Воронежский государственный университет
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы
«Понтрягинские чтения – XVII»

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

МАТЕРИАЛЫ

Воронежской весенней математической школы

"ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – XVII"

3 мая - 9 мая 2006 г.

ВОРОНЕЖ

Центрально-Черноземное книжное издательство
Воронеж
2006

УДК 517.94 (92; 054, 97)

Современные методы теории краевых задач:
Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения -XVII».– Воронеж: ОАО «Центрально-Черноземное книжное издательство», 2006. – 222 с.

В сборнике представлены материалы докладов и лекций, включенных в программу Воронежской весенней математической школы, проводимой Воронежским госуниверситетом совместно с Математическим институтом им. В.А. Стеклова РАН и Московским государственным университетом.

Тематика охватывает широкий спектр проблем качественной и спектральной теории дифференциальных уравнений, геометрии и анализа, моделирования, оптимального управления, теории игр и других смежных направлений, а также проблем преподавания математики в средних и высших учебных заведениях.

ISBN 5–7458–1079–3

ISBN 5–7458–1079–3

МАТРИЧНЫЕ ПУЧКИ: РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ[1]

Азизов Т.Я. (Воронеж)

azizov@math.vsu.ru

В инженерных расчетах элементов конструкций на колебания приходится решать частотное уравнение, которое при наличии демпфирующих элементов имеет вид

$$\det(M_\circ \omega_\circ^2 + B_\circ \omega_\circ + C_\circ) = 0,$$

где $M_\circ$ — положительная диагональная матрица обобщенных масс, $B_\circ, C_\circ$ — матрицы, соответствующие вязкому и упругому сопротивлениям, соответственно. Ряд конструкторских задач приводит к необходимости восстановления, скажем, вала по заданным резонансным колебаниям, т.е. определить матрицы $B_\circ, C_\circ$. Задачи такого типа называются обратными спектральными задачами.

Постановка задачи. Пусть заданы два приведенных полинома P_{2n} и P_{2n-2} степени $2n$ и $2n-2$, соответственно. Требуется найти такие якобиевы $n \times n$-матрицы B и C, что

$$\begin{aligned} P_{2n}(\lambda) &= \det(\lambda^2 + B\lambda + C) \\ P_{2n-2}(\lambda) &= \det(\lambda^2 + B_1\lambda + C_1), \end{aligned}$$

где $(n-1) \times (n-1)$-матрицы B_1 и C_1 получаются из B и C вычеркиванием в каждой из них последней строки и последнего столбца, соответственно.

В докладе будет дано необходимое и достаточное условие разрешимости поставленной задачи.

Литература

[1] Yu. Agranovich, T. Azizov, A. Barsukov and A. Dijksma. *On an inverse spectral problem for a quadratic Jacobi matrix pencil*, J. Math. Anal. Appl. **306** (2005), 1–17.

[1] Доклад основан на исследованиях, поддержанных грантом РФФИ 05-01-00203-а и опубликованных в [1]

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИЗГИБА ПЛИТЫ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Алейников С.М., Агапов И.Е. (Воронеж)
alasmbkb@box.vsi.ru, agapov@vgasu.vrn.ru

Математическая формулировка задачи контактного изгиба плиты на упругом неклассическом основании сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений [1]:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=q(x,y)-p(x,y),$$

$$w(x,y)=\iint_A p(\xi,\eta)\omega(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

где D – цилиндрическая жесткость плиты, $w(x,y)$ – функция прогиба, $q(x,y)$ – распределенная нагрузка на плиту, $p(x,y)$ – искомое контактное давление, $\omega(x,y,\xi,\eta)$ – функция Грина, определяющая контактную модель упругого неклассического основания.

Решение строится численно на основе комбинации методов конечных и граничных элементов. Расчет деформаций плиты проводится с использованием треугольных конечных элементов с 21 степенью свободы. Контактные давления в узлах треугольной сетки определяются методом граничных элементов с использованием двойственного разбиения на многоугольные ячейки Дирихле-Вороного [1].

Разработанный алгоритм, апробированный для круглых и квадратных плит, был применен для расчета контактного изгиба плит сложной многосвязной формы в плане. Расчеты выполнены для неклассических моделей упругих оснований с известной функцией Грина [1]. Численные исследования показали, что предложенный алгоритм применим для расчета плит любой формы в плане, расположенных на упругих неклассических основаниях при действии распределенной нормальной нагрузки.

Литература

1. Алейников С.М. Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно неоднородных оснований. – М.: Изд-во “Ассоциации Строительных Вузов”, 2000. – 754 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАКЕТА *MATHCAD* ДЛЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Алексеева С.М., Алексеева О., Молчанов А. (Балтийская государственная академия)

Задача выбора оптимального режима лова рыбы — типичная задача оптимального управления, одним из методов ее решения является метод максимума Понтрягина. При некотором упрощении задача сводится к задаче на экстремум функции одной переменной.

Для ее решения студенты использовали графические возможности пакета *Mathcad*, встроенные функции *given-find* и *interp* (*pspline*(Y, X), Y, X, x) и т. д. На основании численных расчетов для модельных примеров при некоторых фиксированных параметрах студентами получены следующие результаты.

1. В случае оптимального управления ловом в течение одного года, если закон изменения веса особи линейный, то лов следует начинать на 222 день и продолжать в течении 144 дней, а если близок к естественному, то нужно начинать на 20 дней раньше.

2. В случае управления ловом в течение двух лет по графику суммарного улова за два года в первый год лов следует начинать на 255 день и проводить его в течении 110 дней, во второй год начало лова — 217 день. Если требуется получить максимальный результат в первый год, то лов нужно начинать на 33 дня раньше.

3. Найдены управляющие режимы, которые с одной стороны оптимизируют улов, а с другой стороны ориентируют на сохранение данной популяции рыб.

ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ВОЗБУЖДЕНИЯ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С КРУГОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Аминова С.М., Кубышкин Е.П. (Ярославль)

AminovaSM@dgh.cityhall.yar.ru, Kubysh@uniyar.ac.ru

Рассматривается распределенная кинетическая система в плоском круговом реакторе в окрестности пространственно однородного состояния равновесия, на которую осуществляется некоторое периодическое воздействие. Математической моделью такой системы является следующая краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(\varepsilon)\Delta u + A(\varepsilon)u + F(u;\varepsilon) + \mu F_1(x, \theta t, u; \mu), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial K_R} = 0$$

где $u(x,t) \in R^n, (x = x(x_1, x_2))$ — вектор, характеризующий величину отклонения концентрации веществ от состояния равновесия; ∂K_R — граница круга K_R радиуса R; Δ — двумерный оператор Лапласа; ν — направление внешней нормали к границе круга; $\varepsilon, \mu > 0$ — малые параметры, матрицы $D(\varepsilon)$, $A(\varepsilon)$ и вектор-функции $F(u;\varepsilon), F_1(x, s, u; \mu)$ являются достаточно гладкими по совокупости переменных, 2π-периодическими по s. Матрица $D(\varepsilon)$, определяющая коэффициенты диффузий веществ, является симметричной и положительно определенной при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. $A(\varepsilon)$ и $F(u;\varepsilon)$ определяют скорости реакций веществ, $F_1(x, s, u; \mu)$ — величину внешнего воздействия на кинетическую систему. При $\mu = 0$ краевая задача обладает круговой симметрией. Предполагается, что при $\mu = 0$ в краевой задаче реализуется „критический случай одной парой чисто мнимых корней“.

Поведение решений краевой задачи с начальными условиями определяется поведением решений некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений на устойчивом интегральном многообразии. Эта система построена и анализируется численно. Выявлены области параметров, при которых существуют хаотические аттракторы. Отмечен „докритический“ способ возбуждения хаотических колебаний. Для аттракторов вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность.

УСЛОВИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ ШУРА В ОКРЕСТНОСТИ ЕДИНИЦЫ[1]

Андреищева Е.Н. (Воронеж)
anda_el@mail.ru

Задача аппроксимации функции Неванлинны в области W_θ рассматривается в работе Крейна М.Г., Лангера Г. [1].
Через Λ_θ обозначим множество всех $\lambda \in \mathbb{D}$, где $\mathbb{D} = \{\xi : |\xi| < 1\}$ таких, что $(\alpha - i)(\alpha + i)^{-1} = \lambda, \quad \alpha \in W_\theta$.
Для случая обобщённой функции Шура получен следующий результат:

Теорема. *Для функции $s(\lambda)$ с $s(0) \neq 0$ следующие свойства:*

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00203-а

1. $s(\lambda) \in S_\varkappa$, *где* $S_\varkappa$– *обобщённый класс Шура;*

2. *для некоторого натурального числа* $n > 0$, *существуют* $2n$ *вещественных чисел:* $c_1, c_2, \dots, c_{2n}$ *таких, что имеет место разложение:*

$$s(\lambda) = 1 - \sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu (\lambda - 1)^\nu + O((\lambda - 1)^{2n+1}), \quad \lambda \to 1, \ \lambda \in \Lambda_\theta \quad (1)$$

выполнены тогда и только тогда, когда существуют пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$ *,сжимающий оператор* T *в* $\Pi_\varkappa$ *и порождающий элемент* $u \in dom((I-T)^{-(n+1)})$ *для оператора* T *такой, что справедливо представление:*

$$s(\lambda) = 1 - \frac{(\lambda - 1)}{\overline{s(0)}} [(I - \lambda T)^{-1} (I - T)^{-1} u, T^c u], \ \ \lambda \in \mathbb{D}, \ \frac{1}{\lambda} \notin \sigma_p(T) \quad (2)$$

В этом случае:

$$c_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{s(0)}} [(I - T)^{-(\nu+1)} T^\nu u, u], \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n; \\ \dfrac{1}{\overline{s(0)}} [(I - T)^{-(n+1)} T^n u, (I - T^c)^{-(\nu - n)} (T^c)^{\nu - n} u], \\ \qquad\qquad n + 1 \leqslant \nu \leqslant 2n; \end{cases}$$

Литература

1. M.G.Krein, H.Langer, Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren in Raume $\Pi_\varkappa$ zusammenhängen, Teil I:Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen, Math. Nachr. 77 (1977), 187-236.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К МИНИМИЗАЦИИ ЯВНО КВАЗИВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ ЦЕНТРОВ

Андрианова А.А. (Казань)

aandr78@mail.ru

Решается задача $f^* = \min\{f(x), x \in D\}$, где $D = \{x : x \in R_n, g(x) \leqslant 0\}$, $g(x) = \max\{f_i(x), i = 1..m\}$, где $f(x), f_i(x) i = 1..m$ - непрерывные явно квазивыпуклые функции в n-мерном евклидовом пространстве R_n. Для $\varepsilon > 0$ зададим множество $X^*_\varepsilon = \{x : x \in$

$D, f(x) \leqslant f^* + \varepsilon\}$. Требуется найти любую точку $z \in X^*_\varepsilon$. Пусть $f^* > \min\{f(x), x \in R_n\}$, множество X^*_ε ограничено, $\min\{g(x), x \in R_n\} \neq \min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\}$, функция $f(x)$ удовлетворяет на X^*_ε условию Липшица с константой $L > 0$, известны числа $\underline{f}$ и $\overline{f}$, для которых $\underline{f} \leqslant f^* \leqslant \overline{f}$.

Пусть для заданных значений параметров $t, \gamma, \alpha > 0, \eta > 0$ определена вспомогательная функция метода центров $F(x, t, \gamma, \eta) = \max\{f(x) - t, \alpha g(x) - \gamma\}$. Обозначим $F^*(t, \gamma, \alpha) = \min\{F(x, t, \gamma, \alpha), x \in R_n\}$, $Z(t, \gamma, \alpha, \eta) = \{x : x \in R_n, F(x, t, \gamma, \alpha) \leqslant F^*(t, \gamma, \alpha) + \eta\}$.

Если для заданных замкнутого ограниченного множества G и числа λ существует точка $y \in G$ такая, что $g(y) < \lambda$, то для любого $\lambda' < \lambda$ существует число $\beta_{\lambda'}$ такое, что для любого $x \in G \setminus D(\lambda)$ выполняется неравенство $\beta_{\lambda'} \rho(x, D(\lambda)) + \lambda' \leqslant g(x)$, где $D(\lambda) = \{x : x \in R_n, g(x) \leqslant \lambda\}$, $\rho(x, D(\lambda)) = \min\{||x - z||, z \in D(\lambda)\}$. Тогда для чисел $\lambda, \lambda', 0 < \eta < \min\{-\lambda, \varepsilon\}$, зафиксированых таким образом, что $\min\{f(x), x \in D(\lambda)\} = f^* + \sigma$, где $0 < \sigma < \varepsilon - \eta$, $\min\{f(x), x \in D(\lambda')\} = f^* + \varepsilon - \eta$ при условии существования точки $y \in X^*_{\varepsilon - \eta}$, для которой $g(y) < 0$, существуют коэффициенты $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$, при которых выполняется указанное неравенство на множестве $X^*_{\varepsilon - \eta}$ при параметрах λ и μ, где $\mu \in [\eta, -\lambda]$, соответственно.

На основе этого свойства построены правила, гарантирующие выполнение включения $Z(t, \gamma, \alpha, \eta) \subset X^*_\varepsilon$. Для задач выпуклого программирования такой подход был применен, например, в [1].

Теорема 1. $Z(t, \gamma, \alpha, \eta) \subset X^*_\varepsilon$, если параметры $\alpha > 0, t, \gamma$ зафиксированы так, что $\gamma \geqslant \delta > 0, \quad t \geqslant f^* + \gamma + \frac{L\mu}{\beta_2} + \eta, \quad \alpha \geqslant -\frac{L(\varepsilon - \eta + \delta + \underline{f} - t)}{\beta_1 \sigma}$.

Теорема 2. $Z(t, \gamma, \alpha, \eta) \subset X^*_\varepsilon$ для любого $\alpha \geqslant \alpha'$, если $\alpha \geqslant 1, t, \gamma$ зафиксированы так, что $t \leqslant f^*, \quad \alpha' \geqslant -\frac{L\beta_2(\varepsilon - \eta - \overline{f} + t) - L^2\mu}{\beta_1 \beta_2 \sigma}, \quad \gamma = -\alpha' \frac{\beta_1 \sigma}{L} - \varepsilon + \eta$.

Литература

1. Андрианова А.А. Неполная минимизация функции максимума в параметризованном методе центров // Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения- XV- Воронеж, 2004. - с.9-10.

ОПИСАНИЕ NED-МНОЖЕСТВ, ЛЕЖАЩИХ НА ГИПЕРСФЕРЕ

Асеев В.В. (Новосибирск)

btp@math.nsc.ru

В связи с изучением множеств, устранимых для пространственных квазиконформных отображений, Ю. Вяйсяля в 1962 г. ввел в рассмотрение класс NED-множеств: Компактное множество $E \subset \bar{R}^n$ называется NED-множеством, если для любого конденсатора с пластинами $F_0, F_1 \subset \bar{R}^n \setminus E$ выполняется равенство конформных емкостей (1): $\mathrm{Cap}(F_0, F_1; \bar{R}^n \setminus E) = \mathrm{Cap}(F_0, F_1)$. Совпадение класса устранимых множеств для квазиконформных отображений и класса NED-множеств в случае плоскости ($n = 2$) было доказано И.Н. Песиным в 1956 г. В пространстве ($n > 2$) устранимость NED-множеств для квазиконформных отображений была доказана в [1]. Вопрос о совпадении этих классов в случае $n > 2$ до сих пор остается открытым. Введем обозначения: $S(r) = \{x : |x| = r\}$ и $D(r_0, r_1) = \{x : r_0 < |x| < r_1\}$.

ТЕОРЕМА 1. Компактное множество $E \subset S(1)$ является NED-множеством тогда и только тогда, когда существует (хотя бы один) шаровой слой $D(r_0, r_1)$ ($r_0 < 1 < r_1$), в котором выполняется равенство (1) с $F_0 = S(r_0)$, $F_1 = S(r_1)$.

ТЕОРЕМА 2. Компактное множество $E \subset R^{n-1} \subset R^n$ является NED-множеством тогда и только тогда, когда для любой точки $x_0 \in E$ и любых отрезков L_0, L_1, выходящим из x_0 в противоположных направлениях ортогонально к R^{n-1}, конформный модуль семейства всех спрямляемых дуг в $R^n \setminus E$ с одним концом на $L_0 \setminus \{x_0\}$, а другим – на $L_1 \setminus \{x_0\}$, равен бесконечности.

Теорема 2 существенно усиливает результат, полученный в [2].

Литература

1. *Асеев В.В., Сычев А.В.*: О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений. – Сибирск. матем. ж., т. 15, No 6, 1974, стр.1213-1227.

2. *Асеев В.В.*: Пример NED-множества в n-мерном эвклидовом пространстве, имеющего положительную (n-1)-мерную меру Хаусдорфа. – Докл. АН СССР, т. 216, No 4, 1974, стр. 717-720.

РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ[1]

Асташова И.В. (Москва)

ast@diffiety.ac.ru

Рассмотрим дифференциальные неравенства

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)} \geqslant p_*\, |y|^k\,, \tag{1}$$

где $a_i(x)$ — непрерывные функции, $p_* > 0$, $n \geqslant 1$, $k > 1$, и

$$r_n(x)\frac{d}{dx}\left(\dots\frac{d}{dx}\left(r_1(x)\frac{d}{dx}\left(r_0\,(x)\;y\right)\right)\dots\right) \geqslant |y|^k\,, \tag{2}$$

где все $r_j(x)$ — такие достаточно гладкие функции, что

$$0 < m_* \leqslant r_j(x) \leqslant M_* < +\infty. \tag{3}$$

Теорема 1. *Для любого заданного на отрезке $[\,a, b\,]$ решения $y(x)$ неравенства (2) справедлива оценка*

$$|y(x)| \leqslant C_1\,(\,n,\,k,\,m_*,\,M_*\,)\cdot\min\{x-a, b-x\}^{-n/(k-1)}.$$

Следствие. *Пусть (3) выполняется для всех $x \in \mathbf{R}$. Тогда не существует заданных на всей прямой решений неравенства (2).*

Теорема 2. *Для любых $k > 1$, $p_* > 0$, $A > 0$, $n \geqslant 1$ существуют такие $\delta > 0$ и $M > 0$, что для любых заданных на $[\,a, b\,]$ непрерывных функций $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$, удовлетворяющих условию $\sum_{j=0}^{n-1}\,\sup\{\,|\,a_j(x)\,| : x \in [\,a, b\,]\,\} \leqslant A$, и любого решения неравенства (1) справедлива оценка*

$$|y(x)| \leqslant M\,\min\{\,\delta,\, x-a,\, b-x\,\}^{-n/(k-1)}\,.$$

Замечание 1. Для теоремы 2 не существует следствия, аналогичного следствию теоремы 1. Так, неравенство $y^{(n)} + \varepsilon y \geqslant |y|^k$, которое имеет определенное на всей прямой решение $y(x) \equiv \varepsilon^{1/(k-1)}$.

Замечание 2. Для неравенства $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)} \leqslant -p_*\, |y|^k$ справедливы результаты, аналогичные результатам, приведенным

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00715).

для неравенства (1). Для неравенств $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)} \leqslant p_* \, |y|^k$ и $y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)} \geqslant -p_* \, |y|^k$ (при тех же условиях на $a_i(x)$, p_*, n и k) не существует оценок, аналогичных оценкам, приведенным для неравенства (1).

Литература

1. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Труды МИРАН им. В. А. Стеклова, 234 (2001), 384 с. 2. *Хей Дж.* Дифференц. уравнения, Т. 38, № 3 (2002), с. 1–7.

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Аубакиров Т.У., Нурсултанов Е.Д. (Караганда)

aub-toibek@yandex.ru

Предполагается заданным полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ с фильтрацией, т.е. семейством $F=\{F_n\}_{n\geqslant 1}$, σ - алгебр F_n таких, что $F_1 \subseteq ... \subseteq F_n \subseteq ... \subseteq \mathfrak{F}$.

Для заданного стохастического процесса $X = (X_n, F_n)_{n\geqslant 1}$ и $k \geqslant 1$,$k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\overline{X}_k = \sup_{A\in F_k, P(A)>0} \frac{1}{P(A)} \left| \int_A X_k P(d\omega) \right|.$$

Через $N_{pq}(F)$, $0 < p, q < \infty$, обозначим множество стохастических процессов $X = (X_n, F_n)$, $n \geqslant 1$,для которых при $q < \infty$

$$\|X\|^q_{N_{pq}(F)} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\frac{q}{p}} \overline{X}^q_k < \infty$$

и при $q = \infty$

$$\|X\|_{N_{p\infty}(F)} = \sup_k k^{-\frac{1}{p}} \overline{X}_k,$$

$N_{pq}(F)$ будет квазинормированным пространством (при $q \geqslant 1$ нормированным) как фактор-пространство по ядру

$$J = \left\{ X : \int_A X_k P(d\omega) = 0, A \in F_k, k \geqslant 1 \right\}.$$

Введенные пространства $N_{pq}(F)$ характеризуют усиленный закон больших чисел для стохастических процессов. Так, если $X \in$

$N_{pq}(F)$, то последовательность $\{\frac{X_k(\omega)}{k}\}_{k=1}^{\infty}$ почти всюду стремится к нулю таким образом, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{\frac{1}{p'}}\frac{(X_k(\omega)}{k})\right)^q\frac{1}{k}<\infty.$$

Пусть стохастический процесс $X=(X_n,F_n)_{n\geqslant 1}$ является субмартингалом. Тогда 1) при $0<q_1\leqslant q\leqslant\infty$ верно $\|X\|_{N_{pq}(F)}\leqslant c\|X\|_{N_{pq_1}(F)}$,

2) при $0<p<p_1\leqslant\infty$, $0<q,q_1\leqslant\infty$ верно $\|X\|_{N_{pq}(F)}\leqslant c\|X\|_{N_{p_1q_1}(F)}$.

Пусть $1<p<\infty$, $p'=\frac{p}{p-1}$, $1<q\leqslant\infty,\alpha\in\mathbb{R}$. Определим пространство мартингалов

$$N_p^{\alpha q}(F)=\{X=(X_n,F_n)_{n\geqslant 1}-\text{мартингал}:\sum_{k=0}^{\infty}(2^{\alpha k}\overline{\Delta X_k})^q<\infty\},$$

где

$$\overline{\Delta X_k}=\sup_{A\in F,P(A)>0}\frac{1}{[P(A)]^{\frac{1}{p'}}}\left|\int_A(X_{2^k}-X_{2^{k-1}})P(d\omega)\right|,\qquad X_{\frac{1}{2}}(\omega)\equiv 0.$$

$N_p^{\alpha q}(F)$ является пространством сходящихся мартингальных процессов, где параметры α,q и p характеризуют скорость и метрику, в которой сходится данный процесс.

Теорема. Пусть фильтрация $F=\{F_n\}_{n\geqslant 1}$ такова, что для каждого $k=1,2,...$ и любого $A\in F_k$, выполнено условие $P(A)\geqslant\frac{c}{k}$, где постоянная $C>0$ не зависит от k. Если $1<r<p\leqslant\infty,1\leqslant q\leqslant\infty$, $\alpha=\frac{1}{r}-\frac{1}{p}$, то имеет место вложение $N_r^{\alpha q}(F)\hookrightarrow N_{pq}(F)$.

УСЛОВИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА В $(\zeta L)_{2\pi}^r$ СУММ ФУРЬЕ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ[1]

Бадков В.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

Пусть $\{\Phi_n(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$ — ортонормированная с 2π-периодическим весом φ система тригонометрических полиномов, полученная при

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (проект 05–01–00233).

ортогонализации на $[0, 2\pi]$ методом Шмидта последовательности $1, \cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, \ldots$. Если $F\varphi \in L^1$, то имеют смысл суммы Фурье функции F по системе $\{\Phi_n(\tau)\}_{k=0}^{\infty}$:

$$s_{\varphi,n}(F;\theta) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\tau)\sum_{\nu=0}^{n}\Phi_\nu(\theta)\Phi_\nu(\tau)\varphi(\tau)d\tau \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

При $\varphi(\tau) \equiv 1$ сумма $s_{\varphi,2n}(F;\theta)$ есть обычная сумма Фурье $s_n(F;\theta)$.

Положим $(\zeta L)^r_{2\pi} := \{F : F\zeta \in L^r\}$, где $\zeta = \zeta(\tau)$ — измеримая 2π-периодическая функция, положительная почти всюду на $[0, 2\pi]$.

М. Рисс установил неравенство $\|s_n(F;\theta)\|_r \leqslant C_1(r)\|F\|_r$, где $1 < r < \infty$, $C_1(r)$ не зависит от $F \in L^r$ и n. Следующая теорема (основной результат сообщения) обобщает этот результат М. Рисса.

Теорема. *Пусть* $1 < r < \infty$ *и*

$$\sup\{\|\Phi_n(\tau)\sqrt{\varphi(\tau)}\|_\infty : n = 0, 1, \ldots\} < \infty. \tag{1}$$

Тогда найдется константа $C_2(r, \varphi)$ *такая, что для всех* $n = 0, 1, \ldots$ *и* $F \in (\sqrt{\varphi}L)^r_{2\pi}$ *выполняется неравенство*

$$\|s_{\varphi,n}(F;\theta)\sqrt{\varphi(\theta)}\|_r \leqslant C_1(r)\|F\sqrt{\varphi}\|_r. \tag{2}$$

В [2] установлено, что условие (1) выполняется для широкого класса весов $\varphi \in C_{2\pi}$.

Литература

1. Badkov V.M. Orders of the weighted Lebesgue constants for Fourier sums with respect to orthogonal polynomials // Proceeding of the Steklov Institute of mathematics. – Suppl. 1, 2001. S48–S64.

2. Бадков В.М. Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198. С. 41–88.

ТЕОРЕМЫ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И КОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЕСОВЫХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ

Баев А.Д. (Воронеж)

Пусть функция $\alpha(t)$ такая, что $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0, \alpha(t) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(t) = const$ при $t \geqslant d > 0$, где d — некоторое число.

Предполагается, что функция $\alpha(t)$ достаточно гладкая при $t \geqslant 0$. На функциях $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ рассмотрим интегральное преобразование вида

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование оператор "весового" дифференцирования $D_{\alpha,t} = \sqrt{-\alpha(t)} \frac{d}{dt} \sqrt{\alpha(t)}$ переводит в оператор умножения на двойственную переменную η. Следуя [1] преобразование F_α можно рассмотреть на обобщенных функциях, а также построить обратное преобразование F_α^{-1}.

Рассмотрим весовой псевдодифференциальный оператор вида

$$K^{(q)}(x, t, D_x, D_{\alpha,t})[.] = F_{\xi \to x}^{-1} F_\alpha^{-1}[\lambda(x, t, \xi, \eta) F_\alpha F_{x \to \xi}[.],$$

где $F_{x\to\xi}(F_{\xi\to x}^{-1})$ — прямое (обратное) преобразование Фурье, $x \in R^{n-1}$.

Пусть выполнено следующее условие:

Условие 1. Функция $\lambda(x, t, \xi, \eta) \in C^\infty(R^{n-1} \times R_+^1 \times R^{n-1} \times R^1)$, причем

$$\left| D_x^\tau \frac{\partial^l}{\partial t^l} D_\xi^p \frac{\partial^k}{\partial \eta^k} \lambda(x, t, \xi, \eta) \right| \leqslant C_{\tau lpk} (1 + |\xi| + |\eta|)^{q-|p|-k},$$

где $C_{\tau lpk} > 0$ — константа, $q \in R^1$, $|p| = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$.

Если функция $\lambda(x, t, \xi, \eta)$ удовлетворяет условию 1, то будем говорить, что символ весового псевдодифференциального оператора принадлежат классу S_α^q.

Пусть $H_{s,\alpha}(R_+^n)$ — пространство функций $v(x, t)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha} = \left\| F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[(1 + |\xi| + |\eta|)^s F_{x\to\xi} F_\alpha[v]] \right\|_{L_2(R_n^+)}.$$

Доказано следующее утверждение:

Теорема. Пусть выполнено условие 1 и $v(x, t) \in H_{s,\alpha}(R_+^n), s \in R^1$. Тогда $K^{(q)}(x, t, D_x, D_{\alpha,t})[v] \in H_{s-q,\alpha}(R_+^n), q \in R^1$, причем справедлива оценка

$$\left\| K^{(q)}(x, t, D_x, D_{\alpha,t})[v(x, t)] \right\|_{s-q,\alpha} \leqslant c \|v\|_{s,\alpha}$$

с некоторой константой c.

Кроме того доказано, что композиция весовых псевдодифференциальных операторов с символами S_α^q и S_α^p является также весовым псевдодифференциальным оператором с символом из класса S_α^{q+p}.

Литература

1. Баев А. Д.// Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы. Доклады АН СССР, т. 265, №5, с.1044-1046.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО–СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Баева С.А. (Воронеж)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с частными производными, описывающую малые колебания в вертикальной плоскости вязкой экспоненциально стратифицированной жидкости:

$$AU = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} - \nu\Delta & g & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{-\omega_0^2}{g} & \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

$U(x,t) = (U_1(x,t), U_2(x,t), U_3(x,t), U_4(x,t))^T$, T — знак транспонирования, $x \in R_+^2 = \{x = (x_1, x_2); -\infty < x_1 < \infty, 0 < x_2 < \infty\}$; $t > 0$. Здесь $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$ — горизонтальная (вдоль оси Ox_1) и вертикальная (вдоль оси Ox_2) составляющие скорости движения частицы жидкости в точке x в момент времени t, $U_3(x,t)$ — отклонение плотности от стационарной в точке x в момент времени t, $U_4(x,t)$ — давление жидкости в точке xв момент времени t, ν — коэффициент вязкости жидкости, ω_0 — частота Вяйсяля – Брента, g — ускорение свободного падения.

Рассмотрим начально - краевую задачу в полупространстве $x_1 \in R^1, x_2 > 0, t > 0$ для системы уравнений (1) с начальными условиями

$$U_j(x_1, x_2, +0) = 0, \;\; j = 1, 2, 3 \qquad (2)$$

и граничными условиями

$$U_1(x_1, +0, t) = 0,\ U_4(x_1, +0, t) = q(t) 1_{[-1,1]}(x_1), \tag{3}$$

где $1_{[-1,1]}(x_1)$ — характеристическая функция отрезка $[-1, 1]$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $q(t), q'(t) \in L_2(0, \infty),\ q(0) = 0$ и для функций $q(t), q'(t)$ конечен интеграл $\int\limits_0^\infty (1+t)\left|q^{(k)}(t)\right| dt = c_{5,1} < \infty,\ k = 0; 1.$ Тогда существует обобщенное решение уравнения (1), для которого справедливы равенства

$$\lim_{t \to +0} U_1(x_1, x_2, t) = 0,\ j = 1, 2, 3;$$
$$\lim_{x_2 \to +0} U_1(x_1, x_2, t) = 0;\ \lim_{x_2 \to +0} \left\| U_4(., x_2, .) - q(.) 1_{[-1,1]} \right\|_{L_2(R_+^2)} = 0.$$

Получены также формулы представления решения задачи (1)-(3).

Доказательство теоремы 1 проводится с использованием методов, развитым в [1] для задач с гладкими начальными и граничными условиями.

Литература

1. Глушко А. В. Асимптотические методы в задачах гидродинамики / А. В. Глушко. – Воронеж: изд. – во Воронеж. ун – та, 2003. – 300с.

ПОСТРОЕНИЕ СПЕКТРА КОЛЕБАНИЙ НАГРУЖЕННОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ КУСОЧНО ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

Базов И.А. (Ростов-на-Дону)
bazzov2@mail.ru

Физическая постановка задачи такова: рассматриваются малые продольные колебания системы из двух прямолинейных вязкоупругих стержней из материала Кельвина-Фойгта, скрепленных между собой сосредоточенным грузом. Стержни жестко заделаны на концах и имеют различные постоянные площади поперечного сечения.Записанная в безразмерных переменных математическая модель задачи о собственных колебаниях имеет вид:

$$U_j^{"}(x) = -\varepsilon \lambda^2 U_j(x), \quad j = 1, 2, \quad x \in]-1, 0[\cup]0, l[, \tag{1}$$

$$u_1(-1) = 0, \quad u_2(l) = 0, \tag{2}$$

$$u_1(0) = u_2(0), \quad \lambda^2 U_1(0) = U_1'(0) - \gamma U_2'(0), \tag{3}$$

Здесь ε - отношение массы левого стержня к массе груза; $\lambda^2 = -\frac{\sigma^2}{1+\tau\sigma}$ - спектральный параметр, в котором σ - искомое собственное число, определяющее частоту и декремент затухания колебаний во времени, τ - безразмерное время релаксации, прямо пропорциональное вязкости; γ - отношение площади правого сечения к площади левого сечения стержней; l - соответствующее отношение их длин.

Неклассический характер поставленной краевой задачи обусловлен наличием спектрального параметра не только в уравнении (1), но и его вхождением во второе из условий сопряжения (3), что представляет собой более общий случай, нежели рассмотренный в [1, 2].

Для λ^2 имеет место отношение Рэлея

$$\lambda^2 = \frac{\int_{-1}^{0}((U_1')(x))^2 dx + \int_0^l \gamma((U_2')(x))^2 dx}{U_1^2(0) + \varepsilon\left(\int_{-1}^{0}(U_1^2)(x)dx + \int_0^l \gamma(U_2^2)(x)dx\right)} \tag{4}$$

Очевидно, что существует счетный набор простых собственных чисел $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$, причем $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Спектральный параметр σ находится из квадратного уравнения, типичного для самосопряженных квадратичных операторных пучков. Знаменатель в формуле (4) определяет нагруженную весовую метрику, в которой имеет место ортогональность собственных функций.

Явный вид собственных чисел находится из характеристического уравнения

$$\operatorname{tg}\sqrt{\varepsilon}\lambda = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda}(1 + \gamma \operatorname{tg}\sqrt{\varepsilon}\lambda \operatorname{ctg}\sqrt{\varepsilon} l\lambda).$$

Приведем асимптотику первого собственного числа для малых $\varepsilon << 1$

$$\lambda_1 = \sqrt{1 + \frac{\gamma}{l}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{6}(1 + \gamma l)\right) + O(\varepsilon^2)$$

При больших значениях n и $l = 1$ имеет место формула

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\sqrt{\varepsilon}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\frac{1+\gamma}{n\pi} - \varepsilon^{\frac{3}{2}}\frac{(1+\gamma)^2}{n^3\pi^3}\left(1 + \frac{\varepsilon(1+\gamma)}{3}\right) + O\left(\frac{1}{n^4\pi^4}\right).$$

Литература

1. Задорожный А.И., Базов И.А. Математическая теория демпфера сухого трения с вязкоупругим элементом // Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения. 2003. №3. С. 99-104.

2. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.// Дифференциальные уравнения. 2001. Т37, №12. С. 1599-1604.

КУРС МАТЕМАТИКИ ТИМОФЕЯ ФЕДОРОВИЧА ОСИПОВСКОГО

Барабанов О.О., Юлина Н.А. (Ковров)

barabanov@tritiumnet.org

В этом году исполнилось 240 лет со дня рождения Тимофея Федоровича Осиповского – выдающегося русского естествоиспытателя, философа-рационалиста, математика, педагога и организатора образования, неутомимого переводчика передовой западной мысли на русский язык. В истории отечественной науки и образования Осиповский стоит по времени между Ломоносовым и Лобачевским и на одном уровне с ними. При этом других столь же ярких ученых в этот промежуток в России не наблюдается. Осиповский родился в селе Осипово Ковровского уезда Владимирской губернии 2 февраля, вероятно, 1766. Стал лучшим в первом выпуске Петербургской учительской гимназии. В 1786 приступил к педагогической деятельности и к работе над фундаментальным четырехтомным учебником по высшей математике.

С 1813 по 1820 Осиповский был ректором Харьковского университета. Учеником Осиповского был Остроградский. По доносу проф. философии Дудровича Т.Ф. Осиповский, так много сделавший для процветания Харьковского университета, был отстранен от работы. Скончался Т.Ф.Осиповский в Москве 12 июня 1832.

Учебник Осиповского полнее, чем какое-либо другое руководство, освещал математические знания того времени от начальных сведений по арифметике до вариационного исчисления и по ясности и строгости изложения стоял на одном уровне с лучшими современными иностранными учебниками, см. [1,2]. Т.Ф.Осиповский вносил в [3] лично полученные новые результаты, как уже известные. Наиболее глубоким исследованием математического содержания [3] является работа [4]. Нами ведется работа по переизданию [3] в современной редакции. Знакомство с [3] заставляет по-новому взглянуть на современные проблемы педагогики математики.

Литература

[1] Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. – М.: Наука, 1968.

[2] Полякова Т.С. История математического образования в России. – М.: Изд-во МГУ, 2002.

[3] Осиповский Т.Ф. Курс математики. Том первый. – СПб., Импер. Академия Наук, 1802, 357с.

[4] Бахмутская Э.Я. Тимофей Федорович Осиповский и его "Курс математики"/Ист-мат.иссл.Вып.V. 1952. С.28-74.

МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ 200 ЛЕТ[1]

Барабанова Л.П. (Ковров)

barabanov@tritiumnet.org

Первая публикация [1] метода наименьших квадратов (МНК), признанная Гауссом как *принцип Лежандра*, была продолжена блестящей серией: Гаусс (1809, 1810, 1821), Чебышёв (1859), Марков (1898), Фишер (1935), Рао (1946), Колмогоров (1946, 1947), Мальцев (1947) и др.

В 70-х годах прошлого века МНК подвергся справедливой критике в связи с его слабой чувствительностью к выбросам. Однако при планировании измерительной системы разумно предполагать её регулярную работу в будущем, поскольку для модели выбросов, как правило, нет оснований. Отсюда следует, что МНК не потерял своего значения.

Пусть измеряемый столбец $t \in \mathbb{R}^N$ имеет ковариационную матрицу $\sigma_t^2 \cdot \mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ — единичная матрица. Пусть искомый столбец $x \in \mathbb{R}^n$, $N \geqslant n$, связан с t системой условных уравнений $F(x) = t$. При гладком F и высокоточном несмещённом измерении t имеем $\sigma_x = K \cdot \sigma_t$, где $\sigma_x^2 = M(x - \bar{x})^2$, M — математическое ожидание, $\bar{x}$ — МНК-оценка x,

$$K^2 = \operatorname{tr}\left(D^T D\right)^{-1}, \tag{1}$$

где tr — след матрицы, $D = F'(x)$ — матрица Якоби. Для планирования навигационных систем важно перевести классическую формулу (1) на язык строк матрицы D. Пусть $\mathcal{S}_{\|}$ — множество всех подмножеств по k строк в D, $\Gamma(s)$ — определитель Грама системы строк s.

---

[1] Работа выполнена при поддержки РФФИ (проект №05-08-50076)

Теорема. *Формула (1) равносильна*

$$K^2 = \frac{\sum\limits_{s\in\mathcal{S}_{\setminus -\infty}} \Gamma(s)}{\sum\limits_{s\in\mathcal{S}_{\setminus}} \Gamma(s)}. \qquad (2)$$

Представление (2) имеет отчётливый геометрический смысл. При $n = N$ оно было получено ранее в [2], что позволило произвести оптимизацию конфигурации четырёх спутников в конусе видимости навигационной системы типа GPS, ГЛОНАСС, Galileo по критерию $\min K$.

Литература

[1] Legendre A.M. Nouvelles m*é*thodes pour lad*é*termination des orbites des com*è*tes, Paris, 1806, Appendice sur la m*é*thode des moindres carr*é*s.

[2] Барабанова Л. П. // Изв. РАН. ТиСУ 2005. №3. С. 89-96.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С СЕПАРАБЕЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Баранова Л.Е. (Ижевск)

chuburin@otf.pti.udm.ru

Рассматривается дискретный оператор Шредингера $H = H_0 + V$, действующий в пространстве $l^2(\mathbf{Z})$, где

$$H_0\{\psi(n)\}_{n\in\mathbf{Z}} = \{\psi(n+1) + \psi(n-1)\}_{n\in\mathbf{Z}}$$

и $V = \lambda(\cdot, \varphi_0)\varphi_0$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Здесь $\{\varphi_0(n)\} \in l^2(\mathbf{Z})$ — ненулевая последовательность.

Соответствующее уравнение Липпмана-Швингера имеет вид

$$\psi^{\pm}(n, E) = \psi_0(n, E) - \sum_{m\in\mathbf{Z}} G_0(n, m, E \pm 0) V \psi^{\pm}(m, E),$$

где $E \in (-2, 2)$, $\psi_0(n, E)$ удовлетворяет уравнению $H_0\psi_0 = E\psi_0$, а функция $G_0(n, m, E)$ есть ядро резольвенты оператора H_0.

Обозначим через $\widehat{\varphi}_0(s)$ преобразование Фурье элемента $\varphi_0 \in l^2(\mathbf{Z})$. Можно доказать, что амплитуда рассеяния $A_+(E)$ определяется из уравнения

$$2\lambda(A_+(E)-1)\int\limits_{-2}^{2}\frac{|\widehat{\varphi}_0(\tilde{E})|^2}{(\tilde{E}-E)(\sqrt{4-\tilde{E}^2})}d\tilde{E}+2\pi\lambda\frac{|\widehat{\varphi}_0(E)|^2}{\sqrt{4-E^2}}=1-A_+(E). \tag{1}$$

Видно, что картина рассеяния определяется функцией $|\widehat{\varphi}_0(E)|$.

Рассмотрим класс $\mathcal{S}$ четных или нечетных последовательностей φ_0 из пространства $l^2(\mathbf{Z})$, которые удовлетворяют следующим условиям: $|\varphi_0(n)| \leqslant Ce^{-a|n|}$, $n \in \mathbf{Z}$, где $C = \mathrm{const}$, $a = \mathrm{const} > 0$ и $\widehat{\varphi}_0(0) = \widehat{\varphi}_0(\pi) = 0$.

Теорема. *Предположим, что индекс на отрезке $[-2, 2]$ функции $f(E) = \dfrac{1+i(A_+(E)-1)}{1-i(A_+(E)-1)}$ неотрицателен. Тогда уравнению (1) удовлетворяет не более одной функции $|\hat{\varphi}_0(E)|$ такой, что $\varphi_0 \in \mathcal{S}$.*

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ГЛАВНЫХ ЧАСТЕЙ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И НОРМАЛЬНОГО ТИПА

Беднаж В.А. (Брянск)

Для изложения результата работы введем кратко следующие определения: $T\,(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi + \int\limits_0^r \frac{n(t)}{t}dt$ – характеристика Неванлинна функции f, мероморфной на комплексной плоскости. Мероморфная функция имеет конечный порядок и нормальный тип, если $T\,(r,f) \leqslant Cr^{\rho},\ \rho > 0$.

Положим $F(z,z_k) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{\frac{z}{z_k}+\frac{z^2}{2z_k^2}+\ldots+\frac{z^m}{mz_k^m}}$ - произведение Вейерштрасса. Особые точки функции f удовлетворяют условиям разрешимости интерполяционной задачи в классе мероморфных функций конечного порядка и нормального типа.

В классической теореме Миттаг - Леффлера дается полное описание главных частей мероморфных функций в окрестности особой точки. Однако там не характеризуются главные части классов meромофных функций, для которых вводятся ограничения на характеристику Неванлинны.

В работе получен следующий результат:

Теорема. Для того, чтобы существовала мероморфная функция конечного порядка и нормального типа с главными частями

$$\frac{a_{k,1}}{z-z_k}+\frac{a_{k,2}}{(z-z_k)^2}+\ldots+\frac{a_{k,n}}{(z-z_k)^n}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\ln\left|a_{k,n}\cdot\Big(F^{'}(z_k,z_k)\Big)^n\right|}{|z_k|^{\rho}}<C.$$

Литература

1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций.М:Наука, 1970.

2. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент.М:Наука, 1976.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С УПРАВЛЕНИЕМ В СТАРШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ[1]

Беляева О.А., Сумин В.И. (Нижний Новгород)

belaeva84@rambler.ru; v_sumin@mail.ru

Пусть $\underline{c}$, $\overline{c}$, $\widehat{c}$, T_1, T_2 – фиксированные неотрицательные числа, $0<\underline{c}\leqslant\overline{c}$, $\Pi\equiv\left\{t\equiv\{t_1,t_2\}\in\mathbf{R}^2:\overline{c}t_1\leqslant t_2\leqslant T_2-\overline{c}t_1, 0\leqslant t_1\leqslant T_1\right\}$. Рассмотрим задачу Коши для полулинейного волнового уравнения

$$\mathcal{L}_c\left[x\right]\equiv x''_{t_1t_1}-\left(c\left(t_1\right)\right)^2x''_{t_2t_2}=g(t,x(t)),\ t\in\Pi, \qquad (1)$$

$$x\left(0,t_2\right)=0,\quad x'_{t_1}\left(0,t_2\right)=0\ \text{ при }\ t_2\in\left[0,T_2\right], \qquad (2)$$

в которой $g(t,l)\colon\Pi\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ – заданная функция, $c(t_1)\colon\ [0,T_1]\to\mathbf{R}$ – управление. Функции $g(t,l)$ и $g'_l(t,l)$ удовлетворяют условиям Каратеодори и ограничены на любом ограниченном множестве. Допустимы управления из класса D абсолютно непрерывных на отрезке $[0,T_1]$ функций, удовлетворяющих на нем условиям $\underline{c}\leqslant c\left(t_1\right)\leqslant\overline{c}, \left|c'\left(t_1\right)\right|\leqslant\widehat{c}$. Пусть Γ – "нижнее основание"$\{t\in\partial\Pi:t_1=0\}$ множества Π. Для любых $x\left(\cdot\right)\in W_2^1\left(\Pi\right),\ c\left(\cdot\right)\in D,\ \eta\left(\cdot\right)\in W_2^1\left(\Pi\right),$ $z\left(\cdot\right)\in L_\infty\left(\Pi\right)$ обозначим через $J\left[x\left(\cdot\right),c\left(\cdot\right),\eta\left(\cdot\right),z\left(\cdot\right)\right]$ выражение $\int\limits_\Pi\left\{x'_{t_1}\left(t\right)\eta'_{t_1}\left(t\right)-\left(c\left(t_1\right)\right)^2x'_{t_2}\left(t\right)\eta'_{t_2}\left(t\right)+z\left(t\right)\eta\left(t\right)\right\}dt$. Решением задачи (1), (2), отвечающим управлению $c\left(\cdot\right)\in D$, назовем функцию $x\left(\cdot\right)\in W_\infty^1\left(\Pi\right)$, для которой при любом $\eta\left(\cdot\right)\in W_2^1\left(\Pi\right)$, равном нулю на $\partial\Pi\backslash\Gamma$, имеем $J\left[x\left(\cdot\right),c\left(\cdot\right),\eta\left(\cdot\right),g(\cdot,x(\cdot))\right]=0$. Каждому

[1]Поддержка грантом РФФИ 04-01-00460

управлению может отвечать не более одного такого, глобального, решения. Пусть Ω – множество тех управлений, каждому из которых отвечает глобальное решение (1),(2). Обозначим через $A_c[z]$ решение из $W^1_\infty(\Pi)$ задачи Коши с условием (2) для уравнения $\mathcal{L}_c\,[x] = z(t)$, $t \in \Pi$, при $c\,(\cdot) \in D$, $z\,(\cdot) \in L_\infty(\Pi)$. Для каждого $c\,(\cdot) \in D$ линейный оператор $A_c[\cdot] : L_\infty(\Pi) \to L_\infty(\Pi)$ ограничен. Сформулируем общую теорему об устойчивости свойства глобальной разрешимости (1),(2) при возмущении управления и ее конкретное следствие.

Теорема. $\forall c_0\,(\cdot) \in \Omega \; \exists \delta > 0 : c\,(\cdot) \in D, \|A_{c_0} - A_c\| < \delta \Rightarrow c\,(\cdot) \in \Omega$.

Следствие. $\forall c_0(\cdot) \in \Omega \; \exists \delta > 0 : c(\cdot) \in D, \|c(\cdot) - c_0(\cdot)\|_{C[0,T_1]} + \|c'(\cdot) - c_0'(\cdot)\|_{L_\infty[0,T_1]} < \delta \Rightarrow c\,(\cdot) \in \Omega.$

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Беседина С.В. (Воронеж)

В работе рассматривается связное множество $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$, являющееся подмножеством в $\mathbb{R}^n$, составленное из n-мерных многогранников (стратов), прочно примыкающих друг к другу. Граница множества состоит из одномерных стратов, размерности меньшей n. На Ω рассматривается задача Дирихле

$$div(p\,gradu) = 0,$$

$$u|_{\partial\Omega_0} = \varphi,$$

$p = const$ в пределах каждого страта. На Ω вводится понятие мягкого Лапласиана.

Применение классических методов, без изменения, для доказательства разрешимости задачи Дирихле на рассматриваемом множестве невозможно, в связи с рядом особенностей, которые возникают в местах стыковки стратов. В связи с этим доказательство разрешимости проводится при помощи модифицированного метода Пуанкаре-Перрона.

В основе метода Пуанкаре-Перрона лежит теорема о среднем, неравенство Харнака и формула Пуассона в шаре. Уже при введении понятия шара (вид которого может быть достаточно необычным) появляется ряд особенностей, что связано с достаточно сложной геометрией рассматриваемого множества. В результате нужные теоремы удалось доказать только для шаров достаточно малого радиуса, что повлекло необходимость доказательства ряда вспомогательных утверждений из которых следует разрешимость задачи Дирихле.

Литература

[1] Пенкин О.М. О принципе максисума для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. // Дифференц. уравн., 1998.-Т.34-№10.-С.1433-1434.

[2] Хейман У. Кенеди П. Субгармонические функции.,М.:Мир., 1980, 304 с. F.John. Partial Differential Eqation. Springer Verlag, 1986,250 P.

[3] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.:Мир, 1964, 830 с.

[4] F.John. Partial Differential Eqation. Springer Verlag, 1986, 250 P.

О ВЛОЖЕНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

Бимендина А.У. (Караганда)

bimen@mail.ru

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{+\infty}$-система Прайса на группе G[1]. Для функции $f \in L(G)$ ставим в соответствие её ряд Фурье-Прайса.

Через $L_{p\theta}(G), 1 \leqslant p \leqslant +\infty, 1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$ обозначим пространство Лоренца[2].

Последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$ называется квазимонотонным, если $\exists \tau > 0$ такое, что $\frac{a_k}{k^\tau} \downarrow 0$ при $k \to +\infty$.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть $f \in L_{p\theta}(G)$, где $1 \leqslant p < +\infty, 1 \leqslant \theta \leqslant +\infty$. Если для некоторого $q : 1 \leqslant p < q < +\infty$ ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} E_k^\theta(f)_{p\theta} < +\infty$$

сходится, то $f \in L_{q\theta}(G)$ и справедлива неравенства:

$$\|f\|_{q\theta} \leqslant c_{pq\theta} \left\{ \|f\|_{p\theta} + \left[\sum_{k=1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} E_k^\theta(f)_{p\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\},$$

$$E_n(f)_{q\theta} \leqslant c'_{pq\theta} \left\{ (n+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E_n(f)_{p\theta} + \left[\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} E_k^\theta(f)_{p\theta} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\},$$

где $E_k(f)_{p\theta}$ - наилучшее приближение функции $f \in L_{p\theta}(G)$ посредством линейных агрегатов по элементам мультипликативной системы Прайса.

Теорема 2. Пусть $f \in L_{q\theta}(G), \quad 1 < q < +\infty, \quad 1 < \theta < +\infty$ и её коэффициенты Фурье-Прайса $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ квазимонотонны. Тогда для любого $p \in (1, q)$ имеет место неравенство:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\theta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1} E_n^{\theta}(f)_{p\theta} \leqslant c''_{pq\theta\tau} \|f\|_{q\theta}^{\theta}.$$

Литература

1. Голубов Б.И., Ефимов А.Б., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. М:"Наука 1987.

2. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на Евклидовых пространствах. М.: "Мир 1974.

УРАВНЕНИЕ $(a \cdot x) \times b = c$ В ТЕТРАГРУППОИДЕ, В КОТОРОМ НЕТ ЗАКОНОВ ДЛЯ ОПЕРАЦИЙ

Блюмин С.Л. (Липецк)

slb@stu.lipetsk.su

Рассматривается тетрагруппоид ТГ $=< S, \cdot, \times; \odot, \otimes >$ с основными операциями $\cdot, \times$, сопровождающими операциями $\odot, \otimes$ и сопровождающими элементами $a^{\cdot}, a^{\odot}, a^{\times}, a^{\otimes}$ такими, что:

$(\nabla a)(\exists a^{\cdot})(\exists a^{\odot})(\exists a^{\times})(\exists a^{\otimes})$

$1^{\cdot} (\forall x)\{(a^{\cdot} \cdot (a \cdot x)) \odot (a^{\odot} \cdot x) = x\}$,

$2^{\cdot} (\forall x, y)\{a \cdot (y \odot (a^{\odot} \cdot x)) = a \cdot y\}$;

$1^{\times} (\forall x)\{(x \times a^{\otimes}) \otimes ((x \times a) \times a^{\times}) = x\}$,

$2^{\times} (\forall x, y)\{((x \times a^{\otimes}) \otimes y) \times a = y \times a\}$.

Не предполагается наличие сочетательных, переместительных, распределительных законов, нейтральных, симметричных, регулярных элементов.

Критерий разрешимости уравнения $(a \cdot x) \times b = c$:

$(a \cdot (a^{\cdot} \cdot ((t \times b^{\otimes}) \otimes (c \times b^{\times})))) \times b = ((t \times b^{\otimes}) \otimes (c \times b^{\times})) \times b = c, t \in S.$

Общее решение:

$x = (a^{\cdot} \cdot ((t \times b^{\otimes}) \otimes (c \times b^{\times}))) \odot (a^{\odot} \cdot s), t, s \in S.$

Пример: $S = \{p, q, r\}$, операции

$$\begin{array}{cccc} \cdot & p & q & r \\ p & q & p & r \\ q & p & q & p \\ r & q & r & r \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \times & p & q & r \\ p & q & p & r \\ q & p & q & p \\ r & q & r & r \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \odot & p & q & r \\ p & p & p & p \\ q & q & r & q \\ r & q & r & r \end{array} \quad \begin{array}{cccc} \otimes & p & q & r \\ p & p & q & r \\ q & p & q & p \\ r & r & q & p \end{array}.$$

Для уравнения $(r \cdot x) \times p = q$, можно использовать $r^{\cdot} = p, r^{\odot} = p, p^{\times} = p, p^{\otimes} = q, t = r$. Выполняется критерий $(r \cdot (p \cdot ((r \times q) \otimes (q \times p)))) \times p = (r \cdot (p \cdot (r \otimes p))) \times p = (r \cdot (p \cdot r)) \times p = (r \cdot r) \times p = r \times p = q$; общее решение:

$x = (p \cdot ((r \times q) \otimes (q \times p))) \odot (p \cdot \{p \vee q \vee r\}) = r \odot \{q \vee p \vee r\} = \{q \vee r\}$.

В полукольце [1] с совпадающими умножениями $\cdot$ и $\times$ роль $\odot$ и $\otimes$ играет сложение $+$, $a^{\cdot}$ и $b^{\times}$ - обобщенные обратные к регулярным a и b, $a^{\odot}$ и $b^{\otimes}$ - их регулярные дополнения, и результаты сводятся к полученным в [2].

Литература

1. Vandiver H. Note on a Simple Type of Algebra in Which the Cancellation Law of Addition Does Not Hold//BAMS.1934.**40**.916-920.

2. Blyumin S., Golan J. One-sided Complements and Solutions of the Equation $axb{=}c$ in Semirings//IJMMS.2002.**29**.453-458.

КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В РЕШЕНИЯХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕСТАБИЛЬНОСТИ СПЕКТРА

Бободжанов А.А., Прохоренко В.И., Сафонов В.Ф.
(Москва)

В настоящей работе продолжаются исследования, связанные с возникновением внутренних переходных слоёв в интегро-дифференциальной системе вида

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)\, y + \int\limits_0^t exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu_0(\theta) d\theta\right) K(t,s)\, y(s,\varepsilon) ds +$$

$$+ M(t) \int\limits_0^t exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu_1(\theta) d\theta\right) N(s)\, y(s,\varepsilon) ds + h(t),\ y(0,\varepsilon) = y^0 \tag{1}$$

с двумя быстро изменяющимися ядрами, одно из которых имеет нестабильное спектральное значение ($\mu_1(t) \equiv 0\ \forall t \in S \subset [0,T]$), другое - стабильное спектральное значение ($\mu_0(t) \neq 0\ \forall t \in [0,T]$). При этом предполагается, что спектр $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ стабилен. Ставится задача о построении асимптотического решения (любого порядка) системы (1) при $\varepsilon \to +0$. В ходе исследования этой задачи обсуждается (как самостоятельный объект) проблема описания контрастных структур в систе(1). Исчерпывающий ответ на вопрос о том, при каких условиях возникают такие структуры и какова их конструкция, может быть получен на основе анализа асимптотического решения задачи (1). Разрабатывается алгоритм построения такого решения, основанный на методе регуляризации и методе нормальных форм (см. например. [1-3]).

Литература

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981, 400 с.

2. Бободжанов А.А.,Сафонов В.Ф. Внутренный переходный слой в линейной задаче оптимального управления// Дифференц.уравнения. 2001. Т. 37. N 3. С.310-322.

3. Бободжанов А.А.,Сафонов В.Ф. Сингулярно возмущенные интегро дифференциальные системы с контрастными структурами// Математ. сборник. 2005. Т. 196.N 2, С.29-56.

ДИФФЕРЕНЦИАЦИЯ В ПРОЦЕССЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ

Бобылева О.Д. (Нальчик)

Математика как учебный предмет имеет ряд специфических особенностей. Во-первых, процесс изложения учебного материала в основном является линейным, что диктует необходимость систематичного овладения системой математических знаний, умений и навыков, необходимых для дальнейшего изучения как самой дисциплины, так и смежных дисциплин. Во-вторых, одной из основных задач педагогического процесса обучения математике является усвоение результатов знаково-символической деятельности, что ведет к соответствующей организации познавательной деятельности, способствующей сознательному оперированию математическими объектами. В-третьих, обучение математике опирается на развитое логическое мышление, пространственное воображение, инструментальные и графические навыки, т.е. в определенной степени на индивидуальные психо-физиологические особенности, поэтому учет психологических законов восприятия, возможностей и закономерностей нейрофизиологических механизмов памяти и мышления должен оказать положительное воздействие на качество усвоения материала.

Очевидно, что оптимизация процесса преподавания математики может быть достигнута путем специальной организации формы и содержания занятий. Изучение особенностей преподавания математики на различных специальностях позволили нам определить педагогические факторы, критерии и условия формирования содержания образования, в качестве которых мы приняли следующую их совокупность:

1) *Уровень подготовки* к восприятию математических знаний студентами разных курсов и направлений подготовки специалиста.

2) Фактор учета *способностей и возможностей* к изучению математики студентами разных курсов и направлений подготовки специалистов.

3) Фактор учета *мотивации* к изучению математики студентами разных курсов и специальностей.

4) *Интеграция* математических знаний с другими областями знаний.

Таким образом, особенности математики как учебного предмета диктуют особое значение *дифференциации* в процессе обучения, влекущее за собой построение специальной модели предмета, а затем наполнения ее конкретным содержанием. На наш взгляд, оптимальной является в*нутренняя дифференциация,* которая в стенах вуза пока является достаточно инновационной, однако в последние годы явно наблюдается тенденция к ее развитию, что отражается в работах В.И. Горовой, Е.А.Климова, Н.Б. Русских, Л.Л.Супрунова, а также в трудах ряда других ученых. Она может проявляться как в традиционной форме учета индивидуальных особенностей учащихся, так и в форме *уровневой дифференциации*, которая выражается в том, что, обучаясь в одной группе, по одной программе и учебной литературе, студенты могут усваивать материал на различных уровнях. Реализуя дифференциацию в вузе, на наш взгляд, необходимо делать акцент на дидактико - технологическую составляющую, в ходе которой осуществляется выбор наилучшего режима работы для студента, подходящего уровня сложности материала, оптимального способа предъявления информации. При этом важно контролировать процесс выполнения требований, предъявляемых к студенту вуза, поскольку уровень обязательной подготовки студента, свидетельствующий о выполнении минимально необходимых требований к усвоению содержания и являющийся основой для формирования более высоких уровней овладения материалом, является определяющим, то есть происходит планирование результатов обучения.

О ПРОДОЛЖЕНИИ 2-МЕРНЫХ АЛГЕБР, СОДЕРЖАЩИХ СКАЛЯРНЫЕ МАТРИЦЫ[1]

Болдырева О.А. (Воронеж)

boa@vgasu.vrn.ru

При изучении однородных многообразий возникает задача о продолжении матричных алгебр Ли. Алгебра, соответствующая аффинно-однородной поверхности в $\mathbb{C}^3$, состоит из матриц специального вида:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & p \\ B_1 & B_2 & 0 & s \\ a & b & c & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Два элемента c, q таких матриц являются вещественными, а остальные, вообще говоря, комплексными числами. При этом имеются некоторые дополнительные ограничения на эти элементы. Например, для некоторых положительных ε_1, ε_2

$$a = 2i(\bar{p} + 2\varepsilon_1 p), \quad b = 2i(\bar{s} + 2\varepsilon_2 s). \tag{2}$$

Левые верхние 2x2-блоки этих матриц сами образуют вещественную алгебру. Переход от подалгебр $M(2,\mathbb{C})$ к подалгебрам $M(4,\mathbb{C})$ мы и называем продолжением.

Нас интересуют продолжения двумерных подалгебр $M(2,\mathbb{C})$ до 5-мерных вещественных подалгебр $M(4,\mathbb{C})$ общего положения. Под общностью положения мы понимаем ограничение $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(2\varepsilon_1 - 1)(\varepsilon_2 - 1) \neq 0$ на параметры ε_1, ε_2 из (2).

Все двумерные алгебры описаны в [1]. В [2] доказана невозможность продолжения алгебры с нулевым кратным спектром. Здесь мы обсуждаем еще 3 типа алгебр из [1], содержащих скалярные матрицы. Один из этих типов содержит лишь скалярную алгебру, а в алгебрах двух других типов имеются не только скалярные матрицы.

ТЕОРЕМА. В общем положении продолжение скалярной двумерной подалгебры $M(2,\mathbb{C})$ невозможно.

При доказательстве этой теоремы оказывается полезным следующее

Предложение. Если двумерная алгебра, допускающая продолжение, содержит скалярную матрицу, то эта матрица является вещественной.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 05-01-00630).

Из этого предложения следует что невозможно также продолжение алгебр, содержащих скалярные не вещественные матрицы. Если скалярная базисная матрица, входящая в двумерную алгебру является вещественной (единичной), то вопрос о продолжении такой алгебры сводится к большой системе квадратичных уравнений. Эта система до конца пока не изучена.

Литература

[1] Пушмина Н.С., Черных С.С., Седаев А.А. Классификация двумерных вещественных подалгебр алгебры Ли $M(2, \mathbb{C})$. Труды 5-й междунар. конф. молодых ученых «Актуальные проблемы современной науки». Самара 2004, стр. 104-107.

[2] Болдырева О.А. О продолжении 2-мерных матричных алгебр. Воронежская зимняя математическая школа. Тезисы докладов. Воронеж, 2006, стр 25.

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ-ЦИКЛЕ[1]

Бурлуцкая М.Ш. (Воронеж)

bums@kma.vsu.ru

Рассматривается дифференциальный оператор первого порядка, заданный на связном геометрическом графе Г, состоящем из n ребер. Изучается вопрос о равносходимости разложений некоторой функции $f(x)$ по собственным функциям данного дифференциального оператора и по обычной тригонометрической системе. Используется векторный подход ([1], с.21), в соответствии с которым краевая задача, порождающая изучаемый оператор, имеет вид
$y_j'(x) = \lambda d_j y_j(x) + d_j f(x),\ x \in [0,1],\ d_j > 0,\ j = 1, \ldots, n$
$U_j(y) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} y_k(0) + \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk} y_k(1), \quad j = 1, \ldots, n$
Дифференциальный оператор вводится следующим образом:

$$Ly = D^{-1}y', \quad y = (y_1, \ldots, y_n)^T,\ D^{-1} = \mathrm{diag}(d_1^{-1}, \ldots d_n^{-1}) \qquad (1)$$
$$U(y) = P_0 y(0) + P_1 y(1) = 0, \qquad (2)$$

где P_0, P_1 — матрицы коэффициентов $\{a_{ij}\}$, $\{b_{ij}\}$ соответственно, T — знак траспонирования.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 04-01-00049

Теорема 1. *Если краевые условия (2) регулярны по Биркгофу (в данной задаче* $\det P_0 \det P_1 \neq 0$*), то к любой вершине графа не может примыкать более двух ребер.*

Таким образом, для регулярности краевых условий, необходимо, чтобы Γ являлся циклом. Пусть теперь Γ — цикл, и условия (2) означают непрерывность $y(x)$ на Γ.

Теорема 2. *Если* $f_j(x) \in L[0,1]$, $\delta \in (0, 1/2)$ *то*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda f)_j \, d\lambda - \sigma_{rd_j}(f_j, x) \right\|_{C[\delta, 1-\delta]} = 0,$$

$j = 1, \ldots, n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$, $(R_\lambda f)_j$ *— j-ая компонента резольвенты опертора L ;* $\sigma_r(g, x)$ *— частичная сумма ряда Фурье скалярной функции* $g(x)$ *по тригонометрической системе* $\{e^{2k\pi i x}\}_{-\infty}^{+\infty}$ *для тех* k*, для которых* $|2k\pi| < r$.

Был использован метод контурного интеграла [3], развитый в [2].

Литература

1. Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах// М.:Физматлит, 2004. - 272 с.

2.. Хромов А.П. // Матем. сборник. 1981. Т. 114(156). N. 3. С.378-405.

3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМ РОСТОМ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Быков С.В. (Брянск)

b_serecha@mail.ru

Пусть $\mathbf{C}_+$ — верхняя полуплоскость комплексной плоскости, $\lambda(r)$ — монотонно растущая положительная функция из $\mathbf{C}^{(1)}(\mathbf{0}, +\infty)$. Обозначим через $\mathbf{H}(\mathbf{C}_+)$ — множество всех голоморфных в $\mathbf{C}_+$ функций, и предположим, что

$$A(\lambda) = \{f \in H(\mathbf{C}_+) \ : \ \ln|f(z)| \leqslant C_f \lambda(|z|), \ z \in \mathbf{C}_+\}.$$

Для функций конечного порядка ρ характеризация корневых множеств получена Н.В. Говоровым ([1], [2]). Им, в частности, установлено, что если

$$\ln|f(z)| \leqslant C_\varepsilon |z|^{\rho+\varepsilon}, \ \forall \varepsilon > 0 \tag{1}$$

и $f(iy_n) = 0, n = 1, 2, ...$, то при всех $\varepsilon > 0$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{y_n^{p+\varepsilon}} < +\infty$. При этом существует функция f с условием (1) и $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такая, что $f(iy_n) = 0, n = 1, 2, ...$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{y_n^{p-\varepsilon}} = +\infty$ при произвольном $\varepsilon > 0$.

Для класса $A(\lambda)$ нами установлено:

Теорема. Пусть $\lambda \in \mathbf{C}^{(\mathbf{2})}(0, +\infty)$, причем $\frac{\lambda''(r)}{\lambda'^2(r)} \to 0$ при $r \to +\infty$. Тогда если $f \in A(\lambda)$: $f(iy_n) = 0$, $n = 1, 2, ...$ при всех $\varepsilon > 0$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda(y_n)(ln\lambda(y_n))^{1+\varepsilon}} < +\infty$ при всех $\varepsilon > 0$.

Обратно: Если λ удовлетворяет вышеуказанному условию, то существует функция $f \in A(\lambda)$ и последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $f(iy_n) = 0, n = 1, 2, ...$, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda(y_n)(ln\lambda(y_n))^{1-\varepsilon}} = +\infty$ при всех $\varepsilon > 0$.

Замечание: Условие (1) не накладывает ограничения на рост функций.

Литература

1. Говоров Н.В. ДАН СССР,1965.

2. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М.: Наука,1986.

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМ РОСТОМ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Быков С.В. (Брянск)

b_serecha@mail.ru

Пусть $\mathbf{C}_+$ - верхняя полуплоскость комплексной плоскости, $\lambda(r)$ - монотонно растущая положительная функция из $\mathbf{C}(\mathbf{0}, +\infty)$. Обозначим через $\mathbf{H}(\mathbf{C}_+)$ - множество всех голоморфных в $\mathbf{C}_+$ функций,

$$A(\lambda) = \{f \in H(\mathbf{C}_+) \ : \ \ln|f(z)| \leqslant C_f \lambda(|z|), \ z \in \mathbf{C}_+\}.$$

В работах Н.В. Говорова ([1], [2]) установлено, что если

$$\ln|f(z)| \leqslant C_\varepsilon |z|^{\rho+\varepsilon}, \ \forall\varepsilon > 0 \tag{1}$$

и $f(iy_n) = 0, n = 1, 2, ..., f(i) = 1$, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{y_n^{\rho+\varepsilon}} < +\infty$ при всех $\varepsilon > 0$. При этом существует функция f с условием (1) и $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такая, что

$f(iy_n)=0, n=1,2,..., f(i)=1$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{y_n^{\rho-\varepsilon}}=+\infty$ при произвольном $\varepsilon>0$.

Для класса $A(\lambda)$ нами установлено:

Теорема. Пусть $\lambda\in\mathbf{C^{(2)}}(0,+\infty)$, причем $\frac{\lambda''(r)}{\lambda'^2(r)}\to 0$ (2) при $r\to+\infty$. Тогда если $f\in A(\lambda)$: $f(iy_n)=0$, $n=1,2,...,f(i)=1$, то при всех $\varepsilon>0$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda(y_n)(ln\lambda(y_n))^{1+\varepsilon}}<+\infty$.

Обратно: Если λ удовлетворяет вышеуказанному условию, то существует функция $f\in A(\lambda)$ и последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такие, что $f(iy_n)=0, n=1,2,...,f(i)=1$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda(y_n)(ln\lambda(y_n))^{1-\varepsilon}}=+\infty$ при всех $\varepsilon>0$.

Замечание: Условие (2) не накладывает ограничения на рост функций λ.

Литература

1. Говоров Н.В. ДАН СССР,1965.

2. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом.М.:Наука,1986.

О ПРИЛОЖЕНИИ МЕТОДА РЕШЕТА К КОРОТКИМ ИНТЕРВАЛАМ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Вахитова Е.В. (Стерлитамак)

Рассмотрим последовательность A :

$$A:=\{kn+l\mid k,l,n\in\mathbf{N},\ (k,l)=1,\ 0<l<k,\ n\leqslant x\},\qquad(1)$$

x – достаточно большое положительное число.

Теорема 1. *Пусть последовательность A определена условием (1), $a,b,c\in\mathbf{R}$, $1\leqslant b<c<a$, $2c-b-1>0$. Тогда имеет место следующая оценка:*

$$\sum_{P_2\in A}1\geqslant\frac{2+O(\epsilon)}{\varphi(k)}\frac{a}{4(2c-b-1)}K(a,b,c)\frac{x}{\ln x},$$

где величина $K(a,b,c)$ определена следующим равенством:

$$K(a,b,c):=\frac{10c+3b-7}{10}\ln 3-\frac{b-1}{2}\ln 5-\frac{4(b-1)}{3}+(4-c)\ln\frac{4-b}{4-c}+$$

$$+\left(\ln\frac{5}{3}+\frac{8}{3}+\frac{4(b+1)}{5}\right)\ln\frac{b+1}{2}-c\ln c-\frac{4+4b-5c}{5}\ln(4-b),$$

P_2 – 2–почти простое число, $\varphi(k)$ – функция Эйлера.

Теорема 2. *Существуют числа P_2, такие, что*

$$P_2=kn+l,\ 0<l<k,\ (k,l)=1 \text{ и } x-x^{\frac{1}{\Lambda_2}}<P_2<x, \Lambda_2=1,975.$$

Отметим, что ранее были получены значения $\Lambda_2 = 1,845$ (Иванец) и $\Lambda_2 = 1,937$ (Гривс). При доказательсте теорем 1 и 2 применяется метод решета. О различных методах решета можно узнать из работ [1] – [4].

Литература

[1] *Вахитова Е.В.* Методы решета с весами Бухштаба и их приложения. Монография. – М.: МПГУ, Прометей, 2002. – 268 с.

[2] *Greaves G.* Sieve methods and problems // IV Междун. конф. "Современные проблемы теории чисел и ее приложения"(посвященная 180–летию П.Л. Чебышева и 110–летию И.М. Виноградова) Россия, Тула, 10 –15 сент. 2001. Ч. II. М.: Изд–во МГУ. – 2001. – С. 7 – 47.

[3] *Greaves G.* Sieves in number theory. Ergebnisse der Mathematik. Berlin: Springer–Verlag. – 2001. - 304 P.

[4] *Heath –Brown D. R.* Lectures on sieves. Bonn: Univ. Bonn, Mathematisches Institut. Bonner Mathem. Schriften.– 2003. – 50 P.

ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЕОМЕТРИИ[1]

Габушин В.Н. (Екатеринбург)

Gabushin@imm.uran.ru

В связи с использованием для задания кривых различных классов действительных функций представляют интерес оценки геометрических характеристик таких кривых. Пусть вектор-функция $\vec{r}(t)=(t,f(t),g(t))$, $t\in I\subset \mathbf{R}$ задает некоторую пространственную кривую (размерность $d=3$), а вектор-функция $r(t)=(t,f(t))$ задает плоскую кривую (размерность $d=2$). Рассматривается задача о точных по классу оценках кривизны кривых

$$K_\alpha(W)=\sup\{\|k_\alpha(r,t)\|_I:\ \vec{r}(t)\in W\}, \qquad (1)$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00949.

где $k_\alpha(r,t) = \Big|[\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)]\Big| / |\vec{r}'(t)|^\alpha$ при $d = 3$, $k_\alpha(r,t) = |f''(t)|/(1 + f'(t)^2)^{\alpha/2}$ при $d = 2$, $\|k_\alpha(r,t)\|_I = \sup\{|k_\alpha(r,t)| : \ t \in I\}$, W – некоторый класс вектор-функций (класс кривых). Пусть $\vec{r}_*(t) = (0, f(t), g(t))$ при $d = 3$, $r_*(t) = (0, f(t))$ при $d = 2$, длина вектора определяется стандартно, и пусть $\|r_*(t)\|_{p,I} = (\int_I |r_*(t)|^p \, dt)^{1/p}$ при $0 < p < \infty$, $\|r_*(t)\|_{\infty,I} = \operatorname{ess\,sup}\{|r_*(t)| : \ t \in I\}$, $W^n_{p,s}(A,B) = \{r(t) : \|r_*\|_{p,R} \leqslant A, \ \ \|r_*^{(n)}\|_{s,R} \leqslant B\}$. Если $\alpha = 3$, то k_α – кривизна.

Теорема 1. *Пусть* $p, s \geqslant 1$, $d = 3, \alpha \geqslant 1$. *Тогда* $K_\alpha(W^n_{p,s}(A,B)) = C_{p,s} A^\alpha B^{1-\alpha}$, *где* $C_{p,s}$ *– точная константа в неравенстве Колмогорова*

$$\|f''\|_\infty \leqslant C_{p,s} \|f\|_p^\alpha \|f^{(n)}\|_s^{1-\alpha}, \quad \alpha = (n - 2 - 1/p)/(n - 1/p + 1/s).$$

При этом либо существует плоская экстремальная кривая, либо существует экстремальная последовательность кривых, лежащих в одной плоскости.

Пусть $W_n(a) = \{r(t) = (t, f(t)) : f(t)$ – алгебраические многочлены степени не выше n, $\|\vec{r}_*\|_{\infty,I} \leqslant a, \ \ I = [-1,1]\}$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \geqslant 0$, $n \geqslant 3$, $I = [-1,1]$. *Тогда найдется такое число* $a_* = a_*(n,\alpha)$, *что для любой экстремальной в задаче (1) для класса* $W_n(a)$, $0 < a < a_*$, *вектор-функций* $r(t)$ *имеем*

$$K_\alpha(W_n(a)) = k_\alpha(r,1) \text{ или } K_\alpha(W_n(a)) = k_\alpha(r,-1).$$

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Гачаев А.М. (Грозный)
niipma@mail333.com

Рассмотрим краевую задачу

$$u'' + \lambda \Gamma(2-\alpha) D^\alpha_{0x} u = \theta(x), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{2}$$

где $D^\alpha_{0x} u$ – дробная производная Римана-Лиувилля порядка α [1], $\theta(x)$ – известная функция.

Задача (2) для уравнения (1) рассмотрена в работах [2], [3], [4].

Теорема. *Если* $0 < \lambda < (3-\alpha)(2-\alpha)/24$, *то уравнение*

$$u(x) + \lambda \left\{ \int\limits_0^x x(1-t)^{1-\alpha} u(t)dt - \int\limits_0^x (x-t)^{1-\alpha} u(t)dt \right\} = F(x)$$

имеет единственное решение и разность между этим решением и решением

$$\tilde{u}(x) = F(x) + \frac{(2-\alpha)(3-\alpha)(-x)}{(3-\alpha)(2-\alpha)-\lambda} \int\limits_0^1 (1-t)f(t)dt$$

уравнения $u(x) - \dfrac{\lambda}{\Gamma(2-\alpha)} \displaystyle\int\limits_0^1 x(1-\xi)^{1-\alpha} u(\xi)d\xi = F(x)$, *удовлетворяет оценке*

$$\left| u(x) - \frac{(2-\alpha)(3-\alpha)(-x)}{(3-\alpha)(2-\alpha)-\lambda} \int\limits_0^1 (1-t)f(t)dt - F(x) \right| \leqslant \frac{N\lambda\left(1+\frac{24}{23}\right)^2}{1-\lambda\left(1+\frac{24}{23}\right)}.$$

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. *Алероев Т.С.* // Дифференц. уравнения, 1984. Т. 22, № 1.
3. *Алероев Т.С.* // Доклады РАН, 1995. Т. 341, № 1.
4. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.

КОНЕЧНОШАГОВЫЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ[1]

Герасимова Е.Н. (Москва)

elena@neumann-elektronik.ru

Рассматривается задача оптимального управления

$$J(u,v) = \Phi(w,u) \to \inf,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 04-01-00619.

$$w_t - (a(x)\cdot w_x(x,t))_x = d(x)\,u(t) + f(x,t),\ (x,t)\in Q,$$
$$w_x(0,t) = v(t),\ w_x(l,t) = 0,\ t\in[0,T],\ w(x,0) = \varphi(x),\ x\in[0,l]$$

с ограничениями на управления $(u(t), v(t)) \in L_2(0,T)\times L_2(0,T)$:

$$|u(t)|_{L_2(0,T)} \leqslant R_1,\ \ |v(t)|_{L_2(0,T)} \leqslant R_2.$$

Здесь Φ - выпуклая функция, $Q = (0,l)\times(0,T)$; $a(x)\in C^1[0,l]$, $a(x) >\ 0,\ f\in L_2(Q),\ y(x),\ d(x),\ \varphi(x)\in L_2(0,l)$.

Для данной задачи ставится в соответствие конечноразностная задача. Для решения конечноразностных задач применяется метод проекции градиента с конечношаговыми внутренними процедурами. Для вычисления проекции применяется двойственный регуляризованный метод [1], который является развитием обобщенного метода моментов [2]. Используя методику исследования свойств аппроксимаций задач оптимального управления [3], выведены условия и оценки сходимости по функционалу и по управлению.

Литература

[1] *Ишмухаметов* А.З. Двойственный метод решения одного класса выпуклых задач минимизации. ЖВМ и МФ, 2000, т.40, №7. с. 1045-1060.

[2] *Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М.* Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1989.

[3] *Ишмухаметов А.З.* Регуляризованные методы оптимизации с конечношаговыми внутренними алгоритмами. Доклады РАН, 2003, т.390, № 3, с. 304-308.

РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ, РЕШАЮЩЕЕ ЗАДАЧУ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТРУННОЙ СЕТКИ С УСЛОВИЕМ "ЖИДКОГО" ТРЕНИЯ В УЗЛАХ[1]

Глотов Н.В. (Воронеж)

Начально-краевая задача для волнового уравнения на конечной и ограниченной пространственной сети с условиями так называемого жидкого трения в узлах (и с краевыми условиями второго типа) сводится, применяя подход, изложенный в [1], к классической задаче о распространении граничных режимов, производная вектор-функции из которых является решением уравнения

$$(2(M - V^{-1}A) + (P - M)(I + V^{-1}K))\mu'(t) = g(t), \quad (t\geqslant 0) \qquad (1)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 04-01-00049)

где $\mu : [0;+\infty) \to \mathbf{R}^m$ (m - количество узлов пространственной сети, включая тупиковые точки), A - матрица смежности узлов, V - матрица валентностей, $(Pf)(t) := f(t+1)$, $(Mf)(t) := f(t-1)$, К - диагональная матрица коэффициентов трения в узлах, g - известная функция, определяемая через начальное отклонение.

Теорема. Пусть $\alpha := (I + V^{-1}K)^{-1}(2V^{-1}A)$, $\gamma := -(I + V^{-1}K)^{-1}((I - V^{-1}K))$, $\tilde{g}(\tau) := (I + V^{-1}K)^{-1}(P - M)V^{-1}g(\tau+1)$. Если существует δ - решение уравнения $\delta(\alpha+\delta) = \gamma$, матрицы α, δ перестановочны, $V \neq K$, то

$$\mu'(t+n) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1^k)\delta^k(\alpha+\delta)^{n-k-1}(\mu'(t+1)+\delta\mu'(t))+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-k-2}(-1)^k\delta^k(\alpha+\delta)^j\tilde{g}(t)+(-1)^n\delta^n\mu'(t). \quad (t \in [0;1),\ n \in \mathbf{N})$$

Литература

[1] Прядиев В.Л. Один подход к описанию в конечной форме решений волнового уравнения на пространственной сети // Spectral and Evolution Problems: Proceeding of the Fifteenth Crimean Autumn Math. School – Symposium. Vol. 15, September 17-29, 2004, Sevastopol, Laspi. – Simferopol, 2005.

ОЦЕНКА АСИМПТОТИКИ ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Глушко А.В., Рябенко А.С. (Воронеж)

В работе рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2(x_3)\,\Delta v = g(x,\,t) \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями:

$$v(x,\ t)\,|_{\,t=0} = 0, \tag{2}$$

$$v|_{\,x_3=0} = v|_{\,x_3=\infty} = 0, \tag{3}$$

где $t > 0$, $(x_1,\ x_2) \in R^2$, $x_3 \in [0,\infty)$, $a^2(x_3) \in C[0,\infty)$, $0 < \varepsilon_1 \leqslant |a(x_3)| \leqslant \varepsilon_2$, при некоторых $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$.

Известно, что при произвольном $a(x_3)$ нельзя построить решение задачи (1)-(3) в явном виде, поэтому для изучения поведения решения задачи (1)-(3) при $t \to \infty$ применен принцип локализации, позволяющий свести изучение этого поведения к исследованию контуров потери аналитичности образа Фурье-Лапласа $L_{t\to\gamma}\, F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}$ решения задачи (1)-(3) в окрестности точки поворота.

Выделение зон аналитичности основано на априорных оценках образа Фурье-Лапласа решения задачи (1)-(3). Полученные оценки поведения при $t \to \infty$ являются точными, что подтверждается в случае $a(x_3) \equiv const$.

Введем необходимое функциональное пространство.

Определение. Пусть $\delta > 0$.Функция $u(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$ принадлежит пространству $H^{+}_{2,1,\delta} = \left\{ u|\, u(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t) \cdot \exp\left[\delta t\right] \in L_2(R^4_{++}) \right\}$ с нормой

$$\|u\|_{\,2,1,\delta} = \|u \exp\left[\delta t\right]\| + \left\| \frac{\partial\, u}{\partial\, t} \exp\left[\delta t\right] \right\| + \sum_{j=1}^{3} \left\| \frac{\partial^{\,2}\, u}{\partial^{\,2}\, x_j} \exp\left[\delta t\right] \right\|,$$

где $\|\cdot\|$ — норма $L_2(R^4_{++})$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть $g(x,t) \in H^{+}_{2,1,\delta}$, а $v(x_1,x_2,x_3,t)$ — решение задачи (1)-(3), тогда справедлива следующая оценка: $|v(x_1,x_2,x_3,t)| \leqslant c \cdot t^{-\frac{3}{2}}$.

О ПЛАНИРОВАНИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Глушко Е.Г., Дубровская А.П., Провоторова Е.Н.
(Воронеж)

Важнейшим условием продуктивности как аудиторных так и внеаудиторных занятий является уровень культуры умственного труда студентов, психологическая и практическая готовность к самостоятельной работе к вузе и наличие умений и навыков к ней. Поэтому задача формирования у студентов умений овладевать знаниями и методами обучения становится доминирующей в организации учебно-воспитательного процесса. Одной из составных частей этого процесса является самостоятельная работа, эффективность которой определяется в большей мере степенью ее организации. Если рассматривать организацию самостоятельной работы как отдельную систему, то все основные ее элементы могут быть представлены следующими подсистемами:

1) планирование; 2) контроль; 3) анализ.

Подсистема планирования определяет последовательность и непрерывность в изучении математических дисциплин и решает задачу распределения затрат времени студентом на все виды учебной работы с учетом их трудоемкости. Подсистема контроля обеспечивает ритмичность работы студентов в процессе обучения и содержит контрольные мероприятия, включающие контрольные работы, коллоквиумы, типовые расчеты, курсовые работы, отчеты по темам, вынесенным на самостоятельное изучение, зачеты, экзамены. Структура и содержание контрольных мероприятий дает возможность студентам поэтапно, планомерно, непрерывно организовать процесс обучения, что является обязательным условием достижения высокого качества знаний.

Для обеспечения эффективного руководства самостоятельной работой студентов нами разрабатываются методические указания, представляющие собой планы-графики по каждой математической дисциплине по каждому семестру отдельно и всего курса в целом. Структура их следующая:

1. Содержание требований к уровню усвоения дисциплины и умений студентов.

2. Объем всего курса, соотношение лекционных и практических занятий, количество часов по видам, выделяемых на самостоятельную работу.

3. Программа лекционных и практических занятий.

4. Тематика курсовых работ с указанием основных источников.

5. Перечень тем, выносимых на самостоятельное изучение с указанием их места в общем курсе.

6. Перечень контрольных мероприятий, тематику, последовательность и сроки их проведения.

7. Учебно-методический комплекс, включающий учебную и методическую литературу, вопросы для подготовки к коллоквиумам, экзаменам, зачетам, а также образцы заданий к контрольным мероприятиям.

Корректируя планы-графики, мы стремимся определить и рекомендовать студентам оптимальные условия самостоятельного изучения математических дисциплин, что позволяет интенсифицировать внеаудиторную работу, сделать ее наиболее организованной и продуктивной.

ДИНАМИКА НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ТРЕХ БЛИЗКИХ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Глызин С.Д. (Ярославль)
glyzin@uniyar.ac.ru

Рассмотрим модель однонаправленного взаимодействия трех близких осцилляторов

$$\begin{aligned} &\ddot{u}_j + \varepsilon \dot{u}_j + u_j + \varphi(Ku_j) - \nu\varphi'(Ku_j)\varphi(Ku_{j-1}) = 0, \\ &j = 1, 2, 3, \ u_0 = u_3, \end{aligned} \tag{1}$$

часто встречающуюся в радиофизических приложениях. Здесь $u_j(t)$ – скалярная функция, пропорциональная напряжению в цепи j-го осциллятора, $0 < \varepsilon << 1$ – параметр, определяющий потери, $K > 0$ – коэффициент усиления, наконец, параметр $\nu = \nu_0\varepsilon$ отвечает за глубину связи между осцилляторами. Достаточно гладкая функция $\varphi(z)$ представляет собой характеристику нелинейного элемента цепи, которую ниже будем считать равной $\dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$. При $\varepsilon = 0$ линейная часть системы (1) имеет в спектре устойчивости пару чисто мнимых собственных чисел $\pm i\sqrt{1+K}$ кратности три, что позволяет построить для изучения локальной динамики этой системы следующую нормальную форму:

$$\begin{aligned} &\dot{p}_1 = -p_1/2 + \gamma p_3 \sin\alpha_1, \quad \dot{p}_2 = -p_2/2 + \gamma p_1 \sin\alpha_2, \\ &\dot{p}_3 = -p_3/2 - \gamma p_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \\ &\dot{\alpha}_1 = \gamma\left[(p_3/p_1)\cos\alpha_1 - (p_2/p_3)\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right] + p_1^2 - p_3^2, \\ &\dot{\alpha}_2 = \gamma\left[(p_1/p_2)\cos\alpha_2 - (p_3/p_1)\cos\alpha_1\right] + p_2^2 - p_1^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $p_j(t)$ – нормированные амплитуды осцилляторов, а $\alpha_j(t)$ – разности фаз между ними. Величина γ определяется параметрами системы (1) и пропорциональна ν_0. Качественный анализ системы (2) позволяет показать, что при $|\gamma| - 1/\sqrt{3} << 1$ в ее фазовом пространстве бифурцирует орбитно асимптотически устойчивый цикл. Более того, при $\gamma < -1/\sqrt{3}$ наряду с этим циклом у системы (2) сосуществуют несколько различных устойчивых режимов с узкими областями притяжения, некоторые из которых сохраняются и при меньших значениях γ. Применение численных методов позволяет показать наличие у данной системы сложной динамики и проследить за некоторыми ее фазовыми перестройками. Вычисление старшего ляпуновского показателя аттракторов (2) дает возможность выделить области существования хаотических колебаний.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ МАТРИЦ BIF-РАСКЛАДОВ НА $\mathbb{R}^n_+$

Гнездилов А.В. (Воронеж)

В [1] для нахождения допустимых $bif-$раскладов критических орбит, гладкого фредгольмова функционала V с n-круговой симметрией на банаховом многообразии $\mathcal{M}$, была использована схема $(\star)$ редуцирующих переходов $V(x,\lambda), x \in \mathcal{M} \rhd W(\xi,\, \lambda),\; \xi \in \mathbb{R}^{2n} \rhd \tilde{W}(r,\, \lambda),\, r \in \mathbb{R}^n \rhd \hat{W}(\rho,\, \delta) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(\delta)\rho_j + \sum_{j,k=1}^n a_{j,k}\rho_j\rho_k$, $\rho \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha_j(0) = 0$, и получен при $n = 3$ полный список матриц $\mathbf{M} = (m_{j,i})_{j,i=0}^{n-1} = (l_i^j)$ допустимых $bif-$раскладов критических торов , где l_i^j — количество критических $(j+1)-$мерных торов индекса Морса i. $Bif-$расклады условно критических точек функции $\hat{W}$ на симплектическом конусе $\mathbb{R}^n_+$ также можно описывать с помощью матриц $\hat{\mathbf{M}} = (\hat{m}_{j,i})_{j,i=0}^n = (l_i^j)$, где l_i^j — количество усл. критических точек ρ индекса i, для которых $\operatorname{card} supp(\rho) = j$. Согласно схеме $(\star)$ из списка матриц $\mathbf{M}$, легко восстанавливается список $\hat{\mathbf{M}}$ при $n = 3$. Еще раньше в [2] была описана общая структура каустик Σ многомерных полурегулярных угловых особенностей и в ряде случаев — распределения бифурцирующих невырожденных точек локального минимума по граням $\mathbb{R}^n_+$. При $n \geqslant 4$ — полного описания пока нет. Существенно сократить список допустимых для $\hat{W}$ на $\mathbb{R}^n_+$ $bif-$раскладов позволяет следующая теорема.

Теорема. *Пусть для функции $\hat{W}$ из схемы $(\star)$: 1) $rk\left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial \lambda_i}\right) = n$; 2) $\det{(a_{j,k})_{j,k=1}^p} \neq 0 \;\; \forall p \in \mathbb{N} : p \leqslant n$; 3) $\sum_{j,k=1}^n a_{j,k}\rho_j\rho_k > 0$ при $\rho_j \geqslant 0 \;\; \forall j$ и $\|\rho\| > 0$. Тогда при $\delta \notin \Sigma$ для $\hat{W}$ допускаются только те $bif-$расклады усл. критических точек на $\mathbb{R}^n_+$, у матриц $\hat{\mathbf{M}}$ которых: 1) $\hat{m}_{0,0} = 0$; 2) $\hat{m}_{j,n} = 0\,\forall\, j = \overline{1,\, n}$; 3) $\sum_{i=0}^n \hat{m}_{0,i} = 1$; 4) $\sum_{i=0}^n \hat{m}_{j,i} \leqslant C_n^j = \frac{n!}{j!\,(n-j)!} \;\; \forall j = \overline{0,\, n}$; 5) $\hat{\mathbf{I}} = \langle \hat{\mathbf{M}}\overline{\gamma}, \overline{\varsigma}\rangle_{\mathbb{E}^{n+1}} = 1$, где $\overline{\gamma} = (1,-1,1,\ldots,(-1)^n)^\top$, $\overline{\varsigma} = (1,2,4,\ldots,2^n)^\top$.* Здесь $\hat{\mathbf{I}}$ — обобщенное эйлерово число для матриц $bif-$раскладов условно критических точек на $\mathbb{R}^n_+$, введенное аналогично с $\boldsymbol{l}$, введенным в [1].

Литература

1. *Гнездилов А.В.* Бифуркации критических торов для функци-

оналов с 3-круговой симметрией // Функц. анализ и его прил. 2000. Т. 34, вып.1. С. 83-86.

2. *Сапронов Ю.И.* Полурегулярные угловые особенности гладких функций.// Матем. сборник. 1989. Т.180, № 10. С.1299-1310.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИНГУЛЯРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ КОНСОЛИ

Голованева Ф.В. (Воронеж), Обласова И.Н.

Классическая консоль определяется уравнением

$$(pu'')'' = f \quad (0 < x < l) \tag{1}$$

Здесь $u(x)$ — отклонение упругой линии и f — интенсивность внешней нагрузки, в сочетании с условиями защемления левого конца

$$u(0) = 0, u'(0) = 0. \tag{2}$$

На правом конце принудительные условия отсутствуют, а условия свободного конца имеют вид

$$u''(l) = 0, u^{(3)}(l) = 0. \tag{3}$$

Если стержень упруго закрепить в какой-либо промежуточной точке $x = \xi$, то перерезывающая сила в точке $x = \xi$ имеет скачок

$$(pu'')'(\xi + 0) - (pu'')'(\xi - 0) = -\gamma u(\xi), \tag{4}$$

где γ — коэффициент упругости опоры. Однако последнее обстоятельство лишает в точке $x = \xi$ смысла исходное уравнение, превращая его в два — одно слева от ξ, а второе — справа. Возникает естественный вопрос — существует ли для данного цельного стержня единая на отрезке $[0, l]$ функция влияния? Вопрос обусловлен тем, что математическая формулировка описанной задачи не позволяет воспользоваться методами функции Грина стандартных краевых задач.

Исходя из вариационного подхода к определению функции влияния $K(x, s)$, мы определяем ее как деформацию исходной системы при действии единичной в точке $x = s$ силы, что позволяет рассматривать $K(x,s)$ как минималь функционала потенциальной энергии

$$\Phi(u) = \gamma\frac{u^2(\xi)}{2} + \int\limits_0^l \frac{pu''^2}{2}dx - u(s)$$

при условиях (2) и (3). Заметим, что предельное (при $\gamma \to \infty$) закрепление в точке ξ означает фиксацию этой точки неподвижным шарниром.

Подход, описанный выше, позволяет дать описание функции влияния, адекватное физическим представлением, и достаточно полно изучить наиболее важные ее свойства, например, установить ее положительность при достаточно малом γ.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕТЕЙ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Головко Н.И. (Владивосток), Катрахова А.А. (Воронеж), Рыжков Д.Е. (Владивосток)

ygolovko@yahoo.com

Развитие вычислительной техники и средств передачи информации привело к возникновению сетей ЭВМ, сетей передачи информации. В настоящее время активно проводятся исследования по проектированию и анализу функционирования таких сетей. В силу специфики потока сообщений на узлах локальных компьютерных сетей системы массового обслуживания (СМО) со скачкообразной интенсивностью входного потока удобно использовать при моделировании таких узлов.

Скачкообразный характер входного потока возникает в силу следующих причин: изменение маршрутов сообщений, в силу чего на элементе сети возникают и исчезают потоки сообщений; выход из строя отдельных элементов сети и их блокировка, что приводит к исчезновению потоков сообщений на последующих элементах сети. В реальных узлах сети обслуживание происходит по экспоненциальному закону, так как сообщения обрабатываются с постоянной скоростью, а длина сообщений является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону из-за того, что сумма длительности обслуживания на одном временном интервале не зависит от суммы длительностей обслуживания на других интервалах.

Рассматривается СМО с одним обслуживающим прибором с экспоненциальным обслуживанием с интенсивностью μ и бесконечным накопителем. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой скачкообразный процесс, принимающий значения на конечном интервале $[a, b]$, интервалы постоянства $\lambda(t)$ экспоненциально распределены с параметром α, значения процесса справа в точках разрыва имеют плотность распределения $\varphi(x)$. Обозначим через ν число заявок в СМО в стационарном режиме, а через $q_k(x) = \mathsf{P}\{\nu = k,\ x < \lambda < x + dx\}/dx$ соответствующие стационарные характеристики числа заявок. Стационарные характеристики числа заявок удовлетворяют бесконечной системе разностно- интегральных уравнений типа Колмогорова-Чепмена:

$$-(x+\alpha)q_0(x) + \mu q_1(x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b q_0(y)\,dy = 0,$$

$$xq_{k-1}(x) - (x+\mu+\alpha)q_k(x) + \mu q_{k+1}(x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b q_k(y)\,dy = 0,\ k \geqslant 1,$$

с условием нормировки $\sum_{k\geqslant 0} q_k(x) = \varphi(x)$. Для решения бесконечной системы интегральных уравнений авторами предложен новый метод, в котором на первом этапе с учетом условия нормировки производится переход к неоднородной системе интегральных уравнений путем введения новых неизвестных функций $r_k(x) = \sum_{n\geqslant k} q_n(x)$, затем к новой бесконечной системе интегральных уравнений применяется метод производящих функций, затем для нахождения неизвестных функций применяется обратное преобразование Лорана. В итоге получено явное представление неизвестных функций через $r_1(x)$, а для неизвестной функции получено неоднородное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. В работе приводятся теоремы существования и единственности приведенной системы интегральных уравнений при условии отсутствия перегрузок в СМО: $b < \mu$.

Литература

1. Головко Н.И., Коротаев И.А.Системы массового обслуживания со случайно изменяющейся интенсивностью входящего потока //Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 7. – С. 80–85.

2. Головко Н.И., Филинова Н.А. Матричный анализ систем массового обслуживания с конечным накопителем при скачкообразной интенсивности входного потока // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №9. – С. 73–83.

3. Головко Н.И., Катрахов В.В. Анализ систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде. Владивосток:

Изд-во ДВГАЭУ, 2000. - 144 с.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

Голубева Н.Д. (Самара)
golubeva@samaramail.ru

Рассматривается задача о нахождении в области

$$D = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

регулярного решения уравнения Аллера

$$u_y = \big(A(x, y)u_x + B(x, y)u_{xy}\big)_x. \tag{1}$$

Это уравнение вместе с некоторыми дополнительными данными является математической моделью процесса влагопереноса [1]. Пусть задан поток

$$\big(A(x, y)u_x + B(x, y)u_{xy}\big)\big|_{x=0} = f(y), \tag{2}$$

и нелокальные условия

$$u(x, 0) + l(x)\int_0^b u(x, y)\,\mathrm{d}y = \varphi(x), \tag{3}$$

$$u(0, y) + \mu(y)\int_0^a u(x, y)\,\mathrm{d}x = \psi(y), \tag{4}$$

где $f(y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — заданные функции.

Нетрудно показать, что задача (1–4) может быть сведена к нелокальной задаче с условиями (3), (4) для нагруженного гиперболического уравнения второго порядка

$$B(x, y)u_{xy} + A(x, y)u_x = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^x u(\xi, y)\,\mathrm{d}\xi + f(y). \tag{5}$$

Подобные с другими нелокальными интегральными условиями задачи рассматривались в [2].

Литература

1*Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.

2. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения. // Математические заметки, 2001, т. 70, вып. 1, № 7, с. 88–95.

О МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Гордон В.А., Семёнова Г.А. (Орлов)

Исследуется влияние перекоса осевого отверстия в консольном стержне на спектр частот и на формы крутильных колебаний такого стержня.

Однако получение точных решений для уравнений, описывающих такие колебания, сопряжено с серьёзными трудностями и возможно лишь в частных случаях.

Классический подход к решению таких уравнений, заключающийся в отыскании базисных функций в виде бесконечных переменных рядов и определении частных решений методом произвольных постоянных, удаётся применить лишь к сравнительно узкому классу специальных уравнений второго и четвёртого порядка.

Нами предложен метод построения аналитических решений задач о собственных колебаниях стержней с произвольными законами изменения жёсткости и плотности вдоль оси стержня.

Решения опираются на модифицированный и адаптированный к задаче указанного типа аналитический метод интегрирования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Метод позволяет получить замкнутые решения в явном виде в элементарных функциях, что позволяет проводить дальнейшие исследования.

Для этого используется матричная форма записи дифференциальных уравнений и вводится преобразование переменных, позволяющее представить исходную матрицу в виде суммы диагональной матрицы с элементами, равными собственным числам исходной матрицы, и матрицы с одинаковыми диагональными элементами, при этом побочные элементы характеризуют связанность уравнений системы.

Такое преобразование позволяет построить первое приближение искомого решения, с помощью которого получается ряд из собственных функций, являющийся точным решением рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Кроме того, метод позволяет получить формулу для вычисления частот собственных колебаний.

Полученные данные в дальнейшем предполагается использовать для консольных стержней с дефектом отверстия, в частности, для расчётов динамических характеристик свободных колебаний орудийного ствола.

НЕЧЕТКИЕ РЕЛЯЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ: ПРИЛОЖЕНИЯ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Грибовский А.В. (Воронеж)
alex@amm.vsu.ru

Теория нечетких реляционных уравнений – один из разделов теории нечетких множеств. Она используется при построении экспертных систем, хранилищ знаний, в нечетком управлении.

Пусть A, R и B – нечеткие отношения, определенные на $X \times Y$, $Y \times Z$ и $X \times Z$ соответственно. Уравнение

$$A \circ R = B, \tag{1}$$

где отношение R подлежит нахождению, а $\circ$ – max-T композиция, определяемая как $A \circ R = max_{y \in Y}\{T(A(x, y), R(y, z))\}$, T – T-норма, называют нечетким реляционным уравнением.

Если множество решений уравнения (1) $R(A, B)$ не пусто, то оно имеет единственный максимальный элемент $\hat{R}$ и конечное число минимальных элементов $\check{R}(A, B)$. Полное множество решений определяется как $\bigcup_{\check{R} \in \check{R}(A,B)}\{R | \check{R} \leqslant R \leqslant \hat{R}\}$. При решении необходимо сначала, используя специальные теоремы о разрешимости, определить, является ли уравнение разрешимым. Если уравнение разрешимо, то его множество решений находится при помощи специальных методов (метод матричного шаблона, метод Г-матриц), иначе ищут приближенное решение при помощи нейросетевых методов (методы Ли-Руана). Поскольку данные методы работают для различных Т-норм, то для построения универсального решателя мы используем их комбинацию.

В системе Matlab была написана программа, которая решает уравнение (1) для любой непрерывной Т-нормы. Данная программа используется в приложении, решающем при помощи нечетких реляционных уравнений задачу анализа и выбора цели на поле боя.

Литература

1. Berrached A. Applying Fuzzy Relation Equations to Threat Analysis / A. Berrached, M. Beheshti //Proceedings of the 35th Hawaii International Conference on System Sciences – 2002. – P. 35-40.

2. Kandasamy V. Fuzzy Relational Maps and Neutrosophic Relational Maps/V.Kandasamy. – Church Rock: Hexis, 2004.

3. Zimmermann H.-J. Fuzzy Set Theory – and its Application / H.-J. Zimmermann. – Boston: Kluwer, 1996.

ПРОБЛЕМА УСЛОВНОЙ ПРИВОДИМОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНО ГАМИЛЬТОНОВЫХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ[1]

Гриднева И.В. (Воронеж)

giv@kma.vsu.ru

Исследованию задачи условной приводимости гамильтоновых оператор-функций к блочно-диагональному виду посвящены работы [1]-[2]. Полученные в этих работах результаты для неотрицательно гамильтоновых операторнозначных функций со значениями во множестве ограниченных операторовмы мы обобщаем на случай замкнутых неограниченных гамильтонианов. Первым шагом в этом направлении стало рассмотрение оператор-функций $\mathfrak{A}(t)$ с $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathfrak{A}(t)$ вида $\mathfrak{A}(t) = S_0 + \mathfrak{B}(t)$, где $t \in [0,1]$. В этом представлении S_0 — некоторый неограниченный гамильтониан, а $\mathfrak{B}(t)$ — неотрицательно гамильтонова непрерывная оператор-функция со значениями во множестве ограниченных операторов.

Доказывается, что если комплексное гильбертово пространство $\mathcal{H}$, являющееся ортогональной суммой двух экземпляров одного и того же гильбертова пространства $\mathcal{G}$: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{G}$ разлагается в прямую сумму максимальных семидефинитных инвариантных относительно $\mathfrak{A}(t)$ подпространств $\mathcal{L}_\pm(t)$, то оператор-функция $\mathfrak{A}(t)$ условно $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$-приводима, т.е. существует такая непрерывная и непрерывно обратимая оператор-функция $V(t)$, что $\mathfrak{A}_1(t) = V^{-1}(t)\mathfrak{A}(t)V(t)$ – блочно-диагональная матрица:

$$\mathfrak{A}_1(t) = \operatorname{diag}\{\mathfrak{A}_{1,+}(t), \mathfrak{A}_{1,-}(t)\}, \operatorname{Re}\sigma(\mathfrak{A}_{1,+}(t)) > 0, \operatorname{Re}\sigma(\mathfrak{A}_{1,-}(t)) < 0.$$

Заметим, что сформулированное выше условие существования максимальных семидефинитных инвариантных подпространств выполняется, например для случая $\mathcal{L}_\pm(t) = P_\pm(t)\mathcal{H}$, где $P_\pm(t)$ - проекторнозначные функции вида $P_\pm(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^\pm} \frac{\mathfrak{A}(t)(\mathfrak{A}(t)-\lambda)^{-1}}{\lambda} d\lambda$. Эти функции являются непрерывными для $t \in [0,1]$, если резольвента оператора S_0 удовлетворяет неравенству $\|(S_0 - \lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{C}{1+|\lambda|}, \quad \lambda \in \rho(S_0)$.

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

Литература

1. Азизов Т.Я., Кириакиди В.К., Курина Г.А. // Функ. анализ и его прил. – 2001. – Т. 35, №3. – С. 73–75.

2. Azizov T.Ya., Kiriakidi V.K., Kurina G.A. // J. of Mathem. Physics. – 2001. – V. 8, № 4. – P. 414–421.

О ГЕНЕТИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В ПРЕПОДАВАНИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Давыдова М.Б., Покорная И.Ю. (Воронеж)

Ясная интуитивная опора, необходимая для осознанного усвоения математического анализа, невозможна без обсуждения неделимых, восходящих к древним грекам. Еще Демокрит был убежден, что любая протяженность состоит из конечного, хоть и очень большого числа неделимых атомов. И Архимед, говоря о неисчислимости песчинок, имел в виду, что их количество конечно, но что соответствующее число не может быть выговорено. А разве может свежий ум поверить, что существует n реальных объектов при любом n? Или что отрезок можно разделить на n частей при любом n? Поэтому понятие бесконечно малой величины, при этом переменной, принимаются студентами на веру без всякого рационального осознания.

В этой связи крайне полезно провести несколько рассуждений, когда метод Демокрита не может вызвать сомнений. Например, круг есть собрание радиусов. И что это (по Архимеду) позволяет методом неделимых явно найти формулу площади. А затем, подключив метод исчерпывания, пояснить, что предельный переход – источник формальной строгости. Именно здесь можно говорить о бесконечно малых, как переменных – не по природе, а по методу использования.

Словом, идея Демокрита-Лейбница может быть освоена на бытовом уровне в терминах "еле-еле" , "чуть-чуть" , "едва-едва" на ряде примеров (в том числе с касательной и треугольником Паскаля, т.е. с dx и dy), как источник формул, источник коренного знания, которым довольствовалось естествознание до конца XIX века. А предельный переход должен осваиваться, как более цивилизованный разговор, цель которого – избежать ошибки.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Данилкина О.Ю.
danola@mail.ru

Рассмотрим в области $Q_T = \{(x,t) : x \in (0,l), t \in (0,T)\}$ уравнение

$$u_t = u_{xx} + p(t)u + f(x,t), \tag{1}$$

где $p(t)$ – неизвестный коэффициент.
Поставим для уравнения (1) задачу с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

граничными условиями

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \tag{3}$$

и интегральным условием переопределения

$$\int_0^l K(x,t)u(x,t)\,dx = E(t), \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

Введем новую функцию $v(x,t) = u(x,t)exp\left(\int_0^t p(\eta)\,d\eta\right)$.
Это позволяет перейти к следующей линейной задаче:

$$v_t = v_{xx} + q(t)f(x,t),$$

$$v(x,0) = \varphi(x),$$

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0,$$

$$\int_0^l K(x,t)v(x,t)\,dx = E(t)q(t),$$

где $q(t) = exp\left(\int_0^t p(\eta)\,d\eta\right)$.
Доказано следующее утверждение:
Теорема. *Пусть выполняются условия:*

$$f(x,t),\ K(x,t) \in L_2(Q_T),\ \varphi(x) \in L_2(0,l),\ E(t) \in L_2(0,T),$$

$$|E(t)| \leqslant E_1\, п.в.\ в(0,T).$$

Тогда существует решение $\{u(x,t),\ p(t)\}$ обратной задачи (1)–(4), где $u(x,t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$, $p(t) \in L_2(Q_T)$.

ТЕОРЕМА ЮНГА-О'НЕЙЛА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА L_{pq*}

Дарбаева Д.К., Нурсултанов Е.Д. (Казахстан, Астана)

er-nurs@yandex.ru

Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ -измеримая функция, определенная в евклидовом пространстве R^n. Через $f^*(t) = f^{*_1,\dots,*_n}(t_1, ..., t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки последовательно по переменным $x_1, ..., x_n$ при фиксированных других переменных. Данную функцию будем называть невозрастающей перестановкой функции f в R^n.

Пусть $1 \leqslant p = (p_1, ...p_n), q = (q_1, ..., q_n) \leqslant \infty$, $* = (j_1, ..., j_n)$.

Анизотропное пространство $L_{pq*}(R^n)$[1] определяется следующим образом:

$$L_{pq*}(R^n) = \Bigg\{ f : \|f\|_{L_{pq*}} =$$

$$= \left(\int_0^\infty ... \left(\int_0^\infty \left(f^{*_1,\dots,*_n}(t_1, ..., t_n) t_1^{\frac{1}{p_1}} ... t_n^{\frac{1}{p_n}} \right)^{q_{j_1}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \; \frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}} \right)^{\frac{q_{j_2}}{q_{j_1}}} ... \frac{dt_{j_n}}{t_{j_n}} \right)^{\frac{1}{q_{j_n}}} < \infty \Bigg\}.$$

В случае $q = \infty$ выражение $\int_0^\infty (G(t))^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}}$ понимается, как $sup_{t>0} G(t)$.

Хорошо известно неравенство Юнга-О'Нейла для пространств Лоренца.

Теорема 1.(О'Нейла)Пусть $1 \leqslant p, q, r < \infty$, $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$, тогда для оператора свертки

$$Af(x) = \int_{R_n} f(x) K(y - x) dx$$

имеет место

$$\|A\|_{L_p \to L_q} \leqslant c \|K\|_{L_{r\infty}}.$$

Теорема 2.Пусть $1 < \mathbf{p} = (\mathbf{p_1}, ...\mathbf{p_n}), \mathbf{q} = (\mathbf{q_1}, ...\mathbf{q_n}), \mathbf{r} = (\mathbf{r_1}, ...\mathbf{r_n}) < \infty$. $1 \leqslant \mathbf{s} = (\mathbf{s_1}, ..., \mathbf{s_n}) \leqslant \infty$, $\frac{1}{q_i} + 1 = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{r_i}, i = (1, .., n)$. Тогда

$$\|A\|_{L_{\mathbf{ps}*} \to L_{\mathbf{qs}*}} \leqslant c \|K\|_{L_{\mathbf{r}\infty*}}.$$

Теорема 2 является не только обобщением теоремы О'Нейла, но и усилением ее.

Существует пример ядра K, когда $\|K\|_{L_{r\infty}} = \infty$, но $\|K\|_{L_{r\infty *}} < \infty$.

Литература

1.Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения.//Доклады РАН. 2004. Т.394. N1. С.1-4.

СУЩЕСТВОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Денисов М.С. (Воронеж)

den_i_sov@rambler.ru

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, где $x, y \in H$.
$A : H \to H$ — линейный, непрерывный, самосопряженный и неотрицательный оператор.
$G : H \to H$ — линейный, непрерывный, самосопряженный оператор и $0 \in \sigma_c(G)$.
Рассмотрим полуторалинейную форму $[x, y] := (Gx, y)$,где $x, y \in H$. Гильбертово пространство H с таким образом введенной на нем формой $[x, y]$ будет называться сингулярным G — пространством. Оператор AG будет самосопряженным относительно формы $[x, y]$, или G — самосопряженным, см. [1]. В работе исследуется вопрос существования спектральной функции у G — самосопряженного оператора AG в сингулярном G — пространстве.

Литература

[1] Азизов Т.Я, Иохвидов И.С. Теория операторов в пространстве с индефинитной метрикой.- М.: Наука, 1986.

О СПИНОРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОПЕРАТОРА УДВОЕНИЯ

Дмитриев А.А. (Владивосток)

dmitriev@iacp.dvo.ru

В заметке рассматривается представление оператора удвоения в группу вращений, играющего важную роль в задачах теоретической физики и теории вейвлетов.

[1] Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

Оператор удвоения можно определить, используя тензорные произведения и пермутатор

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{2}(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}+\boldsymbol{\sigma}_1\otimes\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2\otimes\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{\sigma}_3\otimes\boldsymbol{\sigma}_3)=-i\exp\Big\{i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{P}\Big\},$$

где $\boldsymbol{\sigma}_j$, $j=1,2,3$ — хорошо известные матрицы Паули, следующим образом. Пусть $\boldsymbol{P}_{n,N}=\mathbf{1}^{\otimes(n-1)}\otimes\boldsymbol{P}\otimes\mathbf{1}^{\otimes(N-n-1)}$, $n=1,\dots,N-1$, тогда оператор удвоения $\boldsymbol{P}_N=\prod\limits_{n=1}^{N-1}\boldsymbol{P}_{n,N}$.

Для стандартных образующих алгебры Клиффорда их попарные произведения $\boldsymbol{\omega}_{j,k}$ соответствуют вращению в плоскости $(j;k)$ пространства $\mathbb{C}^{2N}$ (см. напр. [1]) при этом оператор $\boldsymbol{P}_{n,N}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{n,N}=-e^{i\frac{\pi}{4}}\exp\Big\{\frac{\pi}{4}(\boldsymbol{\omega}_{2n,2n+1}-\boldsymbol{\omega}_{2n-1,2n+2})\Big\}\times\\ \times\exp\Big\{-i\frac{\pi}{4}\boldsymbol{\omega}_{2n-1,2n}\boldsymbol{\omega}_{2n+1,2n+2}\Big\}\stackrel{\text{def}}{=}-e^{i\frac{\pi}{4}}\boldsymbol{R}_n\exp\Big\{-i\frac{\pi}{4}\boldsymbol{\omega}_n\boldsymbol{\omega}_{n+1}\Big\}.\end{aligned}$$

Тогда при четном N для $\boldsymbol{P}_N$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_N=&(-i)^{N/2}\prod_{n=1}^{N-1}\boldsymbol{R}_n\exp\Big\{-\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\omega}_n\Big\}\Big(\boldsymbol{\omega}_C^{+}+i\boldsymbol{\omega}_C^{-}\exp\Big\{\frac{\pi}{2}\boldsymbol{\omega}_N\Big\}\Big)=\\ =&(-i)^{N/2}\exp\Big\{-\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{\omega}_n\Big\}\prod_{n=1}^{N-1}\boldsymbol{R}_n\Big(\boldsymbol{\omega}_C^{+}+i\boldsymbol{\omega}_C^{-}\exp\Big\{\frac{\pi}{2}\boldsymbol{\omega}_1\Big\}\Big),\end{aligned}$$

где через $\boldsymbol{\omega}_C{}^{\pm}$ обозначены проекторы $\frac{1}{2}\Big(\mathbf{1}\pm\exp\Big\{-\frac{\pi}{2}\sum\limits_{n=1}^{N}\boldsymbol{\omega}_n\Big\}\Big)$.

Используя полученные равенства несложно вычислить представление $\boldsymbol{P}_N$ в группе вращений $\mathbf{SO}(2N,\mathbb{C})$ и тем самым свести вычисление спектра оператора $\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{P}_N$ для $\boldsymbol{\Omega}\in\mathbf{Spin}(2N,\mathbb{C})$, к вычислению спектра двух операторов вращения в пространстве $\mathbb{C}^{2N}$.

Литература

1. Жлобенко Д.П., Штерн А.И. Представления групп Ли М.: Наука, 1983 г.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ СПЕКТРЫ В ЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ МОДЕЛЯХ МЕХАНИКИ ВЫСОКОМОЛЕКУЛЯРНЫХ ВЕЩЕСТВ

Дубовицкий В.А. (Черноголовка)
dubv@icp.ac.ru

При математическом описании механического поведения полимерных материалов используются представления о движении легких упруго связанных частиц в вязкой среде [1]. В линейном приближении это приводит к задаче Коши

$$\tau\dot{x}(t) = Ax, \quad x(0) = x^0, \quad t \geqslant 0$$

Здесь $x(t) \in X$, где X гильбертово пространство, а τ, A самосопряженные операторы, причем τ обратим и положительно определен, A отрицательно полуопределен и, вообще говоря, неограничен. В уравнении произведение $\tau\dot{x}$ имеет смысл силы трения, а оператор A есть антиградиент квадратичного функционала $U(x) = -(Ax, x)/2$ энергии упругих связей. Если пространство X конечномерно, то уравнение обобщает модель Рауза [1] движения линейной молекулярной цепи, а случай $X = W_2^2[0,1], A = \Delta$ соответствует континуальной вязкоупругой модели движения полимера. Целью работы является вычисление и характеризация экспоненциальных разложений $F(x(t)) = \int exp(t\lambda)g(d\lambda)$, где $F(x)$ - заданный целевой функционал состояния, а мера Радона $g(d\lambda)$ есть т.н. релаксационный спектр (РС). На практике особо интересны линейные и квадратичные целевые функционалы, выражающие механические напряжения, размер, энергию, а также критерии неотрицательности соответствующего РС.

Теорема. Пусть $\tau^{-1/2}A\tau^{-1/2} = \int_{-\infty}^{0} \lambda E(d\lambda)$ есть интегральное спектральное представление самосопряженного оператора по операторной мере коммутирующих ортопроекторов. Тогда в случае линейного целевого функционала $F(x) = (x, l)$ имеем для РС представление $g(d\lambda) = (\tau^{1/2}E(d\lambda)\tau^{-1/2}l, x^0)$, а в случае $F(x) = U(x)$,соответственно, $g(d\lambda) = -\lambda(\tau^{1/2}E(d\lambda/2)\tau^{1/2}x^0, x^0)/2$.

Из теоремы следует, что РС энергии неотрицателен при любых начальных условиях, т.е. функция диссипации потенциальной энергии абсолютно монотонна по времени. А позитивность РС линейной целевой функции равносильна принадлежности x^0 некоторому выпуклому конусу $K \subset X$. Работа выполнена при поддержке РФ-

ФИ и Министерства промышленности и науки Московской области (р2004наукоград а N 04-01-97202).

Литература

[1] М.Дои, С.Эдвардс. Динамическая теория полимеров. М.: Мир, 1998.

О ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Думачев В.Н. (Воронеж)

dumv@comch.ru

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение как подмногообразие Σ в расслоении джетов $J^n(\pi)$: $E \to M$, определяемое уравнениями $F(x, y, p_{00}, p_{10}, p_{01}, p_{20}, p_{11}, p_{02}) = 0$, где $x, y \in M \subset R$, $u = p_0 \in U \subset R$, $p_i \in J^i(\pi) \subset R^n$, $E = M \times U$. Как и любое дифференциальное уравнение оно описывает струю в пространстве джетов $J^1(2,1)$, с локальными координатами $(x, y, u, u_x, u_y, u_{yy})$, где расширение расслоения до вторых производных (u_{ww}) является следствием корреляционых соотношений для средних Винеровского процесса: $< dy >= 0$, $< dy^2 >=< dx >$. Последние соотношения позволяют ввести распределение Картана для СДУ в виде

$$\theta = du - \left(u_x + \frac{1}{2}u_{yy}\right)dx - u_y dy.$$

Поскольку 2-форма $d\theta \neq \omega \wedge \theta$ - по теореме Фробениуса распределение не интегрируемо. Несмотря на особенности, переплетающие независимые переменные, данное распределение $J^k(\pi)$ допускает существование полей Ли и их поднятие в $J^{k+1}(\pi)$. Геометрическая постановка задачи вариационного исчисления

$$v \rfloor d\left(Ldx \wedge dy + \Lambda \wedge \theta\right) = 0$$

предполагает использование распределения Картана в качестве неголономной связи и введения дифференциальной 1-формы импульса $\Lambda = \lambda dx + \mu dy$ как множителя Лагранжа. Используя в качестве векторных полей $v = \partial_\theta$, $v = \partial_{u_x}$, $v = \partial_{u_y}$ получим систему:

$$\begin{aligned} &L_u dx \wedge dy = -d\lambda \wedge dx - d\mu \wedge dy, \\ &\lambda = L_{u_y}, \qquad \mu = -\frac{L_{u_y}}{1 + \frac{1}{2}\frac{du_{yy}}{du_x}}, \end{aligned}$$

из которой следуют уравнения Эйлера-Лагранжа поставленной вариационной задачи:

$$L_u = \frac{d}{dx}\left(\frac{L_{u_x}}{1+\frac{1}{2}\frac{du_{yy}}{du_x}}\right) + \frac{d}{dy}\left(L_{u_y}\right).$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

Евдокимович В.Е. (Гомель)
evdokimovich@gsu.unibel.by

Одним из важнейших элементов образовательного процесса в ВУЗах, являются: а) контроль студентов, осуществляемый преподавателями; б) самоконтроль знаний, позволяющий студентам лучше оценивать свои потенциальные возможности и недостатки, и, следовательно, более четко представлять те направления, в которых им необходимо направить свои усилия для лучшего овладения той или иной дисциплиной. Традиционно, контроль знаний осуществляется путем проведения контрольных и лабораторных работ, коллоквиумов и т.п. Однако уже сейчас существует, и в отдельных ВУЗах Республики Беларусь используется (в частности в Белорусском государственном университете транспорта), такая форма контроля и самоконтроля, которая позволяет избежать недостатков, характерных для вышеперечисленных методов. Это компьютерное тестирование. Его суть заключается в существовании компьютерных программ, позволяющих проводить тестирование студентов как за весь курс, той или иной дисциплины, так и по отдельным ее разделам. Результатом такого тестирования является оценка, показывающая тестируемому в баллах, на сколько хорошо он владеет предметом. Низкий балл свидетельствует о недостаточной подготовленности студента. Высокий же, наоборот, позволяет судить о том, что студент хорошо разбирается в данном предмете. Такая форма контроля позволяет преподавателю достаточно быстро и без особых сложностей проводить проверку уровня знаний большого числа студентов. Быстрота и легкость проведения тестирования дают возможность более частого контроля и как результат, более ясное представление преподавателю об уровне знаний студентов. Тестирование также можно рассматривать и как форму проведения зачета, или же рассматривать его результат, как форму допуска к сдаче экзамена. Еще одним плюсом компьютерного тестирования является то, что студент может проводить его самостоятельно, без участия преподавателя. Конечно же, как и любая другая форма контроля, компьютерное тестирование не лишено ряда недостатков. Однако те положительные элементы, которые несет в себе компьютерное тестирование, позволяют надеяться, что такая форма контроля и самоконтроля будет все активнее внедряться в учебные процессы различных ВУЗов Республики Беларусь.

ОЦЕНКИ МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Ежак С.С. (Москва)

SEzhak@teach.mesi.ru

Рассматривается следующая задача:

$$y''(x) + Q(x)y(x) + \lambda y(x) = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где $Q(x)$ — неотрицательная ограниченная на $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_0^1 Q^\alpha(x)dx = 1, \quad \alpha \neq 0. \tag{3}$$

Рассмотрим функционал

$$R[Q,y] = \frac{\int_0^1 y'^2(x)dx - \int_0^1 Q(x)y^2(x)dx}{\int_0^1 y^2(x)dx}.$$

Тогда $\lambda_1 = \inf_{y(x)\in H_0^1(0,1)} R[Q,y]$. Пусть $m_\alpha = \inf_{Q(x)\in A_\alpha} \lambda_1$, $M_\alpha = \sup_{Q(x)\in A_\alpha} \lambda_1$, где A_α — множество неотрицательных ограниченных на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих (3).

Т е о р е м а. *Если $\alpha > 1$, то $m_\alpha \geqslant \frac{\pi^2}{2}$, $M_\alpha = \pi^2$, причем существуют такие функции $u(x) \in H_0^1(0,1)$ и $Q(x) \in A_\alpha$, что $\inf_{y(x)\in H_0^1(0,1)} R[Q,y] = R[Q,u] = m_\alpha$. Если $\alpha = 1$, то m_1 есть принадлежащее интервалу $(0,\pi^2)$ решение уравнения $2\sqrt{\lambda} = \mathrm{tg}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)$, $M_1 = \pi^2$, причем m_1 достигается на функции $Q(x) = \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$, не принадлежащей классу $H_0^1(0,1)$.*

Если $1/2 \leqslant \alpha < 1$, *то* $m_\alpha = -\infty$, $M_\alpha = \pi^2$. *Если* $1/3 \leqslant \alpha < 1/2$, *то* $m_\alpha = -\infty$, $M_\alpha \leqslant \pi^2$. *Если* $0 < \alpha < 1/3$, *то* $m_\alpha = -\infty$, $M_\alpha < \pi^2$. *Если* $\alpha < 0$, *то* $m_\alpha = -\infty$, $M_\alpha < \pi^2$, *причем существуют такие функции* $u(x) \in H_0^1(0,1)$ *и* $Q(x) \in A_\alpha$, *что* $\inf_{y(x)\in H_0^1(0,1)} R[Q,y] = R[Q,u] = M_\alpha$.

Замечание 1. $m_\alpha = m$ *при* $\alpha > 1$ *и* $M_\alpha = m$ *при* $\alpha < 0$, *где* m *является решением системы уравнений*

$$\begin{cases} \int_0^H \frac{du}{\sqrt{mH^2 - mu^2 + \frac{2}{p}H^p - \frac{2}{p}u^p}} = \frac{1}{2}, \\ \int_0^H \frac{u^p\,du}{\sqrt{mH^2 - mu^2 + \frac{2}{p}H^p - \frac{2}{p}u^p}} = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $H = \max_{x\in[0,1]} u(x)$, $m = G[u] = \inf_{y(x)\in H_0^1(0,1)} G[y]$,
$G[y] = \frac{\int_0^1 y'^2(x)dx - \left(\int_0^1 |y(x)|^p dx\right)^{2/p}}{\int_0^1 y^2(x)dx}, \quad p = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$.

Замечание 2. *В работе* [2] *исследовалась задача* (1)–(3) *с отрицательным потенциалом* $Q(x)$.

Литература

[1] Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. On Spectral theory of elliptic operators // in Operator theory: Advances and Applications. Birkhouser, 1996, V.89, P. 1–325.

[2] Ежак С.С. // Дифференц. уравнения, 2004, Т.40, N 6, С. 856.

О РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ФУРЬЕ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Емгушева Г.П. (Элиста)
galina_emg@mail.ru

При изучении рядов Фурье от непрерывных функций естественно возникают вопросы: если ряд Фурье от непрерывной функции сходится равномерно, то будет ли он сходиться от квадрата, куба этой функции. Имеется пример непрерывной функции, ряд Фурье которой сходится равномерно, а квадрат этой функции расходится на множестве мощности континуума [1-2]. Здесь рассматривается случай куба от этой непрерывной функции.

Обозначим через S класс непрерывных функций, у которых ряд Фурье всюду сходится равномерно. Справедлива следующая теорема: существует функция $f(x)$ из класса S, для которой ряд Фурье от функции $f^3(x)$ расходится на множестве мощности континуума.

Функция имеет вид $f(x) = g(x)+\xi(x)$, где $g(x)$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, а $\xi(x)$ есть непрерывная функция с ограниченным изменением. Доказательство основано на факте, что частная сумма ряда Фурье от суммы двух функций может быть неограничена.

Литература

1. Салем Р. A singularity of the Fourier series of continuous functions. Duke Mathematical Journal, 10, 1943, p. 711-716.

2. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М., 1961.

К МОДЕЛИРОВАНИЮ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ ПРИ ТЕЧЕНИИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Еремин Д.В. (Воронеж)

teormech@vgta.vrn.ru

Рассмотрен теплоперенос с учетом диссипации механической энергии при одномерном установившемся течении вязкопластической жидкости Балкли-Гершеля в плоском канале.

Постановка задачи приведена в [1]. В основу математической модели были положены уравнения гидродинамики и конвективного теплопереноса для вязкой несжимаемой жидкости.

Область течения разбивалась на две зоны: вязкую и пластическую. При этом теплофизические характеристики среды принимались постоянными. На границах канала для скорости ставились граничные условия прилипания, а для температуры жидкости – условия первого рода. На границах вязкой и пластической зон течения ставились условия сшивания скоростей, температур и тепловых потоков.

Гидродинамическую часть задачи решали независимо от тепловой. Решение уравнения конвективного теплопереноса искали методом разделения переменных.

При такой постановке задачи с некоторыми дополнительными допущениями было получено аналитическое приближенное решение.

Это позволило с помощью ПЭВМ провести анализ влияния основных критериев подобия (чисел Рейнольдса, Прандтля, Эккерта, Эйлера и Бринкмана) на распределение температуры вязкопластической жидкости в плоском канале.

Литература

1. Колодежнов, В.Н. Учет влияния предельного напряжения сдвига в задачах диссипативного разогрева жидкости Балкли-Гершеля в плоских каналах [Текст] / В.Н. Колодежнов, Д.В. Еремин // Современные проблемы механики и прикладной математики: Сб. трудов междунар. школы-семинара. Часть 1. – Воронеж: ВГУ, 2005. – С. 169 – 171. – ISBN 5-9273-0900-3.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ФРОБЕНИУСА О ЕДИНСТВЕННОСТИ ТРОЕК МАРКОВА

Ермаков В.В. (Москва)

av31125@comtv.ru

Исследуя минимумы бинарных квадратичных форм, российский математик А. А. Марков [1] установил связь между числами дискретного спектра (получившего его имя) и решениями кубического уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ в натуральных числах. Все решения такого уравнения (так называемые тройки Маркова) получаются из очевидного решения $(1; 1; 1)$ с помощью преобразований $T_1 : (x; y; z) \to (3yz - x; y; z)$, $T_2 : (x; y; z) \to (x; 3xz - y; z)$, $T_3 : (x; y; z) \to (x; y; 3xy - z)$.

Фробениус [2] сформулировал проблему единственности: пусть $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ – две тройки Маркова, причем $x_1 \geqslant y_1 \geqslant z_1$, $x_2 \geqslant y_2 \geqslant z_2$. Тогда если $x_1 = x_2$, то $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

Получено геометрическое решение этой проблемы. Рассматривается действие группы преобразовний, свободно порожденной T_1, T_2, T_3, на вещественных точках поверхности Маркова. Построена фундаментальная область этой группы и описаны неподвижные точки преобразований. Показано, что две тройки Маркова с одинаковыми максимальными элементами являются образом решения $(1; 1; 1)$ под действием одного и того же преобразования.

Литература

1. Markoff A. Sur les formes binaires indefinies. Math. Ann., **17** (1880), 379-399

2. Frobenius G. Uber die Markoffschen Zahlen. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1913, 458-487.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СУЩЕСТВЕННО ПОЛУРЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРИ КОММУТИРУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Еровенко В.А. (Минск)
erovenko@bsu.by

Пусть X — бесконечномерное комплексное банахово пространство и $B(X)$ — множество ограниченных линейных операторов на X. Обозначим через $N(T)$ и $R(T)$, соответственно, нуль-пространство и область значений оператора T. Многие авторы рассматривали свойства устойчивости ограниченных (замкнутых) линейных операторов с замкнутой областью значений, для которых по крайней мере размерность ядра или коядра конечна. Однако если обе указанные характеристики ограниченного оператора с замкнутой областью значений бесконечны, то, согласно классической теореме Гольдмана, можно указать такой линейный компактный оператор бесконечного ранга, даже сколь угодно малый по норме, прибавление которого нарушает замкнутость области значений.

Положим $R^\infty(T) = \cap_n R(T^n)$. Говорят, что оператор $T \in B(X)$ полурегулярный если область значений $R(T)$ замкнута и справедливо вложение $N(T) \subset R^\infty(T)$, соответственно, оператор $T \in B(X)$ называется существенно полурегулярным если область значений $R(T)$ замкнута и справедливо существенное вложение $N(T) \subset_e R^\infty(T)$. Последнее включение означает, что существует конечномерное подпространство $F \subset X$ такое, что $N(T) \subset R^\infty(T) + F$. В частности, это включение выполняется тогда и только тогда, когда $\dim N(T)/(N(T) \cap R^\infty(T)) < \infty$. Для мотивировки изучения указанных класов операторов заметим следующеее.

Замкнутость области значений устойчива при возмущениях произвольными непрерывными операторами конечного ранга, даже если их ядро и коядро бесконечномерны. В определенном смысле мы имеем два крайних случая устойчивости. С одной стороны, если на нормально разрешимые операторы накладываются условия полуфредгольмовости, то для таких операторов имеется широкий класс допустимых возмущений, сохраняющих замкнутость области значений.

С другой стороны, если на нормально разрешимые операторы не накладывается дополнительные ограничения, то соответствующие допустимые возмущающие операторы образуют весьма узкий класс даже в пространстве ограниченных операторов. Существенно полурегулярные операторы устойчивы относительно возмущений операторами конечного ранга, кроме того они устойчивы относительно компактных коммутирующих операторов.

Т е о р е м а. *Пусть T — существенно полурегулярный оператор и пусть T и S ограниченные линейные коммутирующие операторы, то есть $T \in B(X)$ и $TS = ST$. Существует такое $\epsilon(T) > 0$, что если для спектрального радиуса существенного спектра Фредгольма оператора S выполняется неравенство $r_e(S) < \epsilon(T)$, то тогда возмущенный оператор $T + S$ также является существенно полурегулярным .*

Интересным для приложений является свойство устойчивости существенно полурегулярных операторов при возмущении их коммутирующими строго сингулярными операторами (см. [1]).

Литература

1. Еровенко В.А., Мартон М.В. Свойства существенно полурегулярных операторов и соответствующего спектра Апостола // Доклады НАН Беларуси. — 2004. — Т.48. — №6. — С.16-20.

БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ В ТОЖДЕСТВАХ ДЛЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Ерусалимский Я.М. (Ростов-на-Дону)
dnjme@math.rsu.ru

Хорошо известна формула для количества сюръективных отображений, действующих из X в Y:

$$\left|surY^X\right| = n^m - \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i C_n^i (n-i)^m, \text{ где } n = |Y|,\ m = |X|. \quad (1)$$

Анализ доказательства этой теоремы показывает, что никаких предположений о соотношении между $n = |Y|$ и $m = |X|$ не делается и, следовательно, эта формула верна всегда. Ясно, что в случае $1 \leqslant m < n$ $surY^X = \oslash$ мы получаем тождества:

$$n^m = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1} C_n^i (n-i)^m, \quad 1 \leqslant m < n. \quad (2)$$

В случае, когда $m = n$ множество сюрьективных отображений совпадает с множеством биективных отображений $\left(surY^X = biY^X\right)$. Из формулы (1) мы получаем равенство:

$$n! = n^n - C_n^1(n-1)^n + C_n^2(n-2)^n - C_n^3(n-3)^n + \cdots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}. \quad (3)$$

Равенство (2) мы назвали аддитивным представлением $n!$.

Из равенства (1) следуют тождества:

$$\begin{aligned}&\Big(C_n^1(n-1)^p - C_n^2(n-2)^p + C_n^3(n-3)^p - \cdots\\&\cdots + (-1)^{n-2}C_n^{n-1}\cdot 1^p\Big)^q = C_n^1(n-1)^{p\cdot q} - C_n^2(n-2)^{p\cdot q} +\\&+C_n^3(n-3)^{p\cdot q} - \cdots + (-1)^{n-2}C_n^{n-1}\cdot 1^{p\cdot q},\\&1 \leqslant p\cdot q < n, \quad p, q \in N.\end{aligned} \tag{4}$$

Литература

1. Rosen, Kenneth H. *Discrete Mathematics and Its Applications.* McGraw-Hill, Inc. 2nd ed., ISBN 0–07–053744–5.

2. Ерусалимский Я.М.*Дискретная математика: теория, задачи и приложения.* Москва, Вузовская книга, 2005, 7 изд., 268 с. ISBN 5–9502–0123–X.

ОЦЕНКИ СКАЛЯРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И СТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В НЕОДНОРОДНЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Жидков А.А., Калинин А.В. (Нижний Новгород)

Artem.Zhidkov@telma.ru

При изучении различных задач электродинамики сплошных сред традиционно рассматриваются пространства функций $\vec{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3$ с условиями $rot\vec{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3$, $div\vec{u} \in L_p(\Omega)$. В этих случаях функция $\vec{u}(x)$ обладает определенной гладкостью и допускает включения в соответствующие пространства Соболева.

При изучении вопросов корректности обобщенных формулировок задач, во многих работах, в частности [1] - [3], рассматриваются оценки вида $\|\vec{u}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} \leqslant C\left(\|rot\vec{u}\|_{\{L_p(\Omega)\}^3} + \|div\vec{u}\|_{L_p(\Omega)}\right)$.

В настоящей работе изучаются L_2-оценки скалярных произведений в неограниченных областях

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})_{\{L_2(R^3)\}^3} \leqslant C(\alpha)\cdot\left(\left\|\left(1+|x|^2\right)^{\alpha/2} rot\vec{u}\right\|_{\{L_2(R^3)\}^3}\|\vec{v}\|_{\{L_2(R^3)\}^3} + \right.$$
$$\left. + \|\vec{u}\|_{\{L_2(R^3)\}^3}\left\|\left(1+|x|^2\right)^{\alpha/2} div\vec{v}\right\|_{L_2(R^3)}\right)$$

Аналогичные оценки в ограниченной области были получены в работах [4], [5].

Оценки скалярных произведений важны, в частности, при изучении различных моделей электромагнитных процессов, происходящих в неоднородных средах. В этих случаях постановка задачи требует рассмотрения классов функций $\vec{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3$ таких, что $rot\vec{u} \in \{L_p(\Omega)\}^3$, $div(\mu\vec{u}) \in L_p(\Omega)$, где коэффициент μ не является, вообще говоря, гладкой функцией, и в этом случае, вообще говоря, не справедливо включение $\vec{u} \in \left\{W_2^1(\Omega)\right\}^3$.

В качестве примера применения полученных оценок, была доказана теорема о существовании и единственности обобщенного решения стационарной задачи для системы уравнений Максвелла в неограниченной области, включающей в себя компактную подобласть, заполненную неоднородной средой.

Литература

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике* -М.: Наука, 1980

2. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса. Теория и численнй анализ* -М.: Мир, 1981

3. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости* -М.: Физматгиз, 1961

4. Калинин А.В., Калинкина А.А. *Оценки векторных полей и стационарная система уравнений Максвелла* // Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. -2002. -Вып.1(25). -С.95-107

5. Калинин А.В., Калинкина А.А. *L_p-оценки векторных полей* // Известия вузов. Математика. -2004. N3. -С.26-35

L^1–УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

Завалей Е.Г., Пуляев В.Ф. (Краснодар)

alexzav@mail.ru

Рассматриваются вопросы L^1–устойчивости системы линейных интегральных уравнений Вольтерра с положительными ядрами

$$x(t) = \int_a^t Q(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t > a. \tag{1}$$

Пространства $L^1((a,\infty)\to R^n)$ и $L^1_{loc}((a,\infty)\to R^n)$ вводятся обычным образом.

В уравнении (1) $n\times n$–матрица $Q(t,s)$ определена и измерима по совокупности переменных на множестве $a<s<t\leqslant\infty$, неотрицательна почти всюду и для любых $b>a$ $(b\neq\infty)$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{a<s<b}\int_s^b\|Q(t,s)\|\,dt<\infty,$$
$$\lim_{h\to 0+}\operatorname*{vrai\,sup}_{a<s<b}\int_s^{\min(s+h,\,b)}\|Q(t,s)\|\,dt=0.$$

Под решением уравнения (1), где $f\in L^1_{loc}((a,\infty)\to R^n)$, будем понимать функцию $x_f\in L^1_{loc}((a,\infty)\to R^n)$, которая удовлетворяет почти всюду на (a,∞) уравненю (1).

Определение. Решение $x_{\bar f}$ называется L^1-устойчивым, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любого $f\in L^1_{loc}$, такого, что $f-\bar f\in L^1$ и $\left\|f-\bar f\right\|_{L^1}<\delta$, следует, что $x_f-x_{\bar f}\in L^1$ и $\left\|x_f-x_{\bar f}\right\|_{L^1}<\varepsilon$.

Теорема. Для L^1–устойчивости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname*{vrai\,sup}_{s>a}\int_s^\infty\|Q(t,s)\|dt<\infty$ и при некотором k выполнялось неравенство

$$\sup_j|\lambda_j(B_k)|<1,$$

где $B_k=\lim_{T\to\infty}\operatorname*{vrai\,sup}_{s>T}\int_s^\infty Q_k(t,s)\,dt$; $\lambda_j(B_k)$ — собственные числа матрицы B_k, Q_k — k-тое итерированное ядро ядра Q.

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО МЕТОДА АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПЕРЕСТРОЙКИ В МОДЕЛИ СОЛОУ

Задорожная Н.С., Задорожный А.И. (Ростов-на-Дону)
simon@rsu.ru

Обобщенную неоклассическую задачу экономической динамики с квазиоднородной производственной функцией Кобба-Дугласа представим в виде следующей сингулярно возмущенной нелинейной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\epsilon\frac{du}{dt}=sg(\tau)u^\alpha-\nu(\tau)u,\epsilon\frac{d\tau}{dt}=\epsilon;u(0)=u_0,\tau(0)=0, \qquad (1)$$

с которой связан линейный дифференциальный оператор первого порядка с частными производными

$$X \equiv X_0 + \epsilon X_1 \equiv [sg(\tau)u^{\alpha} - \nu(\tau)u]\,\frac{\partial}{\partial u} + \epsilon\frac{\partial}{\partial\tau}.$$

Интегрирование системы (1) эквивалентно, как известно, интегрированию одного линейного уравнения с частными производными $\frac{\partial G}{\partial t} = XG$. В (1) приняты обозначения: $\epsilon = z_n T << 1$ - малый безразмерный параметр, z_n - нормативная фондоотдача, T - горизонт планирования; $u(t) = \frac{K(t)}{L^l(t)}$ - обобщенная фондовооруженность, $K(t)$, $L(t)$ - капитал и трудовые ресурсы в безразмерной форме, соответственно; $0 < s < 1$ - норма накопления, $g(t) = L^{m-l}(t), m$ - степень однородности (отдача на масштаб), l - вес [1], $\nu(t) = \mu + l\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$, где μ - коэффициент амортизации фондов.

Суть анонсированного в заглавии метода, изложенного в [2], состоит в применении преобразований, максимально упрощающих оператор X. Для преобразования оператора X_0 рассмотрим задачу на собственные значения

$$[sg(\tau)u^{\alpha} - \nu(\tau)u]\,\frac{d\varphi}{du} = \lambda(\tau)\varphi(u),$$

заметив, что τ представляет собой так называемый инвариант. Устанавливается, что $\lambda(\tau) = -(1-\alpha)\nu(\tau)$, где $0 < \alpha < 1$, $\varphi = \left[u^{1-\alpha} - \frac{sg(\tau)}{\nu(\tau)}\right]$. В базисных переменных $\varphi(u), \tau$ оператор X_0 диагонализуется, а именно: $X_0 = \lambda\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}$. В нулевом приближении получаем задачу $\frac{d\tau}{dt} = 0$, то есть $\tau = 0$, $\epsilon\frac{d\varphi}{dt} = \lambda(\tau)\varphi$ с очевидным решением $\varphi = C_0 exp\left(-\frac{1-\alpha}{\epsilon}\nu(0)t\right)$. Окончательно, главный член асимптотики принимает вид

$$u(t) = \left[\frac{sg(t)}{\nu(t)} - \left(\frac{sg(0)}{\nu(0)} - u_0^{1-\alpha}\right) exp\left(-\frac{1-\alpha}{\epsilon}\nu(0)t\right)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + O(\epsilon). \quad (2)$$

Формула, подобная (2), может быть получена методом регуляризации сингулярных возмущений [3], но с помощью более трудоемкой техники.

Литература

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. 304 с.

2. Богаевский В.Н., Повзнер А.Я. Алгебраические методы в нелинейной теории возмущений. - М.: Наука, 1987. 256 с.

3. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений.- М.: Наука, 1981. 400 с.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Зарубин А.Н. (Орел)

aleks_zarubin@mail.ru

Пусть $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^+ = \{(x,t):\ x > 0,\ t > 0\}$, $D^- = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D_k^-$, $D_k^- = \{(x,t);\ k\tau - t < x < (k+1)\tau + t,\ -\tau/2 < t < 0\}$, $J = \{(x,t):\ x > 0,\ t = 0\}$.

В области D для краевой задачи

$$\begin{cases} U_t(x,t) = U_{xx}(x,t) + H(t-h)U(x,t-h) - \\ \qquad -H(x-\tau)U(x-\tau,t) + F(x,t),\ (x,t) \in D^+; \\ U_{tt}(x,t) = U_{xx}(x,t) - H(x-\tau)U(x-\tau,t),\ (x,t) \in D^-; \end{cases} \quad (1)$$

$$U(0,t) = 0,\ t \geqslant 0;\ U(x, k\tau - x) = \psi_k(x),\ k\tau \leqslant x \leqslant (2k+1)\tau/2, \quad (2)$$

$$\psi_0(0) = 0, \lim_{k\to\infty} \max_{[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_k(x)| = 0, F(0,t) = F(+\infty,t) = 0, \quad (3)$$

когда $U(x,t),\ F(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D \backslash J)$; $\psi_k(x) \in C^1[k\tau,(2k+1)\tau/2] \cap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2)$; $H(\xi)$ - функция Хевисайда; $0 < \tau,\ h \equiv const$, рассматривается

Задача. Найти функцию $g(t)$ при известной функции $f(x)$, задающих плотность тепловых источников $F(x,t) = f(x)g(t)$ системы, описываемой уравнением (1) в области D и условиями (2)-(3), по наблюдаемому значению

$$U_x(x_k,t) = \alpha(t),\ t > 0, x_k = k\tau. \quad (4)$$

Вопрос существования единственного решения краевой задачи (1)-(3) сводится к разрешимости интегро - дифференциально - разностного уравнения

$$\omega''(x) - \omega'(x) = H(x-\tau)\omega(x-\tau) -$$

$$-\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_0^{x-m\tau}(x-m\tau-\eta)^{2(m-1)}\omega(\eta)d\eta-f(x)g(0)-\delta_k(x),$$

$k\tau < x < (k+1)\tau$, где $\omega(x) = U(x,0)$, $\gamma_m \equiv const$, $\delta_k(x)$ зависит от $\psi_k(x)$; а обратной задачи с условием (4) - к разрешимости интеграьного уравнения Вольтерра первого рода.

УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА В ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ С РАЗРЫВНЫМИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ[1]

Зверева М.Б. (Воронеж), Ищенко А.С. (Белгород)
margz@rambler.ru, science@bupk.ru

Обсуждается возможность описания условия экстремума для функционала

$$\Phi(u)=\int\limits_0^1\frac{pu_\mu'^2}{2}d\mu+\int\limits_0^1\frac{u^2}{2}d[Q]-\int\limits_0^1 ud[F], \qquad (1)$$

рассматриваемого в классе разрывных функций. Такой функционал возникает, например, при моделировании деформации двух упруго взаимодействующих в точке $x=\xi$ кусков стилтьесовской струны.

Мы предполагаем, что p, Q, F — функции ограниченной вариации на $[0,1]$, μ — строго возрастающая на $[0,1]$ функция. Функционал (1) изучается в классе μ - абсолютно непрерывных функций, производные которых u'_μ (в смысле Радона - Никодима) являются функциями ограниченной вариации на $[0,1]$.

Функциям Q, F разрешено в точке $x=\xi$ разрыва u иметь правый и левый скачки. Так, правый скачок $\Delta^+Q(\xi)=Q(\xi+0)-Q(\xi)$ определяет упругость пружины, подпирающей конец струны $u(\xi+0)$. Аналогично, левый скачок $\Delta^-Q(\xi)=Q(\xi)-Q(\xi-0)$ определяет упругость пружины, подпирающей $u(\xi-0)$. Левый и правый скачки функции F определяются сосредоточенными силами, приложенными в точках $u(\xi-0)$ и $u(\xi+0)$ соответственно. Наличие двойных скачков у функций Q, F предопределяет непригодность описания потенциальной энергии обычными интегралами Стилтьеса, в связи

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 04-01-00049)

с чем мы прибегаем к использованию более общего интеграла, предложенного Ю.В. Покорным [1]. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о таком интеграле, мы обрамляем функцию, стоящую под дифференциалом, квадратными скобками.

Литература

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН. – 1999. – Т.364, №2. – С.167-169.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ $F(t,x,x')=0$, $x(0)=0$

Зернов А.Е., Кузина Ю.В. (Одесса)

zernov@ukr.net

В докладе рассматриваются сингулярные задачи Коши

$$P(t,x(t),x'(t))+f(t,x(t),x'(t))=0, \quad x(0)=0, \tag{1}$$

где $x:(0,\tau)\to\mathbb{R}$ – неизвестная функция переменной t, P – многочлен от своих переменных, $f:D\to\mathbb{R}$ – непрерывная функция ($D\subset(0,\tau)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$), которая в некотором смысле мала. Решением задачи (1) называется непрерывно дифференцируемая функция $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$, $0<\rho<\tau$, которая тождественно удовлетворяет при всех $t\in(0,\rho]$ дифференциальному уравнению и при этом $\lim\limits_{t\to+0}x(t)=0$. В первой части доклада рассматриваются уравнения

$$\sum_{k=1}^{m}\left(a_{10k}t+a_{01k}x(t)\right)\left(x'(t)\right)^k=a_{100}+a_{010}x(t)+f(t,x(t),x'(t)),$$

$$\sum_{i+j=m,k\geqslant1}a_{ijk}t^i(x(t))^j(x'(t))^k=\sum_{1\leqslant i+j\leqslant m}a_{ijk}t^i(x(t))^j+$$
$$+\sum_{i+j\geqslant m+1,k\geqslant0}a_{ijk}t^i(x(t))^j(x'(t))^k+f(t,x(t),x'(t))$$

с начальным условием $x(0)=0$, где $m\geqslant2$ – натуральное, i,j,k – целые неотрицательные, все a_{ijk} – постоянные, $a_{100}\neq0$, $a_{010}\neq0$. Во второй части доклада рассматриваются задачи вида (1), где отсутствуют линейные члены $a_{100}t+a_{010}x(t)$. В третьей части доклада рассматривается задача

$$t^\alpha(x(t))^\beta(x'(t))^\gamma=a_{100}t+a_{010}x(t)+f(t,x(t),x'(t)), \quad x(0)=0,$$

где α, β, γ – целые неотрицательные, $\gamma \geqslant 1$, a_{100} и a_{010} – постоянные.

Исследуются вопросы о существовании у поставленных задач непустых множеств решений $x : (0, \rho) \to \mathbb{R}$ (ρ достаточно мало) со свойствами $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} c_k t^k + o(t^r)$, $t \to +0$, $(r \geqslant 2)$, или $x(t) = (c_1 + + o(1))\, t$, $t \to +0$, где все c_k – постоянные, и о количестве решений с такими свойствами. При этом проводятся рассуждения качественного характера. Рассматриваются конкретные примеры.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зернов А.Е., Чайчук О.Р. (Одесса)

zernov@ukr.net

Рассматриваются следующие четыре задачи Коши:

$$\alpha(t)x'(t){=}a(t) + b_1(t)x(t) + b_2(t)x(g(t)) + b_3(t)x'(h(t)),\ x(0) = 0,$$

$$\alpha(t)x'(t) = a(t) + b_1(t)x(t) + b_2(t)x(g(t)) + b_3(t)x'(h(t)) + \\ +\varphi\big(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))\big), \quad x(0) = 0,$$

$$\alpha(t)x'(t) = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad x(0) = 0,$$

$$\alpha(t)x'(t) = f\big(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))\big) + \\ +\varphi\big(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))\big), \quad x(0) = 0.$$

Здесь $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция переменной t, $a : (0, \tau) \to \mathbb{R}$, $b_i : (0, \tau) \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $g : (0, \tau) \to (0, +\infty)$, h: $(0, \tau) \to (0, +\infty)$, $\alpha : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – непрерывные функции, $\lim\limits_{t \to +0} \alpha(t) = 0$, $\lim\limits_{t \to +0} a(t) = 0$, $0 < g(t) \leqslant t$, $0 < h(t) \leqslant t$, $t \in (0, \tau)$, $f : D \to \mathbb{R}$ и $\varphi : D \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, $D \subset (0, \tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, при этом φ в определенном смысле мала.

Решением каждой из этих задач называется непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \rho] \to \mathbb{R}$, $0 < \rho < \tau$, которая тождественно удовлетворяет при всех $t \in (0, \rho]$ соответствующему уравнению и $\lim\limits_{t \to +0} x(t) = 0$

Для каждой из указанных задач найдены эффективные достаточные условия существования непустых множеств решений с известными асимптотическими свойствами при $t \to +0$. Рассмотрен вопрос о числе решений указанного вида. Обсуждается проблема близости решений возмущенных и невозмущенных задач. Использованы рассуждения качественного характера. Рассмотрены конкретные примеры.

НАБЛЮДАЕМОСТЬ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Знаменская Л.Н. (Переславль), Потапова З.Е. (Москва)
lznam@lznam.pereslavl.ru

potapovaZ@yandex.ru

Рассматриваются колебания, описываемые следующей краевой задачей:

$$\begin{cases} v_x(t,x) + Li_t(t,x) + Ri(t,x) = 0, \\ i_x(t,x) + Cv_t(t,x) + Gv(t,x) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$v(0,x) = \varphi(x), \quad i(0,x) = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \tag{2}$$

$$v(t,0) = 0, \quad i(t,\ell) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

где R и L — сопротивление и коэффициент самоиндукции, а C и G — коэффициенты емкости и утечки. Предполагается, что сигнал по линии распространяется без искажения, т. е. выполнено равенство $CR = LG$. Пусть $\beta = G/C = R/L$.

Задача граничного наблюдения. Найти период наблюдения T и начальное состояние (2) объекта, процесс колебаний которого описывается системой (1), однородными краевыми условиями (3), по результатам наблюдения

$$v_x(t,0) = y^1(t), \quad i_x(t,\ell) = y^2(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Предложение. *Задача граничного наблюдения решается, если период наблюдения T не меньше, чем ℓ/a. При этом функции начального состояния системы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ восстанавливаются с помощью функций наблюдений $y^1(t)$ и $y^2(t)$ следующим образом:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \left[\exp\left(\frac{\beta\xi}{a}\right) y^1\left(\frac{\xi}{a}\right) + aL\exp\left(\frac{\beta(\ell-\xi)}{a}\right) y^2\left(\frac{\ell-\xi}{a}\right)\right] d\xi,$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{2}\int_x^\ell \left[\exp\left(\frac{\beta(\ell-\xi)}{a}\right) y^2\left(\frac{\ell-\xi}{a}\right) - aC\exp\left(\frac{\beta\xi}{a}\right) y^1\left(\frac{\xi}{a}\right)\right] d\xi.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-01-00279

ОБ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ С МЯГКОЙ ПОСАДКОЙ РЕАКТИВНОГО АППАРАТА ПРИ НАЛИЧИИ КОНТРОЛЬНОЙ ТОЧКИ

Зубова С.П., Ле Хай Чунг (Воронеж)

trungybvnvr@yahoo.com

Рассматривается движение объекта в вертикальной плоскости в поле силы тяжести под действием реактивной силы, возникающей в результате отделения от него частиц с элементарной массой (см. [1]).

Задаются начальное и конечное положения объекта (горизонтальные и вертикальные составляющие), начальные и конечные скорости объекта. Для мягкой посадки конечные составляющие скорости как и управляющие воздействия реактивной точки полагаются равными нулю.

Требуется, чтобы рассматриваемый объект в произвольно заданный момент времени находился в определенной точке.

Движение объект описывается линейной системой уравнения с постоянными коэффициентами.

В докладе доказывается, что существуют управления, описываемые полиномиальными функциями от времени, под действиями которых состояния системы также описывается полиномиальными функциями от времени. В отличие от результатов [2], приводимый метод нахождения управляющих функций и функций состояния системы не требует каскадного расщепления уравнения управления на уравнения в подпространствах. Решения получаются в более простом и удобном для исследований вида.

Литература

1. Красовский Н. Н., Теория управления движением. М.: Наука, 1968, 475 с.

2. Раецкая Е. В., Условная управляемость и наблюдаемость линейных систем: Дисс. …канд. физ.-мат. наук. Воронеж, 2004.

О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

Зубова С.П., Раецкая Е.В. (Воронеж)

raetskaya@inbox.ru

Рассматривается линейная динамическая система с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Bx(t) + Du(t) \tag{1}$$

$(x(t) \in \mathbb{R}^k,\ u(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T],\ B,\ D$ – матрицы соответствующих размеров.

Исследуется возможность построения функции управления $u(t)$ и функции состояния $x(t)$ в виде полиномов по степеням t с векторными коэффициентами для широкого круга задач управления:

для классической задачи с краевыми условиями

$$x(0) = x_0,\ x(T) = x_T; \tag{2}$$

для задачи о мягкой посадке:

$$x(0) = x_0,\ x(T) = x_T,\ x'(T) = 0;$$

для задачи управления (1), (2) с дополнительными ограничениями:

$$u^{(i)}(0) = \alpha_i,\ i = \overline{1,p},\ u^{(j)}(T) = \beta_j,\ j = \overline{1,q}; \tag{3}$$

для задачи с контрольными точками:

$$x(0) = x_0,\ x(\tau_i) = x_i,\ x(T) = x_T,\ i = \overline{1,m},\ 0 < \tau_i < \ldots < \tau_m < T;$$

с другими условиями:

$$x(t) > 0,\ |u(t)| < 1 \ldots.$$

Степени полиномов определяются в зависимости от количества ограничений на $x(t)$ и $u(t)$ и от количества матриц в ранговом критерии управляемости Калмана, необходимых для совпадения ранга матрицы управляемости с размерностью пространства состояний системы.

В работе (2) были построены функции состояния и функции управления системы (1) с условиями (2), (3) в виде произведений полиномов от t на экспоненциальные функции с матричными показателями. Решения же чисто полиномиальные значительно упрощают исследования.

Литература

1. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н.Андреев. - М. : Наука, 1976. - 424 с.

2. Раецкая Е.В. Полная условная управляемость и полная наблюдаемость линейных систем: диссерт. на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат.наук. Воронеж, 2004. – 149с.

ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КРАТНОСТИ НЕНУЛЕВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ГИЛЬБЕРТА-ШМИДТА

Исламов Г.Г. (Ижевск)

gislamov@udm.ru

В цикле работ автора (см. библиографию в [1]) показано, что величина $\max_{\lambda\in\Omega} \dim\ker(A-\lambda I)$, A – линейный оператор, I – тождественный оператор, Ω – подмножество комплексной плоскости, возникает при изучении различных проблем теории управления. Здесь описывается схема вычисления геометрической кратности ненулевого собственного значения оператора Гильберта-Шмидта A, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Выберем однозначные функции f и g, аналитические в окрестности спектра оператора A и обращающиеся в нуль на спектре в нуле и только в нуле. Обозначим $P = f(A) - f(\lambda)I, L = \frac{1}{g(\lambda)}g(A)$, P^* – сопряженный оператор. Пусть $\{Q_n\}$ – последовательность операторов Гильберта-Шмидта, порождённая итерационным процессом $Q_0 = 0, Q_n = (I - \mu P^*P)Q_{n-1} - \mu P^*L, n = 1, 2, \ldots$, где $\mu \in (0, 2/|P^*P|), |\cdot|$ – норма ограниченного оператора. Тогда геометрическая кратность $\dim\ker(A - \lambda I) = \min_Q \|PQ + L\| = \lim_{n\to\infty} \|PQ_n + L\|$, где минимум берется по всем операторам Гильберта-Шмидта, $\|G\|^2 = \mathrm{trace}(G^*G)$.

Литература

1. Islamov G.G. On the exact formula for eigenvalue geometric multiplicity // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. Воронеж: ВГУ, 2005. - с. 3.

ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ[1]

Ишмухаметов А.З. (Москва)

aleks@ccas.ru

Рассматривается задача оптимального управления:

$$J(u,v) = \Phi(w, w_t, u) \to \inf$$

на решениях волнового уравнения с двумя управлениями $u(t)$ и $v(t)$

$$w_{tt} - (a(x)w_x)_x = d(x)u(t) + f(x,t),\ (x,t) \in Q,$$

$$w_x(0,t) = v(t),\ w_x(l,t) = 0,\ t \in (0,T),$$

$$w(x,0) = \varphi_0(x),\ w_t(x,0) = \varphi_1(x),\ x \in (0,l),$$

$$(u,v) \in U \subset H = L_2 \times L_2,\ U = \{(u,v) \in H : \|u\|_{L_2} \leqslant R_u,\ \|v\|_{L_2} \leqslant R_v\}$$

Здесь Φ - выпуклая функция,$Q = (0,l) \times (0,T); a(x) \in C^1[0,l]$, $a(x) > 0, x \in [0,l]; f \in L_2(Q), d, y_0, y_1, \varphi_1 \in L_2(0,l), \varphi_0 \in W^1(0,l)$

Аналогично ставится задача для уравнения теплопроводности:

$$J(u,v) = \Phi(w,u) \to \inf$$

$$w_t - (a(x)w_x)_x = d(x)u(t) + f(x,t),\ (x,t) \in Q,$$

$$w_x(0,t) = v(t),\ w_x(l,t) = 0,\ t \in (0,T),$$

$$w(x,0) = \varphi(x),\ x \in (0,l),\ f \in L_2(Q), d, y, \varphi \in L_2(0,l),$$

$$(u,v) \in U \subset H = L_2 \times L_2,\ U = \{(u,v) \in H : \|u\|_{L_2} \leqslant R_u,\ \|v\|_{L_2} \leqslant R_v\}$$

Для решения этих задач применяются методы оптимизации с конечