" $\tilde{Q}$ в этих вершинах.

Пусть $u(x)$ — непрерывная функция, заданная на Γ . Через $\int_{\Gamma} u dQ$ будем обозначать аналог интеграла Стильтеса, определяемый Q -мерой на Γ , задаваемой аналогично классическому случаю функцией сегмента $\tilde{Q}(\bar{\Gamma}_0)$, определенной на множестве связных подграфов Γ (точнее их замыканий) описанным выше образом.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 07-01-00397

Теорема. Если $u(x)$ — непрерывная на Γ функция, то функция интервала $\sigma(\Gamma_0) = \int_{\Gamma_0} u dQ$ обладает следующим свойством: для любой Q -суммируемой на Γ функции $h(x)$ имеет место равенство:

$$\int_{\Gamma} h(x) d\sigma = \int_{\Gamma} h(x) u(x) dQ.$$

Если исходный граф Γ совпадает с одномерным интервалом и его можно считать лежащим в R^1 , то сформулированный факт адекватен классической теореме о преобразовании меры (см, например, С. Сакс. Теория интеграла, ИЛ, М., 1949).

О НЕКОТОРЫХ СИНКРЕТАХ УЧЕБНОЙ МАТЕМАТИКИ

Покорный Ю.В., Титова Н.В. (Воронеж)

pokornyy@kma.vsu.ru

Согласно одному из классиков истории школьной математики [2]: *"Необходимость в дробях возникла на самой ранней ступени развития человеческого общества. Так, по-видимому, дележ нескольких плодов между членами большой семьи или добычи, состоящей из двух-трех кроликов между большим числом участников охоты заставлял людей обращаться к дробям, открывать их"*. С таким же успехом можно сказать, что человек всегда был знаком с водородом и кислородом, так как регулярно потреблял H_2O . Скажете — несладко, но логика здесь как раз прослеживается? Давайте разберемся. Обе зарисовки характерны для синкретичного мышления.

Синкрет — это несвязная куча ассоциаций. Феномен синкретизма описывается, как стремление свалить "в кучу" самые разные и не имеющие внутренней связи элементы, приводя их в *нерасчлененный, слитный образ*, замещая недостаток объективных связей переизбытком субъективных связей и принимая связь впечатлений и мыслей за связь вещей. Согласно Л. С. Выгодскому: "Синкрет — куча предметов, выделяемая без достаточного внутреннего основания, внутреннего родства и отношения между образующими эту кучу частями, предполагает диффузное, направленное распространение значения слова на внешне сходные вещи." Мышление синкретами не предполагает сложной работы мысли, так как достаточно присвоить новому объекту старое обозначение (имя, слово), не заботясь о последующем

искажении смысла и работать с ним дальше как со старым или почти также.

В преподавании математики синкретические схемы присутствуют как при введении и использовании новых понятий, так и при опоре на якобы уже давно обжитые понятия и свойства. Приведем примеры.

Можно ли $\frac{dy}{dx}$ воспринимать как отношение, а равенство $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x}$ — как пропорцию? Можно ли косинус мерить километрами, а тангенс — сантиметрами? Насколько осмысленно равенство $\sin \alpha = 50\%$? Что значит $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$? Насколько корректно равенство вида $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, где слева и справа стоят записи явно не одинаковые, а сходные лишь по этажности и по присутствию дробной черты. Уже Лейбница призывали арбитром в споре о том, почему равенство $\frac{(-1)}{1} = \frac{1}{(-1)}$ должно считаться верным, несмотря на то, что у левой дроби и числитель и знаменатель больше, чем у правой? Применим ли термин "интеграл" к записи $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, не взирая на значение α . Укроет ли от дождя бумажка с надписью "зонт", может ли мяукать бумажка с надписью "кошка"? Но почему продукт деления $(2 : 3)$, неправомерного за много лет до введения рациональных чисел с разбегу назван числом? Как можно число 2 разделить на троих? Почему запись $\sqrt{2}$ обозвана числом в условиях, когда сама процедура извлечения корня не имеет четкой дефиниции?

Слово "число" оказывается в математике создателем самых таинственных синкретов — пронизывая терминологически всю математику, разумному определению в рамках учебных математических традиций оно поддается лишь на уровне самых абстрактных формально-дедуктивных оснований математики. Но "въехать" в подобные основы может лишь человек капитально освоивший всю предшествующую математику и, незаметно для себя, давно уже перегретый термином число.

Литература

- [1]. Покорный Ю. В. Унижение математикой? – Воронеж: ОАО "Центрально-Черноземное книжное издательство", 2006, С.54–70.
- [2]. Глейзер Г. И., История математики в школе: IX–X кл. Пособие для учителей. М.: Просвещение. 1983.

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА ТРЕХМЕРНОГО АНАЛОГА ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ТИПА КОПИ¹

Полунин В.А. (Белгород)

Пусть заданы плоскость $P \subseteq R^3$ с ортонормированным базисом e_1, e_2 и полупространство D , расположенное по одну сторону от P . Пусть функция $Q(s, \xi)$ переменных $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$, однородна степени -2 и непрерывно дифференцируема по переменной ξ , и для любой окружности $L \subseteq \{|\xi| = 1\}$ выполняется условие

$$\int_L Q(s, \xi) d\xi = 0.$$

Кроме того, эта функция обращается тождественно в нуль по переменной s при $|s| \geq R$ для некоторого $R > 0$. Пусть также вместе с частными производными по ξ она принадлежит классу Гельдера $C^\mu(\mathbb{R}^2)$ по переменной s равномерно относительно $|\xi| = 1$.

В работе показано, что в принятых предположениях функция, определяемая интегралом

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^2} Q(s, se - x) ds, \quad x \in D,$$

непрерывно продолжима на граничную плоскость P и принадлежит классу $C^\mu(\overline{D})$. Здесь введено обозначение $se = s_1 e_1 + s_2 e_2$.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЗОННОГО УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ²

Потапов М.М. (Москва)

mpotapov@tochka.ru

Рассматривается управляемый процесс, описываемый волновым уравнением с переменными коэффициентами и однородными на-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ(проект № 07-01-00299)

²Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00416) и программы "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект РНП 2.1.1.1714).

чальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \rho(x)y_{tt} &= (k(x)y_x)_x + Bu(t, x), \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \\ y|_{x=0} &= 0, \quad y|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T, \quad y|_{t=0} = 0, \quad y_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l. \end{aligned}$$

Носители управлений u сосредоточены в зоне $\Omega = (0, T) \times (l_1, l_2)$, внутри которой $Bu = u$, а за ее пределами $Bu = 0$. Границы зоны $0 < l_1 < l_2 < l$ предполагаются заданными. Требуется в заданный момент времени T перевести систему в заданное целевое состояние $y(T, x) = f^0(x) \in L^2(0, l)$, $y_t(T, x) = f^1(x) \in H^{-1}(0, l)$. Проблема точной управляемости в таких классах решена в [1]. Для построения устойчивых приближенных решений этих задач, а также двойственных к ним задач зонного наблюдения предлагается использовать метод из [2]. Для его применимости получены конструктивные оценки корректной разрешимости для сильных обобщенных решений задач зонного наблюдения, дополняющие результаты по существованию из [1]. Построены разностные аппроксимации задач управления и наблюдения, сохраняющие отношение двойственности, а также описаны алгоритмы вычисления их приближенных решений по общей схеме [2]. Установлена сильная сходимость этих приближений к точным нормальным решениям исходных непрерывных задач.

Литература

1. Ho L.F. Exact controllability of the one-dimensional wave equation with locally distributed control // SIAM J. Control and Optimizat. 1990. V.28. No. 3. P.733–748.
2. Потапов М.М. Устойчивый метод решения линейных уравнений с неравномерно возмущенным оператором // Доклады РАН. 1999. Т.365. № 5. С.596–598.

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ-ДЕРЕВО Провоторов В.В., Провоторова Е.Н. (Воронеж)

Разложение по собственным функциям на графе-пучке во многом определяется "удобной" максимальной системой линейно независимых на графе решений однородного уравнения. Пусть краевая задача на графе-пучке определяется набором уравнений

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in \gamma_k \quad (k = \overline{1, m}), \quad (1)$$

на ребрах γ_k , уравнением в узле ξ

$$-y'(\pi/2)_{\gamma_m} + \sum_{k=1}^{m-1} y'(\pi/2)_{\gamma_k} = 0 \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$y'(0)_{\gamma_k} - h_k y(0)_{\gamma_k} = 0 \quad (k = \overline{1, m-1}), \quad y'(\pi)_{\gamma_m} + Hy(\pi)_{\gamma_m} = 0. \quad (3)$$

"Удобной" системой функций является m линейно независимых решений уравнения (1), (2) $\varphi_k(x, \lambda)$ ($k = \overline{1, m}$), обладающих следующими свойствами: каждая функция удовлетворяют краевым условиям (3) вида $\varphi'_k(0, \lambda)_{\gamma_k} - h_k \varphi_k(0, \lambda)_{\gamma_k} = 0$ ($k = \overline{1, m-1}$), $\varphi'_m(\pi, \lambda)_{\gamma_m} + H\varphi_m(\pi, \lambda)_{\gamma_m} = 0$.

Если, далее, вернувшись к графу-дерево, разбить его на отдельные графы-пучки и на каждом из этих пучков построить систему функций, аналогичную приведенной выше, то остается "склеить" полученные системы функций в одну на графе-дерево.

В работе представлен "метод склейки" графов-пучков и получена теорема разложимости заданной функции в обобщенный ряд Фурье с несколько ослабленными условиями на функцию, чем в [1] - от разлагаемой функции требуется меньшая гладкость (абсолютная непрерывность на графе). При этом монографии [2,3] явились научной платформой исследования.

Литература

1. Завгородний М.Г. Спектральная полнота корневых функций краевой задачи на графе // ДАН, 1994, Т.335, № 3, С.281-285.
2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах.- М.:Физматлит, 2004.- 227с.
3. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач.- М.: Физматлит, 2007. - 384 с.

**ОБ АВТОМОДЕЛЬНОМ
ПРОМЕЖУТОЧНО-АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ
ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ**

Простокишин В.М. (Москва)

vmr@osca.ru

Рассматривается нелинейное уравнение фильтрации с абсорбцией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (\gamma - 1) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Построено семейство автомодельных решений второго рода для этого уравнения. Исследована эволюция не автомодельных решений задачи Коши, заданных на компактном носителе. Численные эксперименты показали, что полученные автомодельные зависимости представляют собой промежуточные асимптотики широкого класса решений, когда влияние тонких деталей начальных условий исчезает, но решение ещё далеко от своей стационарной асимптотики — тождественного нуля. Рассмотрены автомодельные решения с уменьшающимся носителем и с конечным временем коллапса для больших значений параметра γ :

$$u = A(t_0 - t)^\lambda F(\xi), \text{ где } \xi = \frac{x - x_0}{B(t_0 - t)^\mu} - \text{автомодельная переменная.}$$

Здесь x_0 - точка коллапса при $t = t_0$. С учётом такого представления исходное уравнение, записанное для функции $F(\xi)$, принимает вид:

$$F(\xi) \frac{d^2 F}{d\xi^2} - (\gamma - 1) \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^2 - \xi \frac{dF}{d\xi} + (2 - 1/\mu) F(\xi) = 0.$$

На функцию $F(\xi)$ накладываются три условия: условие симметрии в нуле $F'(0) = 0$, условие $F(1) = 0$ — неразрывности уровня жидкости на свободной границе $x = x_f$ и третье граничное условие, получающееся вследствие соотношений для скорости движения свободной границы x_f из автомодельного решения: $F'(1) = 1/(1 - \gamma)$. Поэтому решается нелинейная задача на собственные значения: ищется решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее трём граничным условиям и собственному значению μ — параметру автомодельности.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ¹

Псху А.В. (Нальчик)

pskhu@mail333.com

В области $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in (0; T)\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + a(x) D_{0y}^{\alpha} u(x, y) + c(x, y) u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

D_{0y}^{α} — производная Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (0; 1)$ [1, с. 9], $a(x)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$ — заданные функции.

В случае постоянных коэффициентов начальные и краевые задачи для уравнения (1) исследованы в [2, гл. 2].

В работе строится представление решения задачи Коши

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \tau(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

для уравнения (1), исследуются вопросы единственности и характер влияния коэффициента $a(x)$ на разрешимость и структурные свойства решений.

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. — М.: Наука, 2005. 199 с.

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ДЛЯ ГОЛОМОРФНОЙ В ОБЛАСТИ ФУНКЦИИ

Радзиевская Е.И. (Киев)

radz@imath.kiev.ua

Локальным теоремам о среднем для голоморфной функции посвящено много работ. Рассматриваемые результаты примыкают к этой тематике и они, по-видимому, впервые показывают, когда остаточный член в формуле Тейлора для голоморфной в области функции представим в форме Лагранжа и как можно локализовать среднее значение в ней.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-96625).

Теоремы, полученные в работе содержат результаты, связанные с этим направлением С.Чиквини, А.Шарма, Дж.Робертсон, А.Самуэльсон, В.Савчука. Кроме того из теорем этой работы следует такой интуитивно понятный факт: если функция f голоморфна в окрестности вещественного отрезка и принимает на нем вещественные значения, то в остаточном члене формулы Тейлора, записанном в форме Лагранжа, среднее значение локализовать можно более точно, нежели отказаться от требования голоморфности.

Доказательства теорем данной работы проще, чем доказательства аналогичных утверждений в работах упомянутых авторов, которые основаны на громоздких оценках бесконечного множества слагаемых в ряде Тейлора, записанном для остаточного члена. Но при этом в данной работе решена задача в значительно более общей постановке, область применения теорем указана более точно.

Из доказанных утверждений, в частности, получен такой результат: если $|z_1 - z_0| < 1,451$, $z_1 \neq z_0$, то существует единственное ξ из круга $U(\frac{z_1+z_0}{2}, \frac{|z_1-z_0|}{2})$, для которого справедлива формул

$$e^{z_1} - e^{z_0} = (z_1 - z_0)e^{\xi}.$$

Этот результат, но при значительно более жестком требовании $|z_1 - z_0| < 0,3$ был установлен Дж.Робертсон.

Литература

1. Robertson J.M. A local mean value theorem for the complex plane // Proc.Edinburgh Maht. Soc. 1969. V. 16,N 4. P.197-209.
2. Радзиевская Е.И., Радзиевский Г.В. Для голоморфной в области функции остаточный член в формуле Тейлора допускает запись в форме Лагранжа // Сибирский мат. журн. 2003. Т.44, №2. С. 402-414

О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА СО СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Расулов А.Б. (Москва)

Под дифференциальными уравнениями с сингулярными коэффициентами мы будем понимать такие уравнения, в которых порядок особенности по независимым переменным (в определенном смысле) зависит от порядка уравнения. Если порядок особенности коэффициентов уравнения выше порядка уравнения, то такие уравнения на-

зываются дифференциальными уравнениями со сверхсингулярными или суперсингулярными коэффициентами. Подробный обзор по теории эллиптических и гиперболических уравнений с сингулярными коэффициентами можно найти в работе [1].

Пусть D_0 односвязная область, содержащая внутри себя точку $z = 0$, ограниченная гладким замкнутым контуром L . Далее, в области $D = D_0/\{0\}$ рассмотрим линейные эллиптические системы дифференциальных уравнений со сверхсингулярной точкой вида

$$L_2^n u \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} + \frac{a(z)}{r^n} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{b(z)}{r^{2n}} U = \frac{f(z)}{r^{2n}} \quad (1)$$

$$L_3^n u = \frac{\partial^3 U}{\partial \bar{z}^3} + \frac{a(z)}{r^n} \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} + \frac{b(z)}{r^{2n}} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} + \frac{c(z)}{r^{3n}} U = \frac{f(z)}{r^{3n}} \quad (2)$$

В настоящей работе в области D получены интегральные представления решений для системы (1) и (2) в случаях сингулярных $n = 1$ и сверхсингулярных ($n > 1$) коэффициентов. Кроме того, выяснены корректные постановки краевых задач и большое внимание уделено исследованию поведения решений вблизи сингулярной точки.

Постановка задач типа Дирихле. Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C_{\bar{z}}^2(D)$ при следующих граничных условиях:

$$Re \left[\exp(-\omega_{\lambda_2}(z) + W_{\lambda_2}(z)) \left(\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} - \frac{\lambda_1(z)U}{r^n} \right) \right]_L = g_1(t),$$

$$Re[\exp(-W_{\varphi}(z))]_L = g_2(t),$$

где $\lambda_1(z)$, $\omega_{\lambda_2}(z)$, $W_{\lambda_2}(z)$, $W_{\varphi}(z)$ известные функции, зависящие от коэффициентов системы (1), а $g_k(t)$, $k = 1, 2$, — непрерывные функции точек контура L .

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. "Наука", 1981, 448 с.

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕСКОЛЬКИМИ ОПЕРАТОРАМИ СУПЕРПОЗИЦИИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ.1

Ратыни А.К. (Иваново)

ratyni@isuct.ru

Изучается классическая разрешимость задачи

$$L_\lambda u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} + (c(x) + \lambda)u = f(x) \quad (x \in D), \quad (1)$$

$$Bu \equiv u(x) - \sum_{j=1}^k \beta_j(x) u(\sigma_j x) = \psi(x) \quad (x \in S). \quad (2)$$

Как правило, предполагаются выполненными условия (L) и (B).

Условия (L): D — ограниченная область R^n , $\partial D = S \in C^2$; $a_{ij} \in C_\alpha(D) \cap C(\bar{D})$, b_i и $c \in C_\alpha(D)$; матрица (a_{ij}) положительно определена в $\bar{D} = D \cup S$;

λ — числовой параметр (здесь и далее все величины вещественны).

Условия (B): $\beta_j \in C(S)$; σ_j — однозначные непрерывные отображения $\bar{D}$ в $\bar{D}$ ($j = 1, \dots, k$).

В работе используются пространства Гёльдера, определённые в монографии А. Фридмана "Уравнения с частными производными параболического типа с тем лишь дополнением, что $C_{2+\alpha}(D)$ считается непрерывно вложенным в $C(\bar{D})$. Обозначим

$$\hat{\Omega} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \hat{\omega}_i, \text{ где } \hat{\omega}_i = \bigcup_{j=1}^k \hat{\omega}_{ij}, \hat{\omega}_{ij} = \{x \in S : \sigma_j x \in \hat{\omega}_{i-1}\}, \hat{\omega}_{-1} \equiv S.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (L), (B). Предположим, кроме того, что либо $\hat{\Omega} = \emptyset$, либо $\hat{\Omega} \neq \emptyset$ и существуют число $a \in (0, 1)$ и функция $\nu(x) \in C(\bar{D}) : \nu(x) > 0, x \in \bar{D}$,

$$\sum_{j=1}^k |\beta_j(x)| \nu(\sigma_j x) \leq a \nu(x), \quad x \in \hat{\Omega}. \quad (3)$$

Тогда найдётся такое не зависящее от f и ψ число c_0 , что: задача (1), (2) для любых $\lambda \leq c_0$, $f \in C_\alpha(D)$, $\psi \in C(S)$ имеет единственное решение $u_\lambda(x) \in C_{2+\alpha}(D)$; операторы $G_\lambda, \Gamma_\lambda$, определяемые равенством $u_\lambda = G_\lambda f + \Gamma_\lambda \psi$, действуют непрерывно в соответствующих парах пространств.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Редькина Т.В., Карюк А.И., Лушников Г.А. (Ставрополь)
TVR59@mail.ru

Для квазилинейного уравнения гиперболического типа

$$w_{\bar{x}\bar{z}} = \beta e^w [\alpha w_{\bar{z}} - \gamma w_{\bar{x}} + \frac{1}{2}(\gamma - 3\alpha)(w_{\bar{x}} - w_{\bar{z}})w], \quad (1)$$

полученного в работе [1], доказаны следующие свойства:

Теорема 1. Уравнение (1) имеет следующие решения: а) $w = f(\alpha\bar{x} + \gamma\bar{z})$, где f определяется из обращения интеграла $\int \frac{df}{C_1 + e^f(1-f)} = m(\alpha\bar{x} + \gamma\bar{z}) + C_2$, $m = \frac{\beta}{2\gamma}(\gamma - 3\alpha)(\gamma - \alpha)$; б) $\int \frac{e^{-w} dw}{(1-\lambda)w + B(\lambda-3) + C_1 e^{-w}} = \frac{A}{\lambda}\bar{x} + A\bar{z} + C_2$, где $A = \frac{\beta}{2}(\gamma - 3\alpha)$, $B = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma-3\alpha}$, C_1, C_2 - постоянные.

Для 2 + 1-мерного нелинейного уравнения

$$\alpha v_x + \frac{\alpha^2 k}{2}(\ln u)_{xx} - \frac{\gamma^2}{2k}(\ln u)_{yy} = \frac{a}{2\alpha}(u_z + \gamma u_y) + \frac{\gamma}{2k}(\ln u)_{yz} - \frac{\alpha}{2}(\ln u)_{xz}, \quad (2)$$

свойства которого изучались в работе [2], доказана

Теорема 2. Уравнение (2) при $k > 0$, $\alpha, \gamma, a \in R$ сводится к параболическому квазилинейному уравнению вида $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \frac{ak}{\alpha\gamma^2}e^v(\gamma v_{\eta} + v_{\zeta})$, где $u(x, y, z) = e^v$, $v = v(\xi, \eta, \zeta)$, $\xi = \pm \frac{\gamma}{\alpha k}x$, $\eta = y$, $\zeta = -\frac{1}{\alpha k}x - \frac{1}{\gamma}y + 2z$, и имеет следующие решения: $u(x, y, z) = [e^{-C_1[x - \frac{\alpha k}{\gamma}(1+\gamma)y - \gamma z]} - \frac{\beta}{C_1}]^{-1}$, где $\beta = \frac{a}{\alpha^2(\alpha k + 1)}$, C_1 -произвольная постоянная; $u(x, y, z) = e^{v(z - \frac{1}{\alpha k}x; \frac{\gamma}{\gamma+1}(sz - \frac{1}{\gamma}y))}$, где v -произвольная функция.

Теорема 3. Уравнение (2) при $k > 0$, $\alpha, \gamma, a \in R$ сводится к гиперболическому квазилинейному уравнению $v_{\vartheta\vartheta} - v_{\tau\tau} = \beta e^v(v_{\vartheta} \pm (\gamma + 1)v_{\tau})$, где $u(x, y, z) = e^v$, $v = v(\vartheta, \tau)$, $\vartheta = mx + nz$, $\tau = \pm \frac{\alpha k}{\gamma}y \pm z$, $\beta = \frac{a}{\alpha^2(\alpha k + 1)}$, $C_1 - const$.

Литература

1. Редькина Т.В., Карюк А.И. Нелинейное уравнение, обладающее оператором рассеяния третьего порядка // Труды международной конференции "Современные методы физико-математических наук" Орел. Том 1. 2006. С.70-75.

2. Редькина Т.В. Возможность построения солитонных 1+1 и 2+1- мерных уравнений, имеющих общую задачу рассеяния // Вестник СГУ, №43. Ставрополь, 2005, с.47-52.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИГРОКОВ В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ИГРЕ С РИСКОМ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Родюков А.В. (Борисоглебск)

2409555@mail.ru

Пусть имеется Центр, управляющий деятельностью одного игрока нижнего уровня иерархии (Исполнитель). Игроки выбирают свои действия в виде конкретных значений из некоторых допустимых множеств, то есть $x_i \in X_i$, а неопределенный фактор может принимать значения $y \in Y \subset R^m$. Функции выигрыша игроков задана скалярной функцией $f_i(x, y)$. В работе строится схема оптимального взаимодействия Центра и Исполнителя путем выбора ими стратегий с точки зрения возможных потерь, которые численно представляются в виде функций риска [1,2,3]. Функция риска строится как разность максимума функции выигрыша игрока по его стратегии и ее значения на любых допустимых стратегиях всех игроков. Интересы игроков выражаются желанием по возможности уменьшить гарантированные значения своих функций риска. Игроки учитывают воздействие неопределенности исходя из принципа гарантированного результата [4]. Игра протекает следующим образом. Центр делает ход первым. Ему известно множество $x_2 \in X_2$ стратегий Исполнителя, его функция выигрыша и способ построения им своей стратегии

$$x_2^0(x_1) \in \text{Arg} \min_{x_2 \in X_2} \max_{y \in Y} \tilde{F}_2(x_1, x_2, y)$$

в ответ на любое решение Центра $x_1 \in X_1$, где его функция риска имеет вид

$$\tilde{F}_2(x_1, x_2, y) = \max_{z_2} f_2(x_1, z_2, y) - f_2(x_1, x_2, y).$$

На основе данной информации Центр строит свою функцию риска

$$\tilde{F}_1(x_1, x_2^0(x_1), y) = \max_{z_1} f_1(z_1, x_2(z_1), y) - f_1(x_1, x_2(x_1), y)$$

и делает оптимальный выбор

$$x_1^* \in \text{Arg} \min_{x_1 \in X_1} \max_{y \in Y} \tilde{F}_1(x_1, x_2^0(x_1), y).$$

Наконец, Исполнитель с учетом решения Центра формирует свой выбор $x_2^* = x_2^0(x_1^*)$. Игра заканчивается. Выбор стратегий из условия минимизации функций риска обусловлен тем, что позволяет игрокам оценить проигрыш.

Доказана неувлучшаемость, внутренняя устойчивость, взаимозаменяемость оптимальных стратегий, а также получены свойства функций риска. Для квадратичного варианта игры получены достаточные условия оптимальности, приведен пример вычислений в математической среде MathCad 13.

Литература

1. Savage L.Y. The theory of statistical decision // J. American Statistics Association. 1951. N 46. P.55-67. 29.
2. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Риски и исходы в многокритериальных задачах управления. Тбилиси. Интелекти, 2004. - 358 с.
3. Жуковский В.И., Жуковская Л.В. Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. М.: Эдиториал УРСС, 2004. - 272 с.
4. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976. - 328 с.

ВЫБОР ТИПА УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАГРЯЗНЕНИЯ

Рослякова Е.А. (Брянск)

kate_zhu@mail.ru

При моделировании экосистем практически во всех случаях необходимо прогнозировать распространение примеси в неоднородных средах. Л.М. Галкин (см. [1]) высказывает предположение, что диффузию примеси в неоднородных средах лучше описывают уравнения Колмогорова, а не уравнения диффузии. Чтобы выяснить влияние неоднородности среды на решение уравнения Колмогорова, сформулируем задачу, в которой поведение решения будет определяться только неоднородностью среды.

Вид начальных условий может влиять только на длительность релаксации, а не на конечный результат, поэтому достаточно потребовать, чтобы $\varphi(x)$, задающая начальные условия, была ограничена

в области решения. Коэффициент диффузии $K(x)$, учитывающий неоднородность среды, по определению всегда больше нуля и ограничен.

Таким образом, для решения сформулированной задачи необходимо найти и проанализировать решение следующих краевых задач:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial X} K(X) \frac{\partial S_1}{\partial X}; \quad \frac{\partial S_2}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} K(X) S_2; \\ S_1(X, 0) &= \varphi(X); \quad S_2(X, 0) = \varphi(X); \\ \left. \frac{\partial S_1}{\partial X} \right|_{X=0, l} &= 0; \quad \left. \frac{\partial S_2}{\partial X} \right|_{X=0, l} = 0.\end{aligned}$$

В результате решения задачи получим следующие результаты: стационарное решение уравнения диффузии не зависит от неоднородности среды, не зависит от задания коэффициента диффузии; стационарное решение уравнения Колмогорова зависит от неоднородности среды.

Проанализировав полученные результаты, можно сделать вывод: диффузия дискретных примесей в неоднородных средах описывается уравнением Колмогорова, а не уравнением диффузии.

Литература

1. Динамика эколого-экономических систем // Под ред. Л.М. Галкина и др. – Новосибирск, Наука, 1981.
2. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М.: Наука, 1970.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ, ПРОГНОЗИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ ОБОБЩАЮЩИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ (НА ПРИМЕРЕ УДМУРТСКОЙ РЕСПУБЛИКИ)

Русяк И.Г. (Ижевск)

primat@istu.ru

В качестве показателей макроэкономической системы региона рассматриваются следующие показатели: стоимость произведенной продукции, основных производственных фондов и человеческого капитала, объем инвестиций, потребление и доходы регионального бюджета. На основе схемы воспроизводства региональной экономики

записывается балансовое уравнение экономической системы, которое содержит эндогенные и экзогенные параметры [1].

При постановке задачи идентификации записывается условие минимизации отклонения исходного поведения системы от заданного поведения; далее осуществляется переход к задаче математического программирования. Более общий подход к решению задачи идентификации предполагает снятие ограничения о постоянстве вектора параметров системы, что позволяет выявить динамические тенденции и открывает возможность построения адаптивных алгоритмов прогнозирования состояния системы во времени.

На основе статистических данных экономики Удмуртской Республики (УР) за период 1991-2006 гг. была проведена идентификация параметров, которые были приняты базовыми в прогнозных расчетах экономики УР на 2007-2015 гг.

После решения задач идентификации и прогнозирования макроэкономических параметров определяется, насколько прогнозные значения отличаются от значений, полученных в условиях оптимального распределения ресурсов.

Литература

1. Русяк И.Г., Кетова К.В. Динамическая модель открытой макроэкономической системы в условиях научно-технического прогресса в производственной и социальной сферах // Периодический научно-теоретический журнал "Вестник ЮУрГУ серия "Экономика": Изд-во ЮУрГУ. - Челябинск, ноябрь 2006. - № 12 (67) - С. 390-394.

ОБ ОДНОКРАТНОЙ БАЗИСНОСТИ РИССА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ¹

Рыхлов В.С. (Саратов)

RykhlovVS@info.sgu.ru

Рассмотрим в пространстве $L_2[0, 1]$ пучок операторов $L(\lambda)$, определяемый однородным дифференциальным выражением

$$l(y, \lambda) := y^{(2)} + \lambda p_1 y^{(1)} + \lambda^2 p_2 y$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-2970.2008.1).

и двухточечными однородными краевыми условиями

$$U_\nu(y, \lambda) \equiv U_{\nu 0}(y, \lambda) + U_{\nu 1}(y, \lambda x) := \\ (\alpha_{\nu 1} y^{(1)}(0) + \lambda \alpha_{\nu 2} y(0)) + (\beta_{\nu 1} y^{(1)}(1) + \lambda \beta_{\nu 2} y(1)) = 0, \quad \nu = 1, 2,$$

где $p_j, \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{C}$.

Пусть ω_1, ω_2 есть корни характеристического уравнения $\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$. Предположим, что эти корни лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, по разные стороны от начала координат. Не нарушая общности, можно считать, что $\omega_2 < 0 < \omega_1$.

Обозначим $y_1(x, \lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x)$, $y_2(x, \lambda) := \exp(\lambda\omega_2 x)$. Считаем для определенности $\alpha_{\nu 1} \neq 0, \beta_{\nu 1} \neq 0$. Обозначим $v_{\nu j} := U_{\nu 0}(y_j, \lambda)/\lambda$, $w_{\nu j} := \exp(-\lambda\omega_j)U_{\nu 1}(y_j, \lambda)/\lambda$, $\nu, j = 1, 2$, и $V_j := (v_{1j}, v_{2j})^T$, $W_j := (w_{1j}, w_{2j})^T$, $j = 1, 2$. Пусть $\tau := |\omega_2|/\omega_1$, $a_{sk} := \det(W_s, W_k)$, $a_{\bar{s}k} := \det(V_s, W_k)$, $a_{s\bar{k}} := \det(W_s, V_k)$, $a_{\bar{s}\bar{k}} := \det(V_s, V_k)$, $b_0 := a_{1\bar{1}}/a_{1\bar{2}}$, $c_0 := -a_{1\bar{2}}/a_{1\bar{2}}$, $d_0 := \ln_0 c_0$ (здесь $\ln_0$ есть фиксированная ветвь натурального логарифма, такая, что $\ln_0 1 = 0$), $\Lambda = \{\lambda_k \in \mathbb{C} : \lambda_k := (2k\pi i + d_0)/\omega_1, k \in \mathbb{Z}\}$, $Y := \{y(x, \lambda) := \exp(\lambda\omega_1 x) + b_0 \exp(\lambda(\omega_1 + \omega_2)x), \lambda \in \Lambda\}$. Очевидно, $\Lambda \setminus \{0\}$ есть множество всех ненулевых собственных значений пучка $L(\lambda)$, а множество $Y \setminus \{y(x, 0)\}$ есть множество всех собственных функций пучка, соответствующих ненулевым собственным значениям.

При основных предположениях: $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{1\bar{2}} \neq 0$, $a_{1\bar{2}} = a_{12} = 0$, $W_2 = 0$, $a_{1\bar{1}} \neq 0$ справедлива следующая теорема

Теорема 1. Пусть $\tau \geq 1$. Для того, чтобы система Y образовывала однократный базис Рисса в пространстве $L_2[0, \frac{1}{\tau}]$, достаточно: а) в случае $\tau > 1$ — выполнения условия: $\tau < |b_0|^2$; б) в случае $\tau = 1$ — выполнения условия: $b_0 \neq \pm 1$.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ ИНДЕКСНОГО МЕТОДА

Сабирова О.Р. (Ижевск)

scientifique@mail.ru

Ставится задача оптимального управления динамикой макроэкономической системой в произвольном конечномерном фазовом пространстве. Задача решается индексным методом [1], построенным на основе принципа максимума Понтрягина [2].

Численная реализация индексного метода происходит согласно построенному алгоритму, суть которого заключается в том, что из-

начально определяются параметры квазистационарной траектории на всем периоде планирования; для этого задается исходная информация модели. Задаются начальные условия для вектора факторов производства. Рассчитываются индексные функции для каждого фактора для определения множества конкурирующих факторов [1]. Рассчитываются параметры оптимальной траектории (траектории движения из начального состояния до выхода на квазистационарную траекторию) как решение системы, которая состоит из уравнений, входящих в постановку задачи, и равенств, вытекающих из принципа выравнивания значимости факторов.

Справедливость индексного метода обосновывается следующим образом: доказывается эквивалентность управления, построенного с использованием индексного метода, и управления, построенного на основе непосредственного применения принципа максимума. На основе полученного решения вычисляются значения вектора двойственных переменных и строится оптимальная траектория в прямом времени в соответствии с управлением, полученным применением принципа максимума. Оптимальные траектории, полученные двумя способами, совпадают на всем горизонте планирования, таким образом, их эквивалентность доказана.

Литература

1. Русяк И.Г., Кетова К.В., Сабирова О.Р. Построение оптимального управления в неомогенной конечномерной экономической модели, обладающей квазимагистралью // Сб. "Анализ и моделирование экономических процессов" / Сб. статей под. ред. В.З. Беленького. Вып. 4. - М.: ЦЭМИ РАН, 2007. - С. 83-98.

2. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. - М.: Наука, 1989. - 61 с.

О РАВНОМЕРНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛАМИ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Савчук А.М. (Москва)

artem_savchuk@mail.ru

Получены асимптотические формулы с *равномерной* оценкой остаточных членов для собственных значений оператора Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Конечно, эти асимптотические формулы хорошо известны, но в той форме и той общности, кото-

рая нам нужна, они не приводились. В нашей работе [2] равномерные оценки были получены во всей шкале соболевских пространств $q \in W_2^{\theta-1}[0, \pi]$, $\theta > 0$. С другой стороны, в работе [1] для $\theta \in [0, 1/2)$ были получены асимптотические формулы с более точной по порядку оценкой остатков, но без свойства равномерной ограниченности. Теперь мы готовы объединить два этих результата и доказать асимптотические формулы для собственных значений с такой же по порядку, как в [1], и равномерной, как в [2], оценкой остатков. Отметим, что случай $\theta = 0$ является особым и существенно более сложным.

Мы будем квалифицировать поведение собственных значений в терминах отображений гильбертовых пространств. Такая постановка позволит использовать преимущества абстрактной техники. В частности, точная информация об асимптотике собственных значений будет получена не только для потенциалов q , лежащих в соболевских пространствах $W_2^{\theta-1}$, с целыми положительными θ , но и при всех $\theta \geq 0$, включая случай $\theta \in [0, 1)$, когда q является распределением. В отличие от предшествующих работ мы получим равномерные оценки остаточных членов, когда q меняется в шаре радиуса R пространства $W_2^{\theta-1}$. Имея в виду дальнейшие приложения результатов к обратным задачам Штурма–Лиувилля, мы ограничимся рассмотрением операторов с краевыми условиями Дирихле и Дирихле–Неймана, хотя развитые методы позволяют получить аналогичные результаты для более общих краевых условий.

Литература

[1] Савчук А.М., Шкалик А.А. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами – распределениями. // Труды ММО, Т. 64 (2003), С. 159–219.

[2] Савчук А. М., Шкалик А. А. О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. // Мат. зам., Т.80, №6, 2006, С. 864–884.

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ В РЯДЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА

ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Садовнича И.В. (Москва)

ivsad@yandex.ru

В пространстве $L_2[0, \pi]$ изучается оператор Штурма–Лиувилля $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ с граничными условиями Дирихле. Предполагается,

что потенциал $q(x) = u'(x)$, $u(x) \in W_2^\theta[0, \pi]$, $0 \leq \theta < 1/2$. Операторы такого вида были определены в работе [1]. В работах [1] – [2] было доказано, что оператор L фредгольмов с индексами $(0, 0)$, полуограничен, имеет чисто дискретный спектр.

Рассматривается вопрос о равномерной на всем отрезке $[0, \pi]$ равносходимости разложения некоторой функции $f \in L_2[0, \pi]$ в ряд по системе собственных и присоединенных функций оператора L с ее разложением в ряд Фурье по системе синусов.

$$\text{Обозначим } S_m f = \sum_{n=1}^m c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_{n,0} \sin nx.$$

Теорема. Рассмотрим оператор L в пространстве $L_2[0, \pi]$ с граничными условиями Дирихле, потенциал которого $q(x) = u'(x)$, где комплекснозначная функция $u \in W_2^\theta[0, \pi]$, $0 \leq \theta < 1/2$. Пусть $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – нормированная система собственных и присоединенных функций оператора L , $\{w_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – биортогональная к ней. Для произвольной функции $f \in L_2[0, \pi]$ обозначим $c_n = (f(x), w_n(x))$, $c_{n,0} = \sqrt{2/\pi} (f(x), \sin nx)$. Тогда $\lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m f\|_C = 0$.

Пусть $R > 0$. Если $u \in W_2^\theta[0, \pi]$, $0 < \theta < 1/2$, причем $\|u\|_{W_2^\theta} \leq R$, то существует натуральное $M = M_{\theta, R}$ такое, что для любого $m \geq M$, для любого $\varepsilon > 0$

$$\|S_m f\|_C \leq C_{\theta, R, \varepsilon} \left(\sqrt{\sum_{n \geq \sqrt{m}} |c_{n,0}|^2} + \frac{\|f\|_{L_2}}{m^{\theta/2 - \varepsilon}} \right).$$

Литература

- [1] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. зам., Т. 66. №6, 1999, С. 897–912.
- [2] Савчук А. М., Шкаликов А. А. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами – распределениями // Труды ММО, Т.64, 2003, С. 159–219.

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ТИПА

Салимов Я.Ш., Сабзалиев М.М. (Баку)

gulnaz1111@rambler.ru

В прямоугольнике $D = \{(t, x) | 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ рассматривается следующая краевая задача

$$(-1)^m \varepsilon^{2m} \frac{\partial^{2m+1} U}{\partial t^{2m+1}} - \varepsilon^p \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^p - \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + F(t, x, u) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} U \Big|_{t=0} &= \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dots = \frac{\partial^m U}{\partial t^m} \Big|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial^{m+1} U}{\partial t^{m+1}} \Big|_{t=1} &= \dots = \frac{\partial^{2m} U}{\partial t^{2m}} \Big|_{t=1} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$U|_{x=0} = U|_{x=1} = 0, \quad (3)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $p = 2k + 1$, k и m – произвольные натуральные числа, $F(t, x, u)$ – заданная функция, которая может зависеть от U как линейно, т.е.

$$F(t, x, U) = aU - f(t, x),$$

так и нелинейно. Предполагается, что $F(t, x, u)$ удовлетворяет условиям

$$F(t, x, 0) \neq 0 \text{ при } (t, x) \in D, \quad (4)$$

$$\frac{\partial F(t, x, U)}{\partial U} \geq \gamma^2 > 0 \text{ при } (t, x, U) \in D \times (-\infty, +\infty). \quad (5)$$

Доказана следующая основная теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $F(t, x, u) \in C^{2m+2n+2}(D \times (-\infty, +\infty))$, функция $F(t, x, u)$ и все ее производные до $(2m + 2n + 2)$ -го порядка включительно обращаются в нуль при $t = x, U = 0, (t, x) \in D$, при $t = 1, x = 0, U = 0$, при $t = 0, x = 1, U = 0$ (в линейной зависимости $F(t, x, u)$ от U предполагается обращение в нуль всех производных $f(t, x)$ при $t = x, (t, x) \in D$, при $t = 1, x = 0$, при $t = 0, x = 1$) и

удовлетворяются условия (4), (5). Тогда решение задачи (1)-(3) представимо в виде

$$U = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i W_i + \sum_{j=0}^{n+m-1} \varepsilon^{1+j} \eta_j + \sum_{j=0}^{n+m-1} \varepsilon^{1+m+j} \psi_j + \sum_{s=0}^{n+1} \varepsilon^s V_s + z,$$

где функции W_i определяются первым итерационным процессом, η_j, ψ_j, V_s — функции типа пограничного слоя, вблизи границ $t = 0, t = 1, x = 1$ соответственно, которые определяются другими итерационными процессами, z — остаточный член, причем для него справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{2m} \left\| \left\| \frac{\partial^m U}{\partial t^m} \right\|_{L_2(0,1)} \right\|^2 + \varepsilon^p \left\| \frac{\partial z}{\partial x} \right\|_{L_{p+1}(D)}^{p+1} + \\ & + \varepsilon \left\| \frac{\partial z}{\partial x} \right\|_{L_2(D)}^2 + C_1 \|z\|_{L_2(D)}^2 \leq C_2 \varepsilon^{2n+2}, \end{aligned}$$

где $C_1 > 0, C_2 > 0$ — постоянные, не зависящие от ε .

РАВНОМЕРНАЯ РАВНОСХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО НЕСАМОСОПРЯЖЁННОМУ ОПЕРАТОРУ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ, С ИНТЕГРАЛОМ ФУРЬЕ НА ВСЕЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПРЯМОЙ

Салтыков Е.Г. (Москва)

saltykov@cs.msu.su

В представленном докладе мы изучаем несамосопряжённый оператор Штурма-Лиувилля

$$Lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - k^2(z), \tag{1}$$

определённый на всей действительной прямой $R^1 = (-\infty, \infty)$. Мы полагаем $k(z) = k_1$ если $z < 0, k(z) = k_2$ если $z > 0$, где k_i комплексные константы,

$Re k_i \geq 0, k_i^2 = \varepsilon_i + j\sigma_i, \varepsilon_i \in R^1, \sigma_i \geq 0$ или $\sigma_i \leq 0, (i = 1, 2)$, и j мнимая единица.

Пусть функция $f(x)$ и её первая производная $f'(x)$ абсолютно интегрируемы на R^1 .

Если для этой функции определить преобразование Фурье

$$\tilde{f}_i(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z') u_i(z, \mu) dz', (i = 1, 2),$$

спектральное разложение этой функции имеет форму

$$\sigma_{\Lambda}(z, f) = \sum_{i=1,2} \int_0^{\Lambda} \tilde{f}_i(\mu) u_i(z, \mu) dp_i(\mu). \quad (2)$$

Это разложение характеризуется спектральной мерой, представляющей диагональную матрицу-функцию, с отличными от нуля элементами $p_i(\mu)$ и фундаментальными функциями $u_i(z, \mu)$.

Функции $u_0 = \psi_0$ и $u_2 = \varphi_2$ являются ограниченными на всей действительной прямой z решениями обыкновенных уравнений Штурма-Лиувилля с комплексными коэффициентами

$$-d^2 u_i / dz^2 - k^2(z) u_i = (\mu^2 - k_i^2) u_i, \mu \in R^1, (i = 1, 2). \quad (3)$$

$$dp_i(\mu) = d\mu / (a_i^i(\mu) b_i^i(\mu) \cdot 2\pi), (i = 1, 2).$$

Коэффициенты a_i^i and b_i^i определяются соотношениями

$$b_0^0(\mu) \varphi_0(z, \mu) + a_0^0(\mu) \varphi_0(z, -\mu) = \psi_0(z, \mu),$$

$$b_2^2(\mu) \psi_2(z, \mu) + a_2^2(\mu) \psi_2(z, -\mu) = \varphi_2(z, \mu).$$

Функции ψ_2 и φ_0 являются неограниченными на всей действительной прямой z решениями уравнений (3).

Представление (2) справедливо для $\text{Im } k^2(z) \geq 0$.

Теорема. Если функция $f(z)$ и её первая производная $f'(z)$ абсолютно интегрируемы на R^1 , $\sigma_{\Lambda}(z, f)$ является спектральным разложением функции $f(z)$, связанным с оператором Штурма-Лиувилля (1), $S_{\Lambda}(z, f)$ разложение Фурье $f(z)$, т.е.

$$S_{\Lambda}(z, f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Lambda(z - z')}{(z - z')} f(z') dz',$$

тогда уравнение

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} |\sigma_{\Lambda}(z, f) - S_{\Lambda}(z, f)| = 0$$

справедливо равномерно по z на всей действительной прямой z .

Спектральное разложение (2) этой функции сходится к $f(z)$, когда $\Lambda \rightarrow \infty$.

Если $k^2(z) \in R^1$, спектральное разложение функции $f(z)$ (2) соответствует формуле (6) статьи [1] для потенциала $-k^2$, удовлетворяющего условию Като.

Спектральное разложение на всей действительной прямой функции Грина для двухслойной среды по фундаментальным функциям несамосопряжённого оператора Штурма-Лиувилля было рассмотрено в [2,3].

Краткое изложение приведённых здесь результатов дано также в [4].

Литература

1. Ильин, В. А., Равномерная на всей прямой $\mathbb{R}$ равносходимость с интегралом Фурье спектрального разложения, отвечающего самосопряжённому расширению оператора Шредингера с равномерно локально суммируемым потенциалом, *Дифференц. Уравн.*, Том. 31, No. 12, 1957–1967, 1995.

2. Салтыков, Е. Г., Спектральное разложение на всей действительной прямой функции Грина для двухслойной среды по собственным функциям несамосопряжённого оператора Штурма-Лиувилля, *Дифференц. Уравн.*, Том. 38, No. 5, 687–691, 2002.

3. Дмитриев, В. И. and Салтыков, Е. Г., Новое представление функции Грина задачи Зоммерфельда для проводящего однородного полупространства, *Успехи Мат. Наук*, Том. 49, No. 4(298), 79–80, 1994.

4. Saltykov, E. G., Equiconvergence of the Spectral Expansion Corresponding to a Nonself-adjoint Sturm-Liouville Operator for a Two-layer Medium with the Fourier Integral on the Entire Real Line, *Progress in Electromagnetics Research Symposium*. Abstracts. Prague, Czech Republic, 2007. www.emacademy.org www.piers.org

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА N-МЕРНОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Седов А.И., Закирова Г.А. (Магнитогорск)

zakirova81@mail.ru

Пусть

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) : 0 \leq x_j \leq a_j, j = 1, \dots, N\}, a_j > 0.$$

В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим оператор Лапласа T_0 , порожденный краевой задачей Неймана:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\partial \Pi} = 0, \quad \Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Введем оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ – спектральное разложение единицы, $\beta > \frac{N}{2}$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_m = \lambda_{(m_1, m_2, \dots, m_N)}$ оператора T будем нумеровать одним нижним натуральным индексом и одним верхним, при этом верхний индекс будет отвечать за кратность ν_t собственного числа λ_t , т.е. $\lambda_t = \lambda_t^k = \lambda_t^j$, $k = \overline{1, \nu_t}$.

Введем также следующие обозначения:

$$r_t = \frac{1}{2} \min\{\lambda_{t+1} - \lambda_t; \lambda_t - \lambda_{t-1}\}, t > 1; r_1 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1); r_0 = \inf_t r_t;$$

$$s = \left(\sum_{t=1}^{\infty} r_t^2 \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^4 \right)^{1/2}; \gamma_t = \{\lambda : |\lambda_t - \lambda| = r_0\}; V = \prod_{j=1}^n a_j.$$

Теорема 1. Пусть $\beta > \frac{3N}{4}$, $r \in (0, \min\{r_0, \frac{1}{s\sqrt{2N}}\})$, $\omega = 2^N sr$.

Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство:

$$\sqrt{2^N V} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

то существует функция $p \in L_2(\Pi)$ такая, что для любого $t = 1, 2, \dots$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu_t} \mu_t^k,$$

где $\sigma(T+P) = \{\mu_t^k\}$, P — оператор умножения на функцию $p \in L_2(\Pi)$.

КРИТЕРИЙ ДЛЯ МНОЖЕСТВА ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ¹

Семенова Т.Ю. (Москва)

station@list.ru

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Определим множество

$$\mathcal{U}_C = \{u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \|\nabla u\|_2^2 \leq C \cdot \|u\|_2^2\}.$$

Набор линейно независимых функционалов $P^1, \dots, P^N$ будем называть множеством определяющих функционалов для $\mathcal{U}_C$, если из равенств $P^1(u) = \dots = P^N(u) = 0$ для $u \in \mathcal{U}_C$ следует, что $u \equiv 0$ в области Ω .

Множество $\mathcal{U}_C$ выбрано неслучайным образом. Ему принадлежат функции вида $u = v_1 - v_2$, где v_1, v_2 — два обобщенных решения дифференциального уравнения специального вида, постоянная C зависит только от рассматриваемого уравнения. И если некоторый набор функционалов является определяющим для $\mathcal{U}_C$, то он различает два решения, то есть из условий $P^n(v_1) = P^n(v_2)$, $n = 1, \dots, N$ следует, что $v_1 \equiv v_2$. Ранее задачи нахождения конечного множества функционалов, различающих решения уравнений, рассматривались в целом ряде работ (см. обзор [1]).

Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — собственные значения задачи Штурма-Лиувилля $\begin{cases} \Delta u = -\lambda \cdot u, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$ а $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ — соответствующие им собственные функции. Будем рассматривать линейные непрерывные функционалы вида $P^n(u) = \int_{\Omega} u(x) \cdot p^n(x) dx$, где $p^n \in L_2(\Omega)$, $n = 1, \dots, N$.

При $C \neq \lambda_k$ определим матрицу $\mathcal{H}$ размера $N \times N$ следующим образом: $h_{ij} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p_k^i p_k^j}{\lambda_k - C}$ (определение корректно, т.к. $\lambda_k \rightarrow +\infty$, а $p^i, p^j \in L_2(\Omega)$).

Теорема. Пусть $\lambda_S < C < \lambda_{S+1}$. $\{P^n\}_{n=1 \dots N}$ — множество определяющих функционалов тогда и только тогда, когда число отрицательных собственных значений матрицы $\mathcal{H}$ равно S .

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00160-а.

Литература

1. Чуешов И.Д. Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем // Успехи мат. наук. 53:4 (1998), 77-124.

ОБ ОЦЕНКАХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ

Симонов Б.В. (Волгоград)

htf212@vstu.ru

Пусть $L_p (1 \leq p < \infty)$ — пространство 2π — периодических, измеримых функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$$\omega_\alpha(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-\nu+1)}{\nu!} f(x + (\alpha - \nu)h) \right\|_p -$$

модуль гладкости порядка $\alpha > 0$ функции $f(x)$ в метрике L_p (при целых $\alpha = k$ это будет модуль гладкости k -го порядка).

Пусть $r > 0$; $f^{(r)}(x)$ — производная дробного порядка r (в смысле Вейля) функции $f(x)$; W_p^r — множество функций $f(x)$ из L_p таких, что $f^{(r)}(x) \in L_p$. При $r = 0$ полагаем $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Пусть $l > 0$, Ω_l — класс непрерывных на $[0, \pi]$ функций $\omega(\delta)$ таких, что $\omega(0) = 0$, $0 < \omega(\delta) \downarrow 0 (\delta \downarrow 0)$ и $\delta^{-l} \omega(\delta) \downarrow (\delta \uparrow)$.

Через $H_p^l[\omega_l]$, где $\omega_l \in \Omega_l$, обозначим множество функций $f(x)$ из L_p таких, что $\omega_l(f, \delta)_p = O(\omega_l(\delta))$. Через $W^r H_p^l[\omega_l]$, где $\omega_l \in \Omega_l$, обозначим множество функций $f(x)$ из W_p^r таких, что $\omega_l(f^{(r)}, \delta)_p = O(\omega_l(\delta))$.

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть $f(x) \in L_p$, $1 < p < q < \infty$, $\alpha > 0$, $r \geq 0$. Тогда для любого $\delta \in (0; 1]$

$$\omega_\alpha(f^{(r)}, \delta)_q \leq c \left\{ \int_0^\delta (t^{-(r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \omega_{\alpha+r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f, t)_p)^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}},$$

где постоянная c не зависит от f и δ .

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть $1 < p < q < \infty$, $\alpha > 0$, $r \geq 0$. Тогда существует функция $f(x)$ такая, что для любого $\delta \in (0; 1]$ справедлива оценка

$$\omega_\alpha(f^{(r)}, \delta)_q \asymp \left(\int_0^\delta (t^{-(r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \omega_{\alpha+r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f, t)_p)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

У т в е р ж д е н и е 3. Пусть $\alpha > 0$, $r \geq 0$, $1 < p < q < \infty$, $\omega_\alpha \in \Omega_\alpha$, $\omega_{\alpha+r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \in \Omega_{\alpha+r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$. Тогда условие

$$\left\{ \int_0^\delta \left(t^{-(r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \omega_{\alpha+r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right\}^{\frac{1}{q}} = O(\omega_\alpha(\delta)).$$

необходимо и достаточно для вложения

$$H_p^{\alpha+r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}[\omega_{\alpha+r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}] \subset W^r H_q^\alpha[\omega_\alpha]$$

О МОДУЛЕ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИИ, ИМЕЮЩЕЙ ПРОИЗВОДНУЮ

Симонов Б.В. (Волгоград)

htf212@vstu.ru

Пусть $L_p (1 \leq p < \infty)$ — пространство 2π -периодических, измеримых функций $f(x)$ с конечной нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$.

$\Delta_h^\alpha f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\nu+1)}{\nu!} f(x + (\alpha - \nu)h)$ — разность порядка $\alpha > 0$ функции $f(x)$ (при целых α это будет α -ая разность, например, при $\alpha = 1$ имеем $\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x)$); $\omega_\alpha(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^\alpha f(x)\|_p$ — модуль гладкости порядка $\alpha > 0$ функции $f(x)$ в метрике L_p ; $f^{(\rho)}(x)$ — производная порядка ρ ($\rho > 0$) функции $f(x)$ (в смысле Вейля).

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть $f(x) \in L_p$, $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha > 0, r > \varepsilon > 0$. Тогда для любого $\delta \in (0; 1]$

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(f^{(r-\varepsilon)}, \delta)_q &\leq c_1 \left(\int_0^\delta \left(t^{-(r-\varepsilon+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \omega_{\alpha+r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f, t)_p \right)^q \frac{dt}{t} + \right. \\ &\quad \left. + \delta^{\alpha q} \int_\delta^1 \left(t^{-(\alpha+r-\varepsilon+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \omega_{\alpha+r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f, t)_p \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

где постоянная $c_1 > 0$ и не зависит от f и δ .

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть $f(x) \in L_p$, $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha > 0, r > 0, \varepsilon > 0, \beta = \max(p, 2)$. Тогда для любого $\delta \in (0; 1]$

$$\left(\delta^{\beta(\alpha-\varepsilon)} \int_\delta^1 \left(t^{-(\alpha-\varepsilon)} \omega_\alpha(f^{(r+\varepsilon)}, t)_p \right)^\beta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq$$

$$\leq c_2 \left(\int_0^\delta (t^{-(r+\varepsilon+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \omega_{\alpha+r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f, t)_p)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

где постоянная $c_2 > 0$ и не зависит от f и δ .

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ СО СРЕДНИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Синегубов С.В. (Воронеж)

mathsms@yandex.ru

В работах [1–5] было получено обобщение неравенства Коши–Буняковского–Шварца со средними степенными величинами

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 &\leq \int_a^b [M_\alpha(f, g)]^2 dx \cdot \int_a^b [M_{-\alpha}(f, g)]^2 dx = \\ &= \int_a^b (f^\alpha + g^\alpha)^{2/\alpha} dx \cdot \int_a^b f^2 g^2 (f^\alpha + g^\alpha)^{-2/\alpha} dx \leq \int_a^b f^2 dx \cdot \int_a^b g^2 dx. \quad (1) \end{aligned}$$

Получены прямые более простые доказательства частных случаев этого неравенства, соответствующих выбору среднего полуквадратичного, арифметического и квадратичного, то есть при $\alpha = \frac{1}{2}, 1, 2$.

Литература

1. Ситник С.М. Уточнение интегрального неравенства Коши–Буняковского. // Вестник Самарского гос. тех. университета. Сер. "Физико-математические науки". - 2000. - №9. - С. 37 – 45.
2. Ситник С.М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши–Буняковского. // Вестник Самарской государственной экономической академии. - 2002. - № 1(8). - С. 302 – 313.
3. Ситник С.М. Обобщения неравенств Коши–Буняковского методом средних значений и их приложения. // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия: "Фундаментальная математика". Воронеж, 2005, № 1 (1), С. 3–42.
4. Ситник С.М. Обобщения неравенства Коши–Буняковского методом средних. // Третья международная конференция "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвящённая 85-

летию

члена-корреспондента РАН профессора Льва Дмитриевича Кудрявцева. Тезисы докладов. Москва, МФТИ, 2008, С. 184–185.

5. Ситник С.М. О некоторых обобщениях неравенства Коши - Буныковского.// "Международная конференция "Анализ и особенности", посвящённая 70-летию В.И. Арнольда". Тезисы докладов. МИАН, Москва, 2007, С. 92–94.

О НЕРАВЕНСТВАХ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Ситник С.М. (Воронеж)

mathsms@yandex.ru

В докладе представлен небольшой обзор результатов по неравенствам для некоторых специальных функций. Приводятся неравенства для гипергеометрической функции ${}_1F_1$ [1] и ${}_2F_1$ [2], функций Бесселя [3–4], гипергеометрической функции Райта [5], а также различных типов эллиптических интегралов Лежандра [6–9].

Литература

1. Ситник С.М. Неравенства для остаточного члена ряда Тэйлора экспоненциальной функции.// Препринт. Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН. 1993, Владивосток, 30 с.
2. D. Karp, S.M. Sitnik. Two-sided inequalities for generalized hypergeometric function.// RGMIA Research Report Collection, 10(2), Article 7, 2007. 14 p.
3. Ситник С.М. Неравенства для функций Бесселя.// Доклады РАН. 1995, т. 340, N 1, С. 29–32.
4. Ситник С.М. Леонард Эйлер и теория специальных функций.// Материалы Международной научной конференции "Леонард Эйлер и современная наука". Санкт-Петербург, 2007. С. 192–200.
5. Ситник С.М. Об обобщении биномиальной теоремы, возникающем в теории дифференциальных уравнений.// Вестник Воронежского института МВД России. Воронеж, 2004, № 1 (16), С. 143–147.
6. Ситник С.М. Неравенства для полных эллиптических интегралов Лежандра.// Препринт. Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН. 1994, Владивосток, 17 с.
7. D. Karp, A. Savenkova, S.M. Sitnik. Series expansions for the third incomplete elliptic integral via partial fraction decompositions.// Journal of Computational and Applied Mathematics. Volume 207, 2007, P. 331–337.

8. D. Karp, S.M. Sitnik. Asymptotic approximations for the first incomplete elliptic integral near logarithmic singularity. // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2007, № 205, P. 186 – 206.

9. D. Karp, A. Savenkova, S.M. Sitnik. Series expansions and asymptotics for incomplete elliptic integrals via partial fraction decompositions. // Proceedings of the fifth annual conference of the Society for special functions and their applications. Lucknow (India), 2004, P. 4–30.

АСИМПТОТИКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ФОРМЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТОЧКАМИ

Смирнова Е.В. (Воронеж)

Рассматривается задача P_ε , состоящая в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \langle x(T) - \xi_{N+1}, F_{N+1}(x(T) - \xi_{N+1}) \rangle + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^N \langle x(t_j) - \xi_j, F_j(x(t_j) - \xi_j) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W(t) & S(t) \\ S(t)^* & R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \quad (1)$$

на траекториях системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad x(0) = x^0. \quad (2)$$

Здесь $t \in [0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$, значения t_j ($j = \overline{1, N+1}$) фиксированы, $x(t) \in X$, $u(t) \in U$; $A(t), F_j, W(t) \in L(X)$; $B(t), S(t) \in L(U, X)$, $R(t) \in L(U)$; X, U действительные конечномерные евклидовы пространства, операторы F_j ($j = \overline{1, N+1}$), $W(t)$ и $R(t)$ симметрические, кроме того, операторы $\begin{pmatrix} W(t) & S(t) \\ S(t)^* & R(t) \end{pmatrix}$, F_j неотрицательно определены, а $R(t)$ положительно определен при всех $t \in [0, T]$, элементы $x^0 \in X$ и $\xi_j, h_j \in X$ ($j = \overline{1, N+1}$) заданы, операторы F_j не зависят от t , остальные операторы и функция $f(\cdot)$ со значениями в X непрерывны по t .

Для задачи (1)-(2) строится асимптотическое разложение решения, используя асимптотические разложения решений соответству-

ющего уравнения Риккати и вспомогательного линейного дифференциального уравнения, а также вид оптимального управления в форме обратной связи (см. [1]). Устанавливаются оценки близости приближенного асимптотического решения к точному решению.

Литература

1. Курина Г. А., Смирнова Е. В., Чоу И. Оптимальное управление в форме обратной связи для линейно-квадратичной задачи с промежуточными точками// Труды математического факультета. Выпуск 11 (новая серия). ВГУ. —Воронеж: Научная книга, 2007. — С. 121–127.

ФОРМАЛИЗМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ, РАЗРЫВНЫМ В ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ТОЧКЕ

Смирнова Е.В. (Воронеж)

При помощи прямой схемы построения асимптотики решения задач оптимального управления находится асимптотическое решение для задачи P_ε , состоящей в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u_1, u_2) = \frac{1}{2} \langle C_1 x_1(t_1) - C_2 x_2(t_1), F(C_1 x_1(t_1) - C_2 x_2(t_1)) \rangle + \\ + \frac{\varepsilon}{2} (\langle x_1(t_1) - \zeta, G(x_1(t_1) - \zeta) \rangle + \langle x_2(t_1) - \xi, H(x_2(t_1) - \xi) \rangle) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left\langle \begin{pmatrix} x_j(t) \\ u_j(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W_j(t) & S_j(t) \\ S_j(t)^* & R_j(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j(t) \\ u_j(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \quad (1)$$

на траекториях системы

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = A_j(t)x_j(t) + B_j(t)u_j(t) + f_j(t), t_{j-1} \leq t \leq t_j, j = 1, 2, \quad (2)$$

$$x_1(0) = x^0, \quad x_2(T) = x^T. \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$, значения t_j ($j = 1, 2$) фиксированы;

Допустимые управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, являются кусочно — непрерывными функциями, составленными из функций u_1 , определенных при $t \in [0, t_1]$, и u_2 , определенных при $t \in [t_1, T]$. Соответству-

ющие траектории $x(t), t \in [0, T]$ также являются кусочно — непрерывными функциями, составленными из функций x_1 , определенных при $t \in [0, t_1]$, и x_2 , определенных при $t \in [t_1, T]$.

Функции, составляющие решение возмущенной задачи (1)–(3), ищутся в виде рядов

$$u_j(t, \varepsilon) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i u_{ji}(t), \quad x_j(t, \varepsilon) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i x_{ji}(t), \quad j = 1, 2, \quad (4)$$

которые подставляются в условия (1)–(3), затем в равенствах (2), (3) производится приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε , а минимизируемый функционал (1) записывается в виде

$$J_\varepsilon(u_1, u_2) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i J_i. \quad (5)$$

При стандартных для линейно — квадратичных задач предположениях на коэффициенты и достаточно малых ε справедлива следующая теорема.

Теорема. Коэффициент J_{2m-1} в разложении (4) известен после решения задач P_i ($i = \overline{0, m-1}, m \geq 1$), из которых находятся $x_{ji}, u_{ji}, j = 1, 2$. Преобразованный коэффициент J_{2m} в разложении (4) является критерием качества в задаче P_m .

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РИМАНА-ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДУГЛИСА

Солдатов А.П., Чернова О.В.

Пусть область D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1, \mu+0}$. Рассмотрим неоднородную систему Дуглиса

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi + a\varphi + b\bar{\varphi} = f_2, \quad (1)$$

где собственные значения постоянной матрицы $J \in C^{l \times l}$ лежат в верхней полуплоскости, а $l \times l$ -матричные коэффициенты a, b и f_2 принадлежат классу $C^\mu(\bar{D})$.

Соответствующая однородная система

$$L\varphi = 0, \quad L = \frac{\partial}{\partial y} - J \frac{\partial}{\partial x}$$

была впервые изучена Дуглисом [1] в рамках так называемых гиперкомплексных чисел.

Для этой системы ставится задача Римана—Гильберта

$$\operatorname{Re} G \varphi^+|_{\Gamma} = f_1, \quad (2)$$

где $l \times l$ - матрица- функция $G \in C^{\mu+0}$ и ее определитель всюду отличен от нуля. В работе [2] было показано, что в классе

$$C_J^{\mu}(\overline{D}) = \{\varphi \in C^{\mu}(\overline{D}) \cap C^1(D) | L\varphi \in C^{\mu}(\overline{D})\},$$

задача (1)—(2) фредгольмова и ее индекс дается формулой

$$\kappa = -\frac{1}{\pi}(\arg \det G) \Big|_{\Gamma} + l, \quad (3)$$

(приращение непрерывной ветви аргумента берется в направлении, оставляющем область D слева).

В данной работе доказано, что любое решение $\varphi \in C_J^{\mu}(\overline{D})$ задачи (1)—(2) с правой частью $f_1 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ и, следовательно формула индекса (3) сохраняет свою силу в классе $C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Литература

1. Чернова О.В. Задача Римана-Гильберта для эллиптической системы первого порядка. // Материалы V Школы молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". Нальчик-Эльбрус. 2007.-С.143-146.

О СПЕКТРЕ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

Стакун А.А. (Чебоксары)

asail1@mail.ru

Изучены свойства пучка $A - \lambda B$, где λ — спектральный параметр, при различных предположениях относительно операторов A и B . Но во всех случаях $B = p(x)E$, где p может обращаться в нуль (на множестве нулевой меры) и менять знак, A — дифференциальный самосопряженный полуограниченный оператор.

Рассмотрены случаи: 1. A — обыкновенный оператор на отрезке оси R порядка 2 (случай 1а) — нули $p(x)$ могут иметь любой

порядок или порядка n (случай 1б) — нули $p(x)$ только первого порядка; 2. A — оператор на R на всей оси R (случаи 2а, 2б — аналогичны предыдущему пункту), который рассматривается при различных предположениях относительно поведения весовой функции $p(x)$ на бесконечности; 3. A — эллиптический оператор в R^n , при различных предположениях относительно поведения его коэффициентов, поведения $p(x)$ на бесконечности и о виде многообразия ее нулей (случаи 3а, 3б — аналогичны пункту 1); 4. A — эллиптический оператор на ограниченной области в R^n или на n -мерном замкнутом многообразии (случаи 4а, 4б — аналогичны пункту 1).

Во всех случаях изучены аналитические и асимптотические свойства резольвенты, определен характер спектра (спектр всегда дискретен, в общем случае, его действительная часть не ограничена в обе стороны), найдена асимптотика спектра. В случаях 1а,б доказаны теоремы о разложении (методом контурного интегрирования). Использованы метод выделения отдельных ветвей спектра [1, с.319], тауберовы теоремы Келдыша [2, с.344] и Икехара [3, с.122]. Результаты частично пересекаются с изложенными в [4].

Литература

1. Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Высшая школа, 1999. 368 с.
2. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений. М.: Наука, 1979. 363 с.
3. Ленг С. Алгебраические числа. М.: Мир, 1966.
4. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений: статья / Сб. "Математический анализ" / серия "итоги науки" / . 1977. вып. 14. С. 10 - 86.

П-САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ НА ГРАНИЦЕ КОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА

Старинец В.В. (Москва)

vstarinets@mail.ru

В π -пространстве Π_σ с метрикой $[y, z] = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_c^b y \bar{z} \tau_\alpha^{(\sigma)} dx$ ($\sigma \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$) ранга индефинитности $r = [(|-\sigma| - \sigma)/2] - [(|-\sigma| - \sigma)/4]$, где $\tau_\alpha^{(\sigma)}(x) = -\sin^{-1} \pi \sigma \cdot (1 + \frac{\alpha^2}{(x-c)^2})^{\sigma+1/2} \cos((2\sigma+1) \arctg \frac{x-c}{\alpha})$ — регуляризирующий множитель для $\sigma < -1$ и $\tau_\alpha^{(\sigma)}(x) = 1$ для $\sigma > -1$, рассма-

триваются π -самосопряженные расширения Λ_σ сингулярных π -эрмитовых операторов, порождаемых самосопряженными дифференциальными выражениями $l(y) = -(p_0(x)y')' + (\frac{p_0(c)(\sigma^2-1/4)}{(x-c)^2} + q_0(x))y$, с помощью краевых условий $\xi_y^0 \sin \alpha + 2\sigma p_0(c)\varphi_y(c) \cos \alpha = 0$ и $y(b) \sin \beta - y'(b) \cos \beta = 0$ для $\sigma < 1$, либо $y(b) \sin \beta - y'(b) \cos \beta = 0$ для $\sigma > 1$ (ξ_y^0 и $\varphi_y(c)$ специальные граничные значения в сингулярной точке $x = c$). В конкретном случае $p_0(x) = 1$, $q_0(x) = 0$, $c = 0$, $b = 1$ исследуется спектр оператора Λ_σ и его эволюция при изменении параметров α или β . Спектр оператора Λ_σ в общем случае может быть представлен в виде $S = S^h \cup S^e \cup S^p$, где S^h , S^e и S^p — соответственно гиперболическая, эллиптическая и параболическая части. Оператор Λ_σ можно записать в виде $\Lambda_\sigma = \Lambda_\sigma^h + \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\sigma(\lambda) + N_\sigma$, где Λ_σ^h — гиперболическая часть оператора, N_σ — нильпотентный оператор первого, второго, либо третьего порядка (в зависимости от параметров σ , α и β), $E_\sigma(\lambda)$ — спектральная функция точечного (эллиптического и параболического) спектра, имеющая регулярные критические точки в эллиптическом и (алгебраически) кратном параболическом спектре.

Литература

1. Старинец В.В. Обобщенно-классические ортогональные многочлены. — М.: Изд. МГУП. 2000.
2. Старинец В.В. Симметрические операторы Штурма—Лиувилля в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Изд. МГУП. 2004.
3. Старинец В.В. Π -самосопряженные операторы Штурма—Лиувилля. 5.3 // Вестник МГУП. Вып. 7. — М.: Изд. МГУП. 2007.

О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУМЕРНОЙ ПРОБЛЕМЫ ПЛАТО С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

Стенюхин Л.В. (Воронеж)

stenyuhin@mail.ru

Задача о существовании двумерных минимальных поверхностей с ограничениями типа равенств в конформных координатах описывается функционалом Дирихле $E(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx dy$, Ω — двумерный

замкнутый диск, $u \in W_4^2(\Omega)$ с граничным условием $Bu \equiv u \Big|_{\partial\Omega} =$

$\varphi(s)$, $s \in \partial\Omega$ и условием $u(x_0, y_0) = c_0 = \text{const}$ в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Образует функцию Лагранжа $\mathcal{L}(u, \lambda^*) = E(u) + \lambda^* F(u) + \lambda(u(x_0, y_0) - c_0)$, где $\lambda \in \mathbf{R}$. Имеем $\mathcal{L}_u(u, \lambda^*, \lambda)h = E'(u)h + F'^*(u)\lambda^*h + \lambda h(x_0, y_0)$, $h(x_0, y_0) = \int_{\Omega} \delta(x - x_0, y - y_0)h(x, y)dxdy$, где $\delta(x - x_0, y - y_0)$ — δ -функция Дирака. Заменяем δ -функцию на гладкие функции δ_ε , близкие к δ . Условные критические точки есть нулевые точки оператора

$$\Phi_\varepsilon(u, \lambda^*, \lambda) = (\Delta u + F'^*(u)\lambda^* + \lambda\delta_\varepsilon, F(u)) = (0, 0) \quad (1)$$

с граничным условием $Bu = \varphi(s)$.

О разрешимости задачи

$$\begin{cases} (1 - 2\lambda^{1*})u_{xx} + (1 + 2\lambda^{1*})u_{yy} - 2\lambda^{2*}u_{xy} - \\ - (2\lambda_x^{1*} + \lambda_y^{2*})u_x + (2\lambda_y^{1*} - \lambda_x^{2*})u_y = -\lambda\delta_\varepsilon, \\ Bh = \varphi(s), \end{cases} \quad (2)$$

определяемой первой компонентой оператора (1) имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено условие строгой эллиптичности задачи (2). Тогда для любых ε и λ существует и единственно решение задачи (2) $u_\varepsilon = u_\varepsilon(\lambda^*, \lambda)$ из пространства $W_4^2(\Omega)$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполнено неравенство

$$(\|u_\varepsilon\|_{4,\Omega}^{(1)})^2 \leq c_1 \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dxdy \leq c_2 (\|\lambda\delta_{\varepsilon_0}\|_{\frac{2n_1}{n_1+2}, \Omega})^2, \quad (3)$$

где δ_{ε_0} такая функция, что $\sup \delta_{\varepsilon_0} = \bar{\Omega}$.

Литература

1. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука. 1973. 576с.

БИФУРКАЦИЯ МАЛЫХ СИНХРОННЫХ УСТОЙЧИВЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ ДВУХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С БЛИЗКИМИ ЧАСТОТАМИ

Стрыгин В.В., Северин Г.Ю. (Воронеж)

Рассматриваются две двумерные динамические системы с близкими собственными частотами, каждая из которых "рождает"

орбитально-устойчивый предельный цикл. При наложении малых линейных перекрёстных связей между системами у получившейся 4-мерной системы:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 + \varepsilon(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \nu\varepsilon(p_{11}y_1 + p_{12}y_2) + X^1(x, \varepsilon),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + \varepsilon(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + \nu\varepsilon(p_{21}y_1 + p_{22}y_2) + X^2(x, \varepsilon),$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_2 + \varepsilon(b_{11}y_1 + b_{12}y_2) + \nu\varepsilon(q_{11}x_1 + q_{12}x_2) + Y^1(y, \varepsilon),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1 + \varepsilon(b_{21}y_1 + b_{22}y_2) + \nu\varepsilon(q_{21}x_1 + q_{22}x_2) + Y^2(y, \varepsilon)$$

может возникнуть синхронный предельный цикл. При $\varepsilon = 0$ эта система имеет нулевое решение, $0 < \varepsilon \ll \nu^2 \ll \nu \ll 1$.

Сформулировано новое определение синхронных автоколебаний для двух систем с близкими собственными частотами. С помощью принципа усреднения Боголюбова-Крылова, обобщённого на бесконечную полуось, четырёхмерная система преобразуется и, затем, приближённо находится единственное устойчивое ненулевое положение равновесия полученной автономной усреднённой системы. Выводятся достаточные условия бифуркации малого устойчивого синхронного автоколебания в смысле данного определения.

Литература

1. Пиковский А.С., Розенблум М.Г., Куртс Ю., Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление/ М., изд-во Техносфера, 2003.
2. Блехман И.И., Синхронизация в природе и технике/ М., Наука, 1981.
3. Стрыгин В.В., Северин Г.Ю., Высшие приближения метода усреднения на полуоси для нелинейных периодических и условно-периодических систем// Препринт 16, изд-во ВГУ, Воронеж, 2005.
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э., Теория колебаний, М., 1959.

ПРОЕКТОРЫ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ОБЛАСТЯХ С КВАЗИКОНФОРМНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Ткаченко Н.М., Шамоян Ф.А. (Брянск)

tkachenkonm@yandex.ru, shamoyanfa@yandex.ru

Напомним, что кривая Γ называется квазиконформной, если $l(w_1, w_2) \leq c|w_1 - w_2|$, где w_1, w_2 – произвольные точки на Γ , $l(w_1, w_2)$ – длина кратчайшей дуги кривой Γ , соединяющей точки w_1, w_2 (см. [1]). Пусть $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, G – односвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченная квазиконформной кривой; $H(G)$ – множество всех аналитических функций в G ; $L_\beta^p(G)$ – класс измеримых по Лебегу в G функций f , для которых

$$\|f\|_{L_\beta^p(G)}^p = \int_G |f(w)|^p d^\beta(w, \partial G) dm_2(w) < +\infty, \beta > -1, 0 < p < +\infty,$$

$h_\beta^p(G)$ – подпространство $L_\beta^p(G)$, состоящее из гармонических функций, $A_\beta^p(G) = L_\beta^p(G) \cap H(G)$.

С помощью интегрального представления аналитических функций, полученного в [2], строится линейный интегральный оператор, отображающий пространство $h_\beta^p(G)$ на $A_\beta^p(G)$ при всех $0 < p < +\infty$.

Теорема. Пусть $f(w_0) = 0$ для некоторой точки $w_0 \in G$, $\varphi(z)$ – функция, конформно отображающая круг S на область G , причем $\varphi(0) = w_0$, $\varphi'(0) > 0$, ψ – обратная функция для φ . Тогда если $f = u + iv$, $u \in h_\beta^p(G)$, $0 < p < +\infty$, $\beta > -1$, то $f \in A_\beta^p(G)$, $0 < p < +\infty$, $\beta > -1$, при этом интегральный оператор

$$P_\alpha(u)(w) = \frac{\alpha + 1}{\pi} \int_G \frac{(1 - |\psi(\mu)|^2)^\alpha}{(1 - \overline{\psi(\mu)}\psi(w))^{\alpha+2}} u(\mu) |\psi'(\mu)|^2 dm_2(\mu) \quad (1)$$

непрерывно отображает $h_\beta^p(G)$ на $A_\beta^p(G)$ при всех $0 < p < +\infty$, $\alpha \geq 2(\beta + 1)$.

В случае единичного круга аналогичное утверждение установлено вторым автором в работе [3]. Кроме того, устанавливается, что оператор (1) отображает пространство $L_\beta^p(G)$ на $A_\beta^p(G)$ при всех $1 \leq p < +\infty$.

Литература

1. Pommerenke Ch. // Comment. Math. Hel. 1977. V. 52. P. 591-602.
2. Джрбашян М.М. // Сообщ. ин-та матем. и мех. АН АрмССР. 1948. Вып. 2. С.3-30.
3. Шамоян Ф.А. // ДАН СССР. 1981. Т.261. №3. С. 557-561.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТАХ В ВИДЕ ТОНКИХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЖИЛ

Толпаев В.А., Баско Д.В. (Ставрополь)

pm@ncstu.ru

Рассматривается криволинейный пласт, боковая поверхность которого непроницаема, а поперечные размеры пласта малы по сравнению с его протяженностью. Для таких пластов считаем заданными уравнение осевой линии $\vec{r} = \vec{r}(\xi) = x(\xi)\vec{i} + y(\xi)\vec{j} + z(\xi)\vec{k}$ и площадь поперечного сечения $S = S(\xi)$. Так как диаметры всех поперечных сечений пласта значительно меньше его общей протяженности, то в пределах сечения изменением скорости фильтрации можно пренебречь и считать ее одинаковой по всему сечению и направленной по касательной к осевой линии в текущей точке $\vec{v}(\xi, t) = v(\xi, t) \cdot \vec{\sigma}(\xi)$, где $\vec{\sigma}(\xi)$ – единичный касательный вектор осевой линии пласта.

Уравнение неразрывности для течения в таком пласте имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho S(\xi) v(\xi, t) \right) + S(\xi) |\vec{r}'(\xi)| \frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + |\vec{r}'(\xi)| q(\xi, t) = 0, \quad (1)$$

где $q(\xi, t)$ – плотность источников или стоков распределенных вдоль всего пласта. Подставляя в (1) выражения для плотности сжимаемой жидкости $\rho(\xi, p) = \rho_0[1 + \beta_{жс}(p - p_0)]$ и пористости упругого пласта $m(\xi, p) = m_0(\xi) + \beta_c(\xi) \cdot (p - p_0)$ [1, 2], а также учитывая закон Дарси и переходя к использованию приведенного давления получим основное уравнение линейной упругой фильтрации жидкости в пласте в виде криволинейной жилы

$$\rho_0 \frac{k_0}{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(S(\xi) \frac{k(\xi)}{|\vec{r}'(\xi)|} \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) = \rho_0 \beta^* S(\xi) |\vec{r}'(\xi)| \frac{\partial P}{\partial t} - |\vec{r}'(\xi)| q(\xi, t), \quad (2)$$

где $k_0 k(\xi) = K$ – проницаемость пласта, μ – постоянный коэффициент динамической вязкости жидкости, $P = p + \rho_0 g z$ – приведенное давление, ρ_0 – среднее значение плотности жидкости, $\beta^* = \beta_c(\xi) + m_0(\xi) \beta_{жс}$ – коэффициент упругоемкости пласта.

Литература

1. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика. Учебное пособие для вузов. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, 544с.

2. Щелкачев В. Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. – М.: Нефть и газ, 1995, ч. 1, 586с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТОГДА СТАНОВИТСЯ ЦЕННОЙ, КОГДА ОНА ВХОДИТ В ЖИЗНЬ ЛЮДЕЙ. НАЧАЛО ФРАКТАЛЬНОЙ ИНДУСТРИИ

Томова Анна В. (Варна, Болгария)

anna_bg_2000@yahoo.com

Нами сделан электронный сайт с адресом:
http://geocities.com/anna_bg_2000/fractalsappl/index.htm и с названием: ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ НА ФРАКТАЛИТЕ. На нем представлена наша галерея фракталов. Здесь можно даже заказать свои предпочтения на покупки указанных изделий. Этим способом мы подчеркиваем хорошо известный факт, что математическая теория тогда становится ценной, когда она входит в жизнь людей. Фрактальная геометрия — прекрасный современный пример этого утверждения. Сегодня уже можно говорить о начале фрактальной индустрии.

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Туртин Д.В. (Иваново)

Turtin@mail.ivanovo.ac.ru

Для уравнения

$$D_t^m u(x, t) = \sum_{j=0}^{m-1} P_j(x, D_x) D_t^j u(x, t) \quad (1)$$

($P_j(x, D_x)$ — линейные дифференциальные операторы по D_x с переменными растущими коэффициентами) в полуплоскости $\Pi = \{(x, t) : x \in R, t > 0\}$ доказана теорема неединственности решения задачи Коши (р.з.К.). А именно, пусть $h(\theta)$ — непрерывная четная возрас-

такая при $\theta > 0$ функция. Тогда, если

$$\int_1^{\infty} [h(\theta)]^{1-p_0} d\theta < \infty$$

(p_0 —приведенный порядок уравнения (1)), то класс функций $u(x, t)$, удовлетворяющих оценке

$$|u(x, t)| \leq c \exp \left\{ \alpha t + \left| \int_0^x h(\theta) d\theta \right| \right\}$$

($c > 0, \alpha > 0$), является классом неединственности р.з.К. для (1). При этом (1) имеет характеристическое уравнение с многозвенной диаграммой Ньютона. Для уравнений вида (1) с характеристическим уравнением, имеющим однозвенную диаграмму Ньютона, теорема неединственности р.з.К. доказана в [1].

Литература

1. Житомирский Я. И. Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами // Изв. АН СССР, сер. мат. - 1967. - т. 31. Вып 4. - С. 763 - 782.

К ОБРАТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ C

Тюрин В.М. (Липецк)

tvm@lipetsk.ru

Рассмотрим дифференциальный оператор $L = d/dt - A(t)$, где $A(t)$ ($t \in R$) — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, определенный на области определения $D(A) \subset X$ — рефлексивное банахово пространство, при этом $A(t)$ — сильно непрерывен на $D(A)$. Одно из пространств $C = C(R, X)$, $M^p = M^p(R, x)$, $L^p = L^p(r, x)$ будем обозначать через $F = F(R, X)$. $L = L(R, X)$ — локально выпуклое линейное топологическое пространство всех сильно измеримых функций $f : R \rightarrow X$, локально интегрируемых по Бохнеру, с топологией сходимости в среднем. Для линейного оператора $B : L \rightarrow L$ считаем выполненными некоторые условия, в частности существуют постоянные $k' > 0$ и $\Delta > 0$ такие, что для каждого интервала имеет

место неравенство

$$\|\chi_{(r_1, r_2)}(B\varphi u - \varphi Bu)\|_F \leq k' \sup_{r_1 - \Delta \leq t \leq r_2 + \Delta} |\varphi(t)| \cdot \|\chi_{(r_1 - \Delta, r_2 + \Delta)} \cdot u\|_F.$$

Положим $L_r = L - B$, область определения $D(L_r, F) = D(L, F)$. Далее пусть $B^* : L^* \rightarrow L^*$ ($L^* = L(R, X^*)$) есть линейный оператор, имеющий такие же свойства, как и оператор $B : L \rightarrow L$. Определим двойственный оператор $L_r^* = L^* - B^*$, $D(L_r^*, F^*) = D(L, F^*)$, $F^* = F(R, X^*)$. $L^* = -d|dt - A^*(t)$, где $A^*(t)$ — сопряженный оператор к $A(t)$.

Оператор $L_r : D(L_r, F) \rightarrow F$ назовём корректным, если существует такая постоянная $k = k(L, F) > 0$, что для любого $u \in D(L, F)$ справедлива оценка

$$\|u\|_F \leq k \|L_r\|_F.$$

Аналогично определяется корректность оператора $L_r^* : D(L_r^*, F^*) \rightarrow F^*$. Теорема. Если оператор $L_r : D(L_r, F) \rightarrow C$ и двойственный оператор $L_r^* : D(L_r^*, F^*) \rightarrow C^*$ корректны, то оба они обратимы. Примером может служить оператор

$$L_s u = du/dt - A(t)u - \sum_{j=1}^{\infty} A_j(t)u(t - h_j).$$

ОБ ОЦЕНКЕ ПРОЕКТОРОВ ОДНОГО ТИПА ВОЗМУЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ¹

Ускова Н.Б. (Воронеж)

Пусть H — комплексное гильбертово пространство и $\text{End } H$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H . Пусть спектр $\sigma(A)$ оператора A представим в виде $\sigma(A) = \bigcup_{n \geq 1} \sigma_n$, где $\sigma_n \cap \sigma_m = \emptyset$, $n \neq m$, σ_i , $i \geq 1$ — конечные подмножества и $P_i = P(\sigma_i, A)$ — проекторы Рисса. Каждому оператору $X \in \text{End } H$ поставим в соответствие матрицу $X = (X_{ij})$, $X_{ij} = P_i \times P_j$. Введем функцию $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющую условиям: 1) $\alpha(0) = 1$, 2) $\sum_n \alpha(n) = M_1 < \infty$, 3) $\sum_k \alpha(i - k)\alpha(k - j) \leq M_2 \alpha(i - j)$,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 07-01-00131

$M_2 < \infty$. Определим банахову алгебру $\text{End}_\alpha H$ следующим образом: $X \in \text{End } H$ отнесем к $\text{End}_\alpha H$, если $\|X_{ij}\|_\infty \leq C\alpha(i-j)$ с нормой $\|X\|_\alpha = \{\inf C: \|X_{ij}\|_\infty \leq C\alpha(i-j) \forall i, j\}$. Рассмотрим также две последовательности неотрицательных чисел из l_2 $(a_m)_{m=1}^\infty$ и $(b_m)_{m=1}^\infty$. Оператор X из идеала операторов Гильберта–Шмидта $\sigma_2(H)$ отнесем к $\sigma_2(H, a, b)$, если $\|X_{ij}\|_2 \leq \text{const} \alpha_i \beta_j$, $\forall i, j \geq 1$ с нормой $\|X\|_{\alpha\beta} = \{\inf C: \|X_{ij}\|_2 \leq C\alpha_i \beta_j \forall i, j\}$. Рассмотрим возмущенный оператор $A - A^{\nu_1} B_0 A^{\nu_2}$, $B_0 \in \text{End } H$ и пусть $\tilde{P}_k = P(\tilde{\sigma}_k, A - B)$.

Справедлива

Теорема. 1) Пусть $B_0 \in \text{End}_\alpha H$ и

$$20 \max \left\{ \max_{i,j} \frac{\delta_i^{\nu_1} \delta_j^{\nu_2}}{d_{ij}} M_1, \max_{i,j} \frac{\delta_i^{\nu_1 + \nu_2}}{d_{ij}} M_2 \right\} \|B_0\|_* < 1,$$

тогда

$$\|P_i(P_k - \tilde{P}_k)P_j\|_\infty \leq \text{const} \gamma(i, j) \alpha(i - j),$$

где $\gamma(i, j) = \frac{\delta_i^{\nu_1} \delta_j^{\nu_2}}{d_{ij}}$.

2) Пусть $B_0 \in \sigma_2(H, a, b)$ и

$$20 \|B_0\|_{\alpha\beta} \max \left\{ \left(\sum_{m,n} \left(\frac{a_m b_n \delta_m^{\nu_1} \delta_n^{\nu_2}}{d_{mn}} \right)^2 \right)^{1/2}, \max_{k,j} \sum_{k \geq 1} \frac{\delta_k^{\nu_1 + \nu_2} \alpha_k \beta_k}{d_{k,j}} \right\} < 1,$$

тогда $\|P_i(P_k - \tilde{P}_k)P_j\|_2 \leq c \gamma(i, j) a_i b_j$.

Литература

1. Ускова Н.Б. Об оценках спектральных проекторов возмущенных самосопряженных операторов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 416 № 3. С. 712–721.

О МЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ НА ФАКТОР-ПОДПРОСТРАНСТВА ЛИНДЕНШТРАУССА

Устинов Г.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Замкнутое линейное подпространство $E \subset C(Q)$ назовем фактор-подпространством Линденштраусса, если $C(Q)/E$ изометрично пространству Линденштраусса. В этом случае аннулятор $E^\perp \subset C^*(Q)$ изометричен некоторому пространству $L^1(\mu)$.

Теорем 1. Пусть Q – метризуемый компакт, F_i – замкнутые подмножества в Q , $i = 1, 2, \dots$, $F_i \cap F_j = \Lambda$ при $i \neq j$ и $\exists x_i, y_i \in F_i$ для которых $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i = x_0$. Тогда найдутся такие меры $\mu_i \in C^*(Q)$, $\text{supp } \mu_i = F_i$, что подпространство $Y = \overline{\text{sp}(\mu_i)}$ замкнуто в w^* -топологии, изометрично l^1 и $Y_\perp = E \subset C(Q)$ есть факторпространство Линденштаусса.

Установлены также достаточные условия на $E^\perp$ для того, чтобы $C(Q)/E$ было изометрично либо c_0 , либо $C(Q_1)$.

Если Z – замкнутое подпространство в $C(Q)$, $x \notin Z$, то $P_Z x = \{y \in Z : \|x - y\| = \inf_{z \in Z} \|x - z\|\}$ – метрическая проекция x на Z . Известно много работ, исследовавших характер зависимости $P_Z x$ от x , в то же время для случая, когда $\dim Z = \text{codim } Z = +\infty$ эта зависимость мало изучена. Приведем один из полученных результатов в этом направлении.

Теорем 2. Пусть $C(Q)/E$ изометрично c_0 , причем $E^\perp = \overline{\text{sp}(\mu_i)}$, $F_i = \text{supp } \mu_i$, $F_i \cap F_j = \Lambda$ при $i \neq j$ и $D = \{t \in Q : t = \lim_{k \rightarrow \infty} t_{i_k}, t_{i_k} \in F_{i_k}\}$ пересекается лишь с конечным числом множеств F_i . Тогда E – подпространство существования, множество $P_E x$ не компактно $\forall x \notin E$ и отображение $x \rightarrow P_E x$ допускает непрерывную селекцию.

Доказана справедливость заключения теоремы 2 и для некоторых $E \subset C(Q)$, для которых $C(Q)/E$ изометрично $C(Q_1)$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ ЗА КОЛЕБЛЮЩИМСЯ КРЫЛОМ

Федотов А.А. (Москва)

le-tail@list.ru

На основе теории несущей поверхности численно исследована вихревая структура в плоскости симметрии течения за тонким плоским крылом конечного размаха, колеблющимся в потоке идеальной несжимаемой жидкости. Передняя кромка крыла представляет собой параболу, задняя и боковая кромки – отрезки прямых. Передняя кромка обтекается без отрыва, а с задней и боковой кромок в поток жидкости сходит поверхность тангенциального разрыва скорости жидкости. Крыло и поверхность тангенциального разрыва представляются, соответственно, несущей и свободной вихревой поверхностями. Крыло совершает угловые колебания вокруг горизонталь-

ной оси, которая параллельна задней кромке крыла и занимает в его плоскости фиксированное положение. В свою очередь ось совершает вертикальные колебания, оставаясь параллельной самой себе. Такое крыло моделирует работу хвостовых плавников плавающих животных [1], [2].

В работе показано, что ненулевая компонента поверхностного вектора вихря в точках свободной вихревой поверхности, сходящих с кромки стекания корневого сечения крыла, максимальна по модулю в те моменты времени, когда крыло занимает положения, близкие к крайнему верхнему и крайнему нижнему положениям.

Установлено, что с течением времени свободная вихревая поверхность закручивается вокруг своих точек с максимальными по модулю значениями компоненты поверхностного вектора вихря. В результате образуются два ряда вихревых ядер, которые сносятся потоком. При этом вихревые ядра верхнего ряда вращаются против часовой стрелки, а вихревые ядра нижнего ряда — по часовой стрелке. Направление вращения конкретного ядра определяется знаком компоненты поверхностного вектора вихря в точках свободной вихревой поверхности, образующих это ядро.

Литература

1. Зайцев А.А., Федотов А.А. Обтекание идеальной несжимаемой жидкостью тонкого крыла конечного размаха, колеблющегося с большой амплитудой // Изв. АН СССР. МЖТ. 1986. № 5. С. 75-82.
2. Федотов А.А. Эффективность работы хвостового плавникового движителя // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 48-51.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

Феоктистов В.В., Феоктистова О.П. (Москва)

pfeoktis@mail.ru

Уравнения движения вязкого сжимаемого газа в пограничном слое в пространстве $X = R(t) \times R^2(x, y)$, связывающие компоненты вектора скорости (u, v) , плотности ρ , давления p и энтальпии h как функции координат и времени таковы

$$\begin{aligned} \partial_x u + \partial_y v &= 0, & d_t u + \partial_x P_e / \rho &= \nu \partial_y (N \partial_y u) \\ d_t h &= d_t P_e / \rho + \nu \partial_y (N \partial_y u) + \nu N (\partial_y u)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $d_t = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y$, y — переменная А. А. Дородницына, ν — кинематическая вязкость, $N = \mu\rho/(\mu_0\rho_0)$, $\mu = \nu\rho$.

Методом непрерывных преобразований координат и функций доказано существование класса задач, которым соответствуют системы нелинейных уравнений переменного типа [1]. Примером являются полученные авторами из (1) нелинейные уравнения переменного типа в безразмерных переменных для функции h и ω , $\omega = \partial_y(\partial_y u)$:

$$\begin{aligned} &\omega^2 \partial_u(\partial_u \omega) + 2(1 - \beta)(x - u)x\partial_x \omega - \\ &- [\beta(1 - u^2) + 2(1 - \beta)(1 - u)\gamma x] \partial_u \omega + \\ &+ (1 - 2\beta + 2s - s\beta)u\omega - 3\gamma(1 - \beta)x\omega = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где γ , β , s — параметры, характеризующие нестационарность процесса, градиент давления и форму тела соответственно (уравнение для h аналогично). Смена знака коэффициента при $\partial_x \omega$ на линии $u = x$ требует постановки при $x = 1$ дополнительного краевого условия $\omega(1, u) = \omega_1(u)$, где $\omega(x, u)$ — решение задачи для уравнения (2) при $x \geq 1$.

Действие непрерывных групповых преобразований задает на полученном множестве решений системы (1) структуру, которая может быть использована для описания семейства решений, выделения классов решений с заданными свойствами, производство решений из найденных.

Литература

1. Ларькин И. А., Новиков В. А., Яненко Н. Н. Нелинейные уравнения переменного типа. — Новосибирск: Наука, 1983. — 272 с.

О СПЕКТРЕ ВЗВЕШЕННОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ СО ЗВЕЗДНОЙ ГРАНИЦЕЙ¹

Филиновский А.В. (Москва)

flnv@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, — неограниченная область с гладкой границей Γ . Рассмотрим дифференциальное выражение $lu = -(1/\rho)\Delta u$, где $\rho(x) \in C(\bar{\Omega})$ — положительная функция. Будем рассматривать гильбертово пространство $L_{2,\rho}(\Omega)$ с нормой $\|u\|_{L_{2,\rho}(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 \rho dx$.

¹Работа выполнена при поддержке грантов НШ-1464.2003.1 и РФФИ-04-01-00618

Пусть L — самосопряженное расширение по Фридрихсу в пространстве $L_{2,\rho}(\Omega)$ минимального оператора, порождаемого дифференциальным выражением l . Оператор L является неотрицательным самосопряженным оператором в $L_{2,\rho}(\Omega)$. Известны условия на функцию ρ и область Ω , обеспечивающие дискретность спектра оператора L ([1]). Для $\Omega = R^n$ известны также достаточные условия непрерывности спектра оператора L ([2]).

В данной работе рассматривается случай $\rho = r^{-s}$, $r = |x|$, $s \geq 0$. Мы также предполагаем, что границы областей удовлетворяют условию звездности относительно начала координат $(\nu, x) \leq 0$, $x \in \Gamma$, где ν — единичный вектор внешней нормали к Γ , и $|x| > 1$ в $\bar{\Omega}$.

Пусть $S_\eta = \Omega \cap \{r = \eta\}$, $\eta > 0$, и Σ_η есть множество точек x на единичной сфере, удовлетворяющих условию $\eta x \in S_\eta$. Обозначим через λ_η минимальное по модулю собственное значение оператора Лапласа–Бельтрами в Σ_η с нулевым условием Дирихле на $\partial\Sigma_\eta$. Пусть $\Lambda = \liminf_{\eta \rightarrow \infty} |\lambda_\eta|$.

Теорема 1. Если $0 \leq s < 2$, то $\sigma(L) = [0, +\infty)$; если $s = 2$, то $\sigma(L) = [(n-2)^2/4 + \Lambda, +\infty)$; если $s > 2$, то $\sigma(L) \subset [(n-2)^2/4 + \Lambda, +\infty)$.

Теорема 2. При $0 \leq s \leq 2$ спектр оператора L непрерывен, при $s > 2$ спектр оператора L дискретен.

Обозначим через $\lambda_1(s)$ первое собственное значение оператора L при $s > 2$.

Теорема 3. Пусть $n \geq 3$, $s > 2$. Тогда справедливы оценки

$$\frac{(n-2)^2}{4} + \Lambda \leq \lambda_1(s) \leq \frac{(n-2)^2}{4} + \left| \lambda_{\ln \ln \frac{1}{s-2}} \right| + O\left(\frac{\ln \ln \ln \frac{1}{s-2}}{\ln \ln \frac{1}{s-2}} \right), \quad s \rightarrow 2.$$

Литература

- [1] Lewis R.T. // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. V. 271. P. 653–666.
- [2] Eidus D.M. // Journal of Funct. Anal. 1991. V. 100. P. 400–410.

О МЕТОДИКЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА КОРРЕКТНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СУММЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ Фомин В.И. (Тамбов)

При доказательстве математических утверждений (лемм, теорем) преподавателю желательно избегать двух моментов:

- 1) перегруженности доказательства словесным описанием,

2) излишней формализации доказательства с помощью математических символов, ибо в обоих случаях учащимся трудно воспринимать существо излагаемого материала (в первом случае суть доказательства растворяется в обилии слов, во втором случае — скрывается в дебрях математической символики).

При доказательстве нужно соблюдать разумную грань между словесным описанием и использованием математической символики, что способствует прозрачности и ясности доказательства.

Например, в большинстве учебных пособий при доказательстве корректности определения суммы вещественных чисел наблюдается перекося в пользу использования словесного описания. Устранение этого перекося дополнительной формализацией доказательства способствует лучшему пониманию учащимися существа дела.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $A|A'$ и $B|B'$ — сечения в $\mathbb{Q}$, определяющие α и β . Пусть $\Omega_1 = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, $\Omega_2 = \{a' + b' \mid a' \in A', b' \in B'\}$. По определению, $\alpha + \beta = \gamma$

$$a + b \leq \gamma \leq a' + b', \forall a + b \in \Omega_1, \forall a' + b' \in \Omega_2. \quad (*)$$

Теорема. $\exists! \gamma \in \mathbb{R} \mid$ выполняется $(*)$.

► На первом этапе показывается, что

$$(1) \quad a + b \leq \sup \Omega_1 \leq \inf \Omega_2 \leq a' + b', \forall a + b \in \Omega_1, \forall a' + b' \in \Omega_2.$$

$$(1) \Rightarrow \Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R} \mid \text{выполняется } (*)\} \neq \emptyset, \text{ ибо } \sup \Omega_1, \inf \Omega_2 \in \Gamma.$$

На втором этапе: (2) $\sup \Omega_1 \leq \gamma \leq \inf \Omega_2, \forall \gamma \in \Gamma$.

На третьем этапе: (3) $\sup \Omega_1 = \inf \Omega_2$.

(1) — (3) $\Rightarrow \exists! \gamma \in \mathbb{R} \mid$ выполняется $(*)$ ($\gamma = \sup \Omega_1$ или $\gamma = \inf \Omega_2$). ◀

О МЕТОДИКЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ ВЕРХНЕГО И НИЖНЕГО ПРЕДЕЛОВ ОГРАНИЧЕННОЙ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ Фомин В.И. (Тамбов)

Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная числовая последовательность, т.е.

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \mid m \leq x_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}; \quad (1)$$

Ω — множество частичных пределов п. $\{x_n\}$, H — множество предельных точек п. $\{x_n\}$. Непосредственно доказывается

Теорема 1. *Справедливо равенство $\Omega = H$.*

Замечание 1. *Если интервал (a, b) содержит не более конечного числа членов п. $\{x_n\}$, то $H \cap (a, b) = \emptyset$.*

Замечание 2. *Если отрезок $[a, b]$ не содержит предельных точек п. $\{x_n\}$, то на нем имеется не более конечного числа членов п. $\{x_n\}$.*

Справедливость замечаний 1, 2 проверяется предположением от противного, при этом при проверке замечания 2 используются теорема Больцано-Вейерштрасса и теорема 1.

Теорема 2. *У ограниченной п. $\{x_n\}$ существуют верхний и нижний пределы.*

► Из (1) следует в силу предельного перехода в неравенствах, что $m \leq \ell \leq M$ для $\forall \ell \in \Omega$, т.е. множество Ω ограничено $\Rightarrow \exists M^* = \sup \Omega$, $m_* = \inf \Omega$. Покажем, что $M^* \in \Omega$.

Предположим противное: $M^* \notin \Omega \xrightarrow{T.1} M^* \notin H \Rightarrow \exists O_\varepsilon(M^*) \mid$ множество $O_\varepsilon(M^*) \cap \{x_n\}$ конечно или пусто $\xrightarrow{3.1} O_\varepsilon(M^*) \cap H = \emptyset \xrightarrow{T.1} (2)$ $O_\varepsilon(M^*) \cap \Omega = \emptyset$. С другой стороны, $M^* = \sup \Omega \Rightarrow \exists \ell \in \Omega \mid \ell \in (M^* - \varepsilon, M^*) \subset O_\varepsilon(M^*) \Rightarrow O_\varepsilon(M^*) \cap \Omega \neq \emptyset$, что противоречит (2). Предположение от противного не верно. Итак, $M^* \in \Omega$, $M^* = \sup \Omega \Rightarrow \exists \bar{x} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n = M^*$. Аналогично показывается, что $\exists \underline{x} = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n = m_*$. ◀

В силу теорем 1, 2 справедливо включение $H \subset [\underline{x}, \bar{x}]$.

Следствие 1. *Для любого сколь угодно малого положительного числа ε вне интервала $(\underline{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ содержится не более конечного числа членов п. $\{x_n\}$.*

Напомним, что следствие 1 используется при доказательстве достаточности в следующей теореме: $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n\}$ ограничена и $\bar{x} = \underline{x} = a$.

О МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ АКСИОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Фомин В.И. (Тамбов)

В связи с включением элементов функционального анализа в общий курс математики для некоторых специальностей технических вузов и отсутствием учебников по функциональному анализу для этой категории студентов возникает необходимость преподавания ос-

нов функционального анализа на уровне, доступном бывшим выпускникам обычных средних общеобразовательных школ, в том числе, студентам-договорникам, процент которых из года в год растет, но чья подготовка, как правило, не отвечает требуемому уровню знаний. Ниже предлагается одно замечание, которое будет полезно для вышеназванной категории обучаемых при изложении аксиоматики линейного пространства.

При определении линейного пространства E можно указывать восемь аксиом [1, с. 528], а можно ограничиться семью аксиомами [2, с. 71], заменяя аксиомы

$$а) \exists \theta \in E \mid x + \theta = x, \forall x \in E,$$

$$б) \forall x \in E \mid \exists (-x) \in E \mid x + (-x) = \theta,$$

равносильной им аксиомой

$$в) \exists \theta \in E \mid 0 \cdot x = \theta, \forall x \in E.$$

При этом, при первом определении показывается при наличии остальных аксиом линейного пространства, что в) является следствием а) и б) [1, с. 529], но не оговаривается, что из в) следуют а) и б); при втором определении а) и б) выводятся из в) [2, с. 72], но не упоминается о справедливости обратного утверждения.

Предлагается при определении линейного пространства с помощью восьми аксиом показать, что а), б) $\Leftrightarrow$ в) и указать, что в силу доказанной равносильности аксиомы а) и б) в данном определении можно заменить аксиомой в). Если линейное пространство определяется с помощью семи аксиом, то нужно показать, что в) $\Leftrightarrow$ а), б) и отметить, что в данном определении вместо аксиомы в) можно указать аксиомы а) и б).

Литература

1. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одной переменной. - СПб.: "Лань 2002. - 880 с.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977. - 744 с.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

Фролова Е.В. (Липецк)

lsn@lipetsk.ru

Пусть

$$\begin{aligned}
(\hat{K}_b x)(t, s) &= \int_a^b l(t, s, \tau) x(\tau, s) d\tau + \int_c^d m(t, s, \sigma) x(t, \sigma) d\sigma \\
&+ \int_a^b \int_c^d n(t, s, \tau, \sigma) x(\tau, \sigma) d\sigma d\tau,
\end{aligned}$$

$b \in [a, +\infty)$, $t, \tau \in [a, b]$, $s, \sigma \in [c, d]$, интегралы понимаются в смысле Лебега, а ядра l, m, n имеют вид

$$\begin{aligned}
l(t, s, \tau) &= \sum_{i=1}^p l_i(t) \bar{l}_i(s) a_i(\tau), \quad m(t, s, \sigma) = \sum_{j=1}^q m_j(t) \bar{m}_j(s) b_j(\sigma), \\
n(t, s, \tau, \sigma) &= \sum_{k=1}^r n_k(t) \bar{n}_k(s) c_k(\tau, \sigma),
\end{aligned}$$

где $l_i, \bar{l}_i$ ($i = 1, \dots, p$), $m_j, \bar{m}_j$ ($j = 1, \dots, q$), $n_k, \bar{n}_k$ ($k = 1, \dots, r$) — непрерывные и ограниченные на $[a, +\infty)$, $[c, d]$, $[a, +\infty)$, $[c, d]$ соответственно функции; $\int_a^{+\infty} |a_i(\tau)| d\tau < A < \infty$ ($i = 1, \dots, p$), $\int_c^d |b_j(\sigma)| d\sigma < B < \infty$ ($j = 1, \dots, q$), $\int_a^{+\infty} \int_c^d |c_k(\tau, \sigma)| d\sigma d\tau < C < \infty$ ($k = 1, \dots, r$); а системы функций $\{a_i \mid i = 1, \dots, p\}$, $\{b_j \mid j = 1, \dots, q\}$ ортонормированы.

Непосредственно проверяется, что оператор

$$\begin{aligned}
(Kx)(t, s) &= \int_a^{+\infty} l(t, s, \tau) x(\tau, s) d\tau + \int_c^d m(t, s, \sigma) x(t, \sigma) d\sigma \\
&+ \int_a^{+\infty} \int_c^d n(t, s, \tau, \sigma) x(\tau, \sigma) d\sigma d\tau
\end{aligned}$$

с указанными ядрами действует и непрерывен в пространстве $C(D)$ непрерывных и ограниченных на $D = [a, +\infty) \times [c, d]$ функций и справедливо равенство $K = \lim_{b \rightarrow +\infty} \hat{K}_b$.

Через $D_1(s)$ и $D_2(t)$ обозначим определители $D_1(s) = |\delta_{ik} - \mu_{ik}(s)|$, $D_2(t) = |\delta_{jl} - \nu_{jl}(t)|$, где $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\mu_{ik}(s) = \int_a^{+\infty} a_i(\tau) l_k(\tau) \bar{l}_k(s) d\tau$ ($i, k = 1, \dots, p$), $\delta_{jl} = 1$ при $j = l$, $\delta_{jl} = 0$ при $j \neq l$, $\nu_{jl}(t) = \int_c^d b_j(\sigma) m_l(t) \bar{m}_l(\sigma) d\sigma$ ($j, l = 1, \dots, q$).

Теорема. Если ядра l, m, n имеют указанный вид, $D_1(s) \neq 0$, $|D_2(t)| \geq \beta > 0$, то оператор $I - K$ обратим.

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА-ДИРИХЛЕ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРОВ¹

Халова В.А. (Саратов)

Halova VA@info.sgu.ru

Рассмотрим оператор

$$Ly = \frac{1}{\beta}(\alpha y(x) - y(1-x)), \quad x \in [0, 1], \quad \beta = \alpha^2 - 1 \neq 0, \quad (1)$$

с граничным условием

$$U(y) = \alpha y(0) + \beta y(1) - (y, \varphi) = 0, \quad (2)$$

где a, b — некоторые константы, $(y, \varphi) = \int_0^1 y(t)\varphi(t) dt$, $\varphi(t) \in C[0, 1]$.

Оператор (1)–(2) является главной частью оператора, обратного к

$$Af = \alpha \int_0^x f(t) dt + \int_0^{1-x} f(t) dt + \sum_{k=1}^m (f, v_k) g_k(x).$$

Для разложений по собственным и присоединенным функциям оператора (1)–(2) установлен аналог теоремы Жордана-Дирихле из теории тригонометрических рядов Фурье ([1], с.121–122).

Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора L .

Теорема. Если $f(x) \in C[0, 1] \cap V[0, 1]$, $U(f) = 0$, то выполняется соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f d\lambda \right| = 0.$$

Литература

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-2970.2008.1).

ОПТИМИЗАЦИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ЗАКРЕПЛЕННЫМ КОНЦОМ ЗА ПРОИЗВОЛЬНЫЙ КРАТНЫЙ 2l ПРОМЕЖУТОК ВРЕМЕНИ

Холомеева А.А. (Москва)

trf39@mail.ru

В работе рассматриваются колебания упругой струны, удовлетворяющие волновому уравнению, причем рассмотрение ведется в течение промежутка времени T , кратного удвоенной длине струны. Правый конец струны закреплен, т.е. $u(l, t) = 0$, а управление осуществляется разностью упругих сил на двух концах струны $u_x(l, t) - u_x(0, t) = \mu(t)$. Управление переводит процесс колебаний струны из произвольно заданного начального состояния в произвольно заданное финальное состояние.

Поскольку при $T > 2l$ таких управлений существует бесконечное число, ставится вопрос об отыскании оптимального граничного управления, то есть задача об отыскании среди всех решений $\mu(t) \in L_2[0, T]$ тех, которые минимизируют интеграл граничной энергии $\int_0^T \mu^2(t) dt$.

В качестве обобщенного решения волнового уравнения в работе рассматривается решение $u(x, t)$ из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$. Впервые этот класс был введен В.А. Ильиным для решения задач оптимального граничного управления и определение этого класса можно найти в работе [1].

Для решения поставленной задачи требуется отдельно рассмотреть так называемую начально-краевую задачу для волнового уравнения. В работе вводится определение обобщенного из класса $\widehat{W}_2^1(Q_T)$ решения этой задачи через соответствующее интегральное тождество.

Для определенного таким образом решения смешанной краевой задачи были доказана теорема существования и теорема единственности. Причем в работе указывается явный аналитический вид этого решения.

Основным результатом данной работы является найденное в явном виде оптимальное граничное управление колебаниями струны.

Литература

1. Ильин В.А., Дифференциальные уравнения. 2000. Т.36, N 11. с. 1513 - 1528.
2. Ильин В.А., Мойсеев Е.И., Дифференциальные уравнения. 2006. Т.42, N 11. с. 1558 - 1570.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Хребтова С.С. (Воронеж)

Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = \varepsilon_1(t)u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} + f(t, x), \quad (1)$$

$$u(t_0) = u_0(x), \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, $t \in T = [t_0, t_1]$, u — искомая функция, ε_1 , f , — случайные процессы, заданные характеристическим функционалом [1]

$$\varphi(v, \omega) = M(\exp(i \int_T \varepsilon_1(s)v(s)ds + i \int_T \int_{R^3} f(s, \tau)\omega(s, \tau)dsd\tau)),$$

$u_0(x)$ —случайный процесс, независимый с случайными процессами ε_1 , f . Пусть $F[f(x)](\xi)$ — преобразование Фурье функции f по переменному x , $F^{-1}[\varphi(\xi)](x)$ — обратное преобразование Фурье, $*$ — знак свертки по переменному x , $\chi(t_0, t, s) = \text{sign}(s - t_0)$ при условии, что s принадлежит отрезку с концами t_0, t и $\chi(t_0, t, s) = 0$ в противном случае, $\frac{\delta f(x)}{\delta x(t)}$ — вариационная производная [1].

Теорема 1. Обобщенное математическое ожидание $M(u(t, x))$ решение задачи (1), (2) выражается формулой

$$M(u(t, x)) = M(u_0(x)) * F^{-1}[e^{-(\xi_2^2 + \xi_3^2)(t-t_0)} \varphi(i\xi_1^2 \chi(t_0, t, \cdot), 0)](x) - \\ - i \int_{t_0}^t F^{-1}[e^{-(\xi_2^2 + \xi_3^2)(t-s)} F[\frac{\delta \varphi(i\xi_1^2 \chi(s, t, \cdot), 0)}{\delta \omega(s, x)}](\xi)](x) ds.$$

Пусть $\psi(v)$ — характеристический функционал процесса ε_1 .

Теорема 2. Если случайный процесс f не зависит от случайных процессов ε_1 и $u_0(x)$, то

$$M(u(t, x)) = M(u_0(x)) * F^{-1}[e^{-(\xi_2^2 + \xi_3^2)(t-t_0)} \psi(i\xi_1^2 \chi(t_0, t, \cdot))](x) + \\ + \int_{t_0}^t F^{-1}[e^{-(\xi_2^2 + \xi_3^2)(t-s)} \psi(i\xi_1^2 \chi(s, t, \cdot))](x) * M(f(s, x)) ds$$

является обобщенным математическим ожиданием решения задачи (1), (2).

Литература

1. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа/В.Г. Задорожний, М.-Ижевск: НИЦ РХД, 2006.- 316 с.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ОПЕРАТОРОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ¹ Хромов А.А. (Саратов)

Рассмотрим уравнение первого рода:

$$Au \equiv \int_0^x u(t) dt = f(x), \quad (1)$$

где $u(x)$ – непрерывна, а $f(x)$ задана ее δ -приближением $f_\delta(x)$ в метрике $C[0, 1]$. Требуется по $f_\delta(x)$ найти приближение к $u(x)$. С этой целью используем семейство операторов Ω_r , $r > 0$, введенное в [1] для решения задачи восстановления функций.

По аналогии с [2] построим операторы:

$$T_r^\circ f = \begin{cases} r^2 \int_0^1 e^{-r(t-x)} f(t) dt + r(e^{-r(1-x)} f(1) - f(x)), & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ -r^2 \int_0^x e^{-r(x-t)} f(t) dt + rf(x), & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Лемма. Для норм операторов T_r° справедлива двусторонняя оценка, асимптотическая по r при $r \rightarrow \infty$:

$$\frac{r}{2} + \psi_2(r) \leq \|T_r^\circ\|_{L_2[0,1]} \leq 2r + \psi_1(r),$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-2970.2008.1).

где $\psi_1(r) = O(re^{-r/2})$, $\psi_2(r) = O(re^{-2r})$.

Обозначим $\Delta(r, T_r^\circ) = \sup\{\|T_r^\circ f_\delta - u\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - f\|_{C[0,1]} \leq \delta\}$.

Теорема. Для того чтобы $\Delta(r, T_r^\circ) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ необходимо и достаточно так согласовать $r = r(\delta)$, чтобы $r(\delta) \rightarrow \infty$, а $r(\delta)\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Литература

1. Хромова Г. В. Об одном методе решения задачи восстановления функций // Настоящий сборник.
2. Хромов А. А. Приближение решений простейшего интегрального уравнения с помощью сумм Фейера // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тез. докл. 14-й Саратовской зимней школы, посв. памяти акад. П. Л. Ульянова. Саратов, 28 янв.-4 февр. 2008г. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2008. С. 199-200.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ¹

Хромов А.П. (Саратов)

KhromovAP@info.sgu.ru

Пусть A — интегральный оператор:

$$Af = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

Займемся вопросом о сходимости разложений по собственным функциям оператора A на всем отрезке $[0, 1]$ в случае, когда область значений этого оператора удовлетворяет условию:

$$y(0) = y(1). \quad (1)$$

Следующая теорема показывает насколько богат такой класс операторов.

Теорема 1. Если $Af = \int_0^1 A_1(x, t) f(t) dt$ произвольный оператор с кусочно непрерывным ядром, $g(x) \in C[0, 1]$ и $g(0) \neq g(1)$, то область значений оператора $Af = \int_0^1 A_1(x, t) f(t) dt + g(x) \int_0^1 v(t) f(t) dt$, где $v(t) = \frac{A_1(1, t) - A_1(0, t)}{g(0) - g(1)}$, удовлетворяет (1).

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-2970.2008.1).

Теорема 2. Пусть A^{-1} существует, $A(x, t)$, $A_x(x, t)$, $A_t(x, t)$, $A_{xt}(x, t)$, $A_{x^2}(x, t)$ ($A_{x^s t^l} = \frac{\partial^{s+l}}{\partial x^s \partial t^l} A$) непрерывны при $t \leq x$ и $t \geq x$ (см. [1]) и $\Delta A(x, t)|_{t=x} = A(x, x-0) - A(x, x+0) = 1$. Тогда для любой $f(x)$ из $L[0, 1]$ имеет место

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|S_r(f, x) - \sigma_r(f, x)\|_{C[0,1]} = 0,$$

где $S_r(f, x)$ — частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям для тех характеристических чисел λ_k , для которых $|\lambda_k| < r$, $\sigma_r(f, x)$ — частичная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе $\{e^{2k\pi i x}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ для тех k , для которых $|2k\pi| < r$.

Литература

1. Хромов А.П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. 1981. Т. 114(156), № 3. С. 378–405.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ¹

Хромова Г.В. (Саратов)

Решение многих задач теории уравнений первого рода приводит к исследованию семейств операторов, аппроксимирующих точное решение и выражающихся через резольвенты некоторых неограниченных операторов. Такие операторы имеют сложную структуру и их изучение является достаточно трудным делом.

Здесь предлагается метод построения регуляризирующих операторов, использующий комбинации простейших операторов указанной структуры. Новизна данного подхода состоит в том, что он позволяет получать приближения к непрерывным решениям уравнений первого рода не являющихся, вообще говоря, непрерывными функциями.

Рассмотрим задачу восстановления непрерывной функции $u(x)$ по ее δ -приближению $f_\delta(x)$ в пространстве $L_2[0, 1]$ (эту задачу можно трактовать как задачу решения уравнения первого рода $Au = f$, где A — оператор вложения из $C[0, 1]$ в $L_2[0, 1]$, с приближенно заданной

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих школ (проект НШ-2970.2008.1).

правой частью). Возьмем $r > 0$ и семейство операторов

$$\Omega_r u = \begin{cases} r \int_0^1 e^{r(x-t)} u(t) dt, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ r \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-r(x-t)} u(t) dt, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Теорема. Для сходимости

$$\Delta(u, \Omega_r) \equiv \sup\{\|\Omega_r f_\delta - u\|_{L_\infty[0,1]} : \|f_\delta - u\|_{L_2} \leq \delta\} \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0$ необходимо и достаточно согласовать $r = r(\delta)$ так, чтобы $r(\delta) \rightarrow \infty$, а $(r(\delta))^{1/2} \delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Хубиев К.У. (Нальчик)

niipma@mail333.com

Рассмотрим нагруженное уравнение гипербола-параболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^{2-H(y)} u}{\partial y^{2-H(y)}} = \lambda \operatorname{sign} y \cdot u(x - H(-y)y, 0) \quad (1)$$

в области Ω , ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = h > 0$ соответственно, и характеристиками уравнения (1) $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$; $\lambda = \text{const}$, $H(y)$ — функция Хевисайда. Через Ω^+ и Ω^- обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно, а через I интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию монотонности **М** (см. [1]), если для всех x, y таких, что $0 < x < y < 1$, выполняется

$$\varphi(x) \in C^1[0, 1], \quad \varphi(x) \geq 0, \quad \int_0^1 \varphi(x) dx < \infty, \quad \varphi(x) \geq \varphi(y), \quad \varphi'(x) < \varphi'(y).$$

Задача. Найти в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega \setminus I)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0, y) = \rho_1(y), \quad u(1, y) = \rho_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u(x/2, -x/2) + \int_0^1 K(x, \xi) u(\xi, 0) d\xi = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

где $\rho_1(y), \rho_2(y), \psi(x), K(x, \xi)$ - заданные функции.

Имеет место следующая

Теорема. Если $\rho_1(y), \rho_2(y)$ - функции, непрерывные в замыкании области их определения, $\psi(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $\lambda \geq 0$, и функция $K(x, \xi)$ представима в виде $K(x, \xi) = \delta(\xi) + \text{sign}(x - \xi)\varphi(|x - \xi|)$, где $\varphi'(t)$ удовлетворяет условию М, $\delta(t), \varphi''(t) \in L[0, 1]$, то задача (1)-(3) имеет, и притом единственное решение.

Литература

[1] Назгушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. - 272 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МЕЖДУПРЕДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Чадаев В.А. (Грозный)

askhabov@yandex.ru

Рассмотрим уравнение в частных производных дробного порядка

$$D_{0t}^{\beta} u(x, \tau) = a \cdot D_{0x}^{\alpha} u(s, t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = 0 \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(X, t) = \varphi(t), \quad (3)$$

где D_{0z}^{σ} есть [1] оператор дробного дифференцирования порядка $0 < \sigma \leq 2$; $0 < \beta \leq 1$, $1 < \alpha \leq 2$; $u(x, t) \in C^2[0, T] \cap C^4[0, X]$, $\varphi(t) \in C[0, T]$. Используя представление [1]

$$D_{0z}^{\sigma} y(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(\sigma - k + 1)} x^{k-\sigma} + D_{0z}^{-(n-\sigma)} y^{(n)}(s); \quad n = 1, 2 \quad (4)$$

и аппроксимируя $y'(z), y''(z)$ стандартным образом на узлах сетки (x_i, t_j) , где $x_i = \frac{i}{n}X$, $t_j = \frac{j}{m}T$, для уравнения (1) с условиями (2), (3) получим разностный аналог.

Приведя подобные члены в разностном аналоге, имеем m - слойную систему с матрицами Хессенберга [2], которую решим методом модифицированной прогонки [3].

Литература

1. *Натушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. - 272 с.
2. *Parlett B.N.* Global convergence of the basic QR-algorithm on Hessenberge matrices // *Math. Comp.* 1968. V. 22. P. 803-817.
3. *Чадаев В.А.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения дробного порядка методом модифицированной прогонки // *Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения"*. Новосибирск, 2007. С. 351-352.

О МНОЖЕСТВЕ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ¹

Чернов А.В. (Нижний Новгород)

chavnn@mail.ru

Пусть $n, m, l, s \in N$ - фиксированные числа; $\Pi \subset R^n$ - измеримое по Лебегу ограниченное множество; $\mathcal{X}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}$ - банаховы идеальные пространства (БИП) измеримых на Π функций, $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}^s$ - выпуклое множество; $A: \mathcal{Z}^m \rightarrow \mathcal{Y}^l$ - заданный линейный ограниченный оператор (ЛОО); $f: \Pi \times R^l \times R^s \rightarrow R^m, \theta \in \mathcal{X}^l$ - заданные функции.

Рассмотрим уравнение (ср. [1])

$$x(t) = \theta(t) + A[f(., x(.), u(.))](t), t \in \Pi, x(.) \in \mathcal{X}^l. \quad (1)$$

Будем предполагать, что выполнены условия: Z) Пространство $\mathcal{Z}$ вложено в БИП $\mathcal{Z}_0$ с порядково непрерывной нормой; A) ЛОО A обладает для любого $\delta > 0$ вольтерровской δ -цепочкой, является монотонным (векторные неравенства понимаем покомпонентно) и допускает расширение до ЛОО $\mathcal{Z}_0^m \rightarrow \mathcal{X}^l$; F) $f(., y(.), u(.)) \in \mathcal{Z}^m$ для всех $y \in \mathcal{Y}^l, u \in \mathcal{D}$, функция $f(t, y, u)$ выпукла по $\{y; u\} \in R^l \times R^s$ (по всем компонентам) и не убывает по $y \in R^l$; $\exists$ неубывающая функция $\mathcal{N}: R_+ \rightarrow R_+$ такая, что

$$\|f(., y(.), u(.)) - f(., y_0(.), u(.))\| \leq \mathcal{N}(M) \cdot \|y - y_0\|$$

при $\|y\|, \|y_0\|, \|u\| \leq M$; $\exists$ функция $f_*: \Pi \times \mathcal{U}^s \rightarrow R^m$ такая, что

- а) $f(t, y, u) \geq f_*(t, u)$ для п.в. $t \in \Pi$ и для всех $\{y; u\} \in R^l \times R^s$;
- б) $f_*(., u(.)) \in \mathcal{Z}^m$ для всех $u \in \mathcal{U}^s$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 07-01-00495

Обозначим $\Omega = \{u \in \mathcal{D} : \exists \text{ решение } x[u] \text{ уравнения (1)}\}$ - множество глобальной разрешимости уравнения (1).

Теорема 1. Множество Ω выпукло, а решение $x[u]$ выпукло на Ω и поточечно ограничено снизу функцией из $\mathcal{X}^l$ на любом отрезке из Ω .

Теорема 2. Пусть $u_0, u_1 \in \Omega, u_\lambda = \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_0$. Тогда при условиях теоремы 1 функция $\nu(\lambda) = \|x[u_\lambda]\|$ равномерно непрерывна по $\lambda \in [0; 1]$.

Литература

1. В.И.Сумин, А.В. Чернов. О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений вольтерровских операторных уравнений // Вестник ННГУ им. Н.И.Лобачевского. Сер. Мат. моделир. и оптим. упр. Вып. 1(26)-2003-С. 39-49.

КВАЗИУРОВНИ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ВОЗМУЩЕННЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Чубурин Ю.П. (Ижевск)

chuburin@otf.pti.udm.ru

Рассматривается оператор Шредингера в $L^2(\mathbf{R}^2)$ вида $H_\varepsilon = H_0 + V(x) + \varepsilon W(x_1 - x_2)$, $x = (x_1, x_2)$. Здесь $H_0 = -\Delta$, $V(x)$ - вещественная ограниченная периодическая функция с периодами, равными (для простоты записи) единице (в общем случае они должны быть соизмеримыми), $\varepsilon > 0$ - малый параметр, $W(x_1)$ - вещественная функция, удовлетворяющая оценке $|W(x_1)| \leq e^{-a|x_1|}$, где $a > 0$. В случае $V(x) = U(x_1) + U(x_2)$ гамильтониан H_ε моделирует взаимодействие двух квантовых частиц в периодической среде.

Введем обозначения $\Omega_0 = [0, 1]^2$ и $\Omega^* = [-\pi, \pi)^2$ для ячеек в прямой и обратной решетках, отвечающих группе сдвигов $x \mapsto x + n$, $n \in \mathbf{Z}^2$. Как известно, оператор $H_V = H_0 + V(x)$ унитарно эквивалентен семейству операторов $H_V(k) = H_0(k) + V(x)$, определенных в $L^2(\Omega_0)$ на блоховских функциях ($k \in \Omega_0^*$ - квазиимпульс). Оператор $H_V(k)$ имеет чисто дискретный спектр, его собственные значения обозначим через $\lambda_n(k)$, $n = 1, 2, \dots$

Перейдем к другим ячейкам $\Omega = \mathbf{R} \times [0, 1]^2$, $\Omega^* = [-\pi, \pi)$, отвечающим сдвигам $x \mapsto x + (\nu, \nu)$, $\nu \in \mathbf{Z}$. Оператор H_ε унитарно эквивалентен семейству операторов $H_\varepsilon(\kappa)$ в $L^2(\Omega)$ формально того же вида. Предположим, что $\lambda_0 = \lambda_{n_0}(k_{10}, \kappa - k_{10})$ является невырожденным

собственным значением $H_V(k_{10}, \kappa - k_{10})$, отвечающим нормированной собственной функции $\psi_{n_0}(x, (k_{10}, \kappa - k_{10}))$, причем $\partial \lambda_{n_0}(k_{10}, \kappa - k_{10}) / \partial k_1 = 0$, $\partial^2 \lambda_{n_0}(k_{10}, \kappa - k_{10}) / \partial k_1^2 \neq 0$.

ТЕОРЕМА. *Предположим, что*

$$W_0 = \int_{\Omega} W(x) |\psi_{n_0}(x, (k_{10}, \kappa - k_{10}))|^2 dx \neq 0.$$

Тогда для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует ровно один квазиуровень (т.е. собственное значение или резонанс) λ кратности единицы, при этом

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\varepsilon^2 W_0^2}{2 \partial^2 \lambda_{n_0}(k_{10}, \kappa - k_{10}) / \partial k_1^2} + O(\varepsilon^3).$$

Если, кроме того, $W_0 \partial^2 \lambda_{n_0}(k_{10}, \kappa - k_{10}) / \partial k_1^2 < 0$, то квазиуровень является собственным значением.

НОВЫЙ ИНТЕГРИРУЕМЫЙ СЛУЧАЙ В ДИНАМИКЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕКОНСЕРВАТИВНОМ ПОЛЕ СИЛ

Шамолин М.В. (Москва)

shamolin@imec.msu.ru, shamolin@professor.ru

Ранее было установлено [1], что структура динамических уравнений движения свободного трехмерного твердого тела при наличии следящей силы на $so(3) \times R^3$ при определенных условиях сохраняется при переносе динамических свойств на случай большей размерности. Настоящая работа посвящена изучению движения четырехмерного твердого тела, находящегося в неконсервативном поле сил сопротивления с так называемой переменной диссипацией [1].

Предполагается что все взаимодействие (четырёхмерного) твердого тела со средой, заполняющей неограниченное четырехмерное пространство, сосредоточено на той части гладкой (трехмерной) поверхности тела, которая имеет форму (трехмерного) шара K^3 . При этом угловая скорость движения такого тела — элемент алгебры $so(4)$, а скорость центра масс — элемент R^4 .

Если оператор инерции в системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$, связанной с телом (ось Dx_1 направлена вдоль оси динамической симметрии, а декартова система $Dx_2x_3x_4$ связана с трехмерным шаром),

имеет диагональный вид

$$\text{diag}\{I_1, I_2, I_3, I_4\}, \quad I_2 = I_3 = I_4, \quad \Omega \in so(4)$$

— матрица угловой скорости твердого тела, то та часть уравнений движения, которая отвечает алгебре $so(4)$, имеет следующий вид [1]:

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M,$$

где $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$, $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2$, ..., $\lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2$, M — момент внешних сил, действующих на тело в R^4 , спроектированный на $so(4)$, $[\ , \]$ — коммутатор в $so(4)$.

Поле сил определяется по аналогии с полем, используемым при моделировании воздействия сопротивляющейся среды на твердое тело в условиях струйного обтекания [1].

Литература

[1] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией. М.: Изд-во "Экзамен 2007. — 352 с.

О ПРОДОЛЖЕНИИ ИНВАРИАНТНОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ¹

Шананин Н.А. (Москва)

nashanin@inbox.ru

Пусть $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ - решение уравнения

$$\sum_{m-\mu < \langle \varrho, \alpha \rangle \leq m} a_\alpha(x, [u]_{m-\mu}(x)) \partial^\alpha u = f(x, [u]_{m-\mu}(x)), \quad (1)$$

с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - неотрицательный целочисленный мультииндекс, $\langle \varrho, \alpha \rangle = \varrho_1 \alpha_1 + \varrho_2 \alpha_2 + \dots + \varrho_n \alpha_n$, - взвешенный порядок дифференциального оператора ∂^α , веса ϱ_k - натуральные числа $k = 1, 2, \dots, n$, $\mu = \min_j \varrho_j$, $[u]_k$ - совокупность всех производных функции $u(x)$, взвешенный порядок которых не больше k . Обозначим через

$$\mathcal{H}_u(x, \xi, h) = \sum_{k=0}^{\mu-1} h^k \sum_{\langle \varrho, \alpha \rangle = m-k} a_\alpha(x, [u]_{m-\mu}(x)) (i\xi)^\alpha,$$

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00253.

главный пучок символов уравнения (1) на решении $u(x)$, $(x, \xi, h) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Положим $\xi' = \{\xi_j | \varrho_j = \mu\}$ и ξ'' - дополнение до полной совокупности ξ . Предположим, что в каждой точке y связной компоненты $\mathcal{F}_{x^0}$ слоя $\{x \in \Omega | x_j = X_j^0, \forall j : \varrho_j > \mu\}$, содержащей x^0 , для любой пары неколлинеарных векторов (ξ'^0, ξ''^0) и $(\eta'^0, 0)$ уравнение $\mathcal{H}_u(y, z\eta'^0 + \xi'^0, \xi''^0, 0) = 0$ имеет только простые корни и, кроме того, найдётся окрестность W точки $(y, \eta'^0, \xi^0, 0)$, в которой мнимая часть каждого из корней уравнения $\mathcal{H}_u(x, z\eta' + \xi', \xi'', h) = 0$ либо тождественно равна нулю, либо отлична от нуля во всех точках W .

Теорема. Если росток решения $u(x)$ уравнения (1) локально инвариантен в точке x^0 относительно преобразования g (группы преобразований G) сохраняющего (-щих) решение, то $u(x)$ локально инвариантно относительно g (G) во всех точках $\mathcal{F}_{x^0}$.

ГАРАНТИРУЮЩЕЕ РАВНОВЕСИЕ УГРОЗ-КОНТРУГРОЗ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КОАЛИЦИОННОЙ ИГРЕ С РИСКОМ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Шарапова В.Н. (Борисоглебск)

lapusia2@yandex.ru

В работе исследована коалиционная дифференциальная игра в условиях неопределенности, с фиксированной коалиционной структурой; коалиции состоят из одинакового количества игроков. Объединяясь в совместном выборе стратегий, игроки внутри каждой коалиции формируют сумму своих функций выигрыша. Коалиция K_i стремится по возможности максимизировать свою функцию выигрыша путем выбора стратегии U_{K_i} . При этом обе коалиции учитывают возможность реализации любой неопределенности. Между коалициями строится равновесие угроз - контругроз. В качестве равновесия в игре рассматривается коалиционное гарантирующее равновесие угроз-контругроз на основе функций риска игроков[1]. Функция риска игроков коалиции строится как разность максимума функции выигрыша игрока коалиции по его стратегии и ее значения на любых допустимых стратегиях всех игроков. Указанное равновесие формализовано на основе принципов Парето (внутри коалиций), угроз-контругроз (между коалициями) и Парето (гарантия по неопределённости на основе функций риска). Игроки ориентируются на реализацию наихудшего для него значения неопределенности,

при которой функция риска будет принимать максимальное значение. Установлены свойства введенного равновесия. Исходная игра сведена к бескоалиционной (позиционную игру трёх лиц). Получены достаточные условия оптимальности.

Вычислительный эксперимент был проведен в системе компьютерной математики Mathcad 13. Результаты эксперимента подтвердили работоспособность достаточных условий существования исследованного равновесия.

Литература

1. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Риски и исходы в многокритериальных задачах управления. Тбилиси. Интеллекти, 2004. - 358 с.

КЛАССИФИКАЦИЯ И ТОПОЛОГИЗАЦИЯ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ КУРСАНТОВ ПРОФЕССИОНАЛЬНО ЗНАЧИМЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ УМЕНИЯМ

Шунина Г.А. (Минск)
SHUNINAGALINA@mail.ru

В настоящее время разрабатываются и внедряются новые современные образовательные технологии преподавания математики в вузах Беларуси в контексте перестройки всего учебно-воспитательного процесса с целью повышения качества высшего и военного образования. Эффективность обучения математике в вузах можно достичь путём совершенствования не только содержания, но и форм, средств и методов обучения, которые образуют технологии обучения математике. По нашему мнению для повышения эффективности формирования профессионально значимых математических умений (ПЗМУ), кроме привлечения современных методов обучения, целесообразно также провести более подробную классификацию форм обучения по различным признакам. Чем детальнее разработаны формы обучения, тем больше возможностей выбора эффективных средств и методов обучения. Для обучения ПЗМУ курсантов некоторых специальностей одного из факультетов Военной академии Беларуси проведена классификация форм обучения по следующим признакам: 1) военной специфики. 2) количественному составу. 3) структурные занятия. 4) продолжительности занятия. 5) техническим средствам. 6) самостоятельному обучению. 7) месту обучения. 8) контролю знаний. 9) углубленному изучению. В результате классификации форм

обучения по различным признакам получена общая типологизация всех форм обучения и определена вся совокупность форм обучения математике в военном вузе. В отличие от классификации по конкретным признакам, где формы обучения строго разделены, при типологизации формы обучения не всегда взаимоисключают друг друга. Например, лекцию можно читать потоку или группе традиционным способом или с использованием компьютерных технологий. На основе анализа существующих форм обучения и специфики учёбы в военном вузе обоснованы и предложены дополнительные занятия по высшей математике и новые формы их проведения для более успешного формирования ПЗМУ этих курсантов.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ НА ДЕРЕВЕ ПО СПЕКТРАМ¹

Юрко В.А. (Саратов)

yurkova@info.sgu.ru

Рассмотрим компактное связное дерево T в $\mathbf{R}^m$ с корнем v_0 , множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $E = \{e_1, \dots, e_r\}$. Пусть $\Gamma := \{v_0, \dots, v_p\}$ – множество граничных вершин. Предположим, что длина каждого ребра равна 1. Каждое ребро параметризуется параметром $x \in [0, 1]$, причем $x = 1$ соответствует начальной точке (ближайшей к корню). Функция Y на T может быть представлена как вектор $Y(x) = [y_j(x)]_{j=\overline{1, r}}$, $x \in [0, 1]$, где функция $y_j(x)$ определена на ребре e_j . Пусть $n \geq 2$ и пусть $q_\nu(x) = [q_{\nu j}(x)]_{j=\overline{1, r}}$, $\nu = \overline{0, n-2}$ – интегрируемые функции на T . Рассмотрим дифференциальное уравнение на T

$$y_j^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-2} q_{\nu j}(x) y_j^{(\nu)}(x) = \lambda y_j(x), \quad j = \overline{1, r}. \quad (1)$$

Пусть $\Lambda_{sk\mu} := \{\lambda_{lsk\mu}\}_{l \geq 1}$, $s = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, n-1}$, $\mu = \overline{k, n}$, – собственные значения краевой задачи для уравнения (1) с краевыми условиями $(Y^{(\nu-1)})|_{v_s} = 0$, $\nu = \overline{1, k-1}$, μ , $(Y^{(\xi-1)})|_{v_j} = 0$, $\xi = \overline{1, n-k}$, $j = \overline{0, p} \setminus s$ и условиям склейки из [1] в каждой внутренней вершине v_m , $m = \overline{p+1, r}$. Исследуется обратная задача вос-

¹Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ и ННС (проекты 07-01-00003 и 07-01-92000-ННС-а)

становления потенциала $q = \{q_\nu\}_{\nu=\overline{0, n-2}}$ на T по системе спектров $\Lambda := \{\Lambda_{sk\mu}\}$, $s = \overline{1, p}$, $k = \overline{1, n-1}$, $\mu = \overline{k, n}$.

Теорема. Задание Λ однозначно определяет потенциал q на T .

Метод доказательства является развитием метода спектральных отображений, изложенного в [2], и дает также конструктивную процедуру решения обратной задачи.

Литература

1. Yurko V.A. An inverse problem for higher-order differential operators on star-type graphs. Inverse Problems 23 (2007), 893-903.
2. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. - М.: Физматлит, 2007.

АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ МАТРИЦЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДУ

Яковлева Т.П. (Борисоглебск)

2409555@mail.ru

Рассмотрим неустойчивую по Ляпунову систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{x} = Ax, \quad (1)$$

где матрица $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$, неустойчивая. Требуется найти такую матрицу $H = (h_{ij})$, $i, j = 1, 2$, чтобы норма $\|A - \tilde{A}(H)\|$, где $\tilde{A}(H) = A + H$ была по возможности меньше, т.е. решить задачу

$$\|A - \tilde{A}(H)\| \longrightarrow \min_H \quad (2)$$

и при этом система $\dot{x} = \tilde{A}(H)x$ стала устойчивой по Ляпунову. Нетрудно видеть, что задача (2) эквивалентна задаче $\|H\|^2 \longrightarrow \min$. Для матрицы H , которую назовем корректирующей для A , запишем условия Рауса-Гурвица

$$g_1(h_{11}, \dots, h_{22}) = a_{11} + h_{11} + \varepsilon_1 \leq 0,$$

$$g_2(h_{11}, \dots, h_{22}) = (a_{11} + h_{11})(a_{22} + h_{22}) - (a_{12} + h_{12})(a_{21} + h_{21}) + \varepsilon_2 \leq 0,$$

где неотрицательные слагаемые $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ введены для того, чтобы строгие неравенства вести к нестрогим. Теперь для обеспечения (2) достаточно решить следующую выпуклую задачу оптимизации

$$f(h_{11}, \dots, h_{22}) \longrightarrow \min_{h_{ij}},$$

при ограничениях $g_1(h_{11}, \dots, h_{22}) \leq 0$, $g_2(h_{11}, \dots, h_{22}) \leq 0$. Полученную задачу будем решать методом штрафных функций. Запишем ее в виде:

$$\varphi(h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}, C) = C \sum_{i=1}^2 (\max(0, g_i(x)))^2$$

Согласно расчету, проведенному в системе компьютерной математики Mathcad 13, поведение системы существенно изменилось, то есть при очень малых вариациях элементов матрицы коррекции была получена матрица собственных значений, имеющая отрицательные вещественные части. А это означает, что система стала устойчивой.

Именной указатель

Liu Yongping 96

Mudrakova O.A. 10

Orlik L.K. 10

Абаполова Е.А. 11

Абубакиров Н.Р. 12

Авраменко Л.Г. 14

Авсянкин О.Г. 15

Агранович Ю.Я. 16

Айсагалиев С.А. 17

Алашеева Е.А. 18

Алексеева С.М. 19

Андреищева Е.Н. 19

Андрианов Д.Л. 21

Арутюнян Г.В. 22

Архипов В.П. 23

Асеев В.В. 25

Астапова И.В. 26

Ащепков Л.Т. 27

Бадков В.М. 28

Баев А.Д. 29

Барышева И.В. 30

Баско Д.В. 208

Бахтин И.А. 31, 33, 34, 35, 37,
38, 39, 40

Бахтина А.А. 41

Бахтина Ж.И. 42, 169

Башкарёв П.Г. 133

Бейлина Н.В. 43

Бекларян Л.А. 45

Беляева О.А. 47

Бирючинская Т.Я. 59

Блатов И.А. 18, 48

Блюмин С.Л. 48

Бободжанов А.А. 49

Богатырев Ф.Н. 51

Богомоллов А.И. 53

Болдырева А.В. 33

Боровикова М.М. 54

Бравый Е.И. 55

Бугаков В.М. 155

Бурлуцкая М.Ш. 56

Бурский В.П. 57

Бутерин С.А. 58

Буховец А.Г. 59

Быков С.В. 61

Ванько В.И. 62

Васильев В.И. 63

Васильева М.В. 63

Викторов Д.В. 162

Владимиров А.А. 63

Водолазов Н.Н. 64

Гладышев Ю.А. 66, 69

Глушко Е.Г. 82

Гнездилов А.В. 67

Головко Н.И.	68
Голубева М.С.	69
Голубь А.В.	70
Гончаренко В.Ю.	71
Горельский В.А.	72
Гребенникова И.В.	73
Гузев М.А.	74
Гулина О.В.	89
Гулюгин А.Н.	123
Гурба Т.В.	34
Гурченков А.А.	75
Давыдова М.Б.	76
Даринский Б.М.	78
Дмитриев А.А.	74
Дмитриев В.Б.	79
Добробог Н.В.	80
Дорохов А.Н.	35, 81
Дубровская А.П.	82
Дубровский В.В.(мл.)	84
Дюжева А.В.	85
Елисеев А.Г.	86
Ермаков В.В.	88
Ерошенко В.А.	89
Ерохин Г.А.	72
Жидков А.А.	90
Задорожный А.И.	91
Зайцева И.В.	93
Закирова Г.А.	193
Зверева М.Б.	168, 169
Знаменская Л.Н.	93
Зубова С.П.	94, 95
Иванов А.В.	96
Иванов В.И.	96
Иохвидов Е.И.	97
Ишмухаметов А.З.	99

Ищенко В.М.	100
Кабельков А.Н.	101
Кабельков В.А.	101
Кабидолданова А.А.	17
Кадченко А.И.	103
Кадченко С.И.	104
Калинин А.В.	90, 105
Калитвин А.С.	106
Калитвин В.А.	107
Капранчиков С.С.	114
Каретник В.О.	68
Карулина Е.С.	108
Карюк А.И.	180
Касымбекова А.С.	109
Кетова К.В.	110
Китаева Е.В.	111
Климов А.В.	105
Ключанцев М.И.	112
Ковалева Л.А.	113
Кокшаров И.С.	150
Колесникова И.В.	78
Колодежных В.Н.	114, 115
Колтаков А.В.	115
Коржов Е.Н.	116
Корнев В.В.	117
Коровина О.В.	118
Костиков А.А.	75
Кремкова Е.А.	66
Кремлёв А.Г.	73
Крученых М.Б.	45
Крылов А.С.	53
Курбанов В.М.	119
Курдюмов В.П.	120
Курухтин В.Т.	121
Кутерин Ф.А.	122
Лабскер Л.Г.	123
Ландсберг С.Е.	124

Лашин Д.А.	126
Ле Суан Дай	37
Ле Хай Чунг	94
Лексина С.В.	127
Лисаченко И.В.	129
Ломовцев Ф.Е.	130
Луконина А.С.	131
Лушникова Г.А.	180
Лылов Е.В.	132
Лысенко З.М.	133
Лысова Т.В.	134

Магомедов Г.М.	135, 136
Макагонова М.А.	137
Малахова Н.А.	138
Малюгина М.А.	138
Мамедов Э.М.	139
Мамчуев М.О.	140
Мартынова И.С.	141
Марчевская Е.В.	22
Матвиюк Л.В.	133
Милованов А.В.	142, 143
Мильцин А.Н.	156
Минюк С.А.	144
Михайлова Н.В.	145
Мотузка В.А.	147
Мотузка Д.А.	147
Мустафокулов Р.	148

Наимов А.Н.	150
Небольсина М.Н.	151
Нефедов В.В.	101
Нечаев А.П.	133
Никитин А.А.	152
Новосёлов Ю.В.	153
Нурмагомедов А.М.	135

Огарков В.Б.	155, 156
-------------------	----------

Павлова Н.Г.	157
-------------------	-----

Панасик О.А.	144
Пасенчук А.Э.	158
Пелешенко Б.И.	159
Пенкин О.М.	161
Пеньков В.Б.	162
Переходцева Э.В.	164
Плаксина В.П.	137
Плаксина И.М.	166
Плетнева О.К.	167
Покорная И.Ю.	76
Покорная О.Ю.	76
Покорный Ю.В.	167, 168, 169, 170
Покровский А.Н.	142
Полунин В.А.	172
Попов В.В.	63
Портнов М.М.	143
Потапов М.М.	172
Провоторов В.В.	173
Провоторова Е.Н.	82, 173
Простокишин В.М.	175
Прядиев В.Л.	118, 132
Псху А.В.	176

Радзиевская Е.И.	176
Раецкая Е.В.	95
Расулов А.Б.	177
Ратыни А.К.	179
Редькина Т.В.	180
Рогова Н.В.	18
Родюков А.В.	181
Рослякова Е.А.	182
Русяк И.Г.	183
Рыхлов В.С.	184

Сабзалиев М.М.	189
Сабирова О.Р.	185
Савчук А.М.	186
Садовничая И.В.	187

Салимов Я.Ш.	189	Фролова Ю.Б.	38
Салтыков Е.Г.	190	Халова В.А.	221
Сапронов Ю.И.	78	Ханикалов Х.Б.	136
Саталкина Л.В.	162	Холомеева А.А.	222
Сафонов В.Ф.	49	Хорев И.Е.	72
Северин Г.Ю.	205	Хребтова С.С.	223
Седов А.И.	193	Хромов А.А.	224
Седых И.А.	48	Хромов А.П.	225
Семенова Т.Ю.	194	Хромова Г.В.	226
Симонов Б.В.	195, 196	Хубиев К.У.	227
Симонов П.М.	21	Цыба В.Е.	99
Синегубов С.В.	197	Чадаев В.А.	228
Ситник С.М.	198	Чан Тхань Туан	39
Смирнова Е.В.	199, 200	Черников В.Н.	16
Солдатов А.П. ..	113, 138, 201	Чернов А.В.	229
Солодов Р.А.	124	Чернова О.В.	201
Стакун А.А.	202	Чубурин Ю.П.	230
Старинец В.В.	203	Шамолин М.В.	231
Стенюхин Л.В.	204	Шамоян Ф.А.	207
Стрыгин В.В.	205	Шананин Н.А.	232
Сумин В.И.	47	Шапошникова Д.А.	86
Сумин М.И.	105, 122	Шарапова В.Н.	233
Титова Н.В.	170	Шевченко Р.В.	40
Ткаченко Н.М.	207	Шейпак И.А.	63
Толпаев В.А.	208	Шмырин А.М.	48
Томова Анна В.	209	Шунина Г.А.	234
Туртин Д.В.	209	Юрко В.А.	235
Тырышкин И.М.	72	Яковлева Т.П.	236
Тюрин В.М.	210		
Ускова Н.Б.	211		
Устинов Г.М.	212		
Федотов А.А.	213		
Феоктистов В.В.	214		
Феоктистова О.П.	214		
Филиновский А.В.	215		
Фомин В.И.	216, 217, 218		
Фролова Е.В.	219		

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

**Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения – XIX»**

Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 14,1.
Тираж 300 экз. Заказ 774.

Отпечатано с готового оригинала-макета
в типографии Издательско-полиграфического центра
Воронежского государственного университета.
394000, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3.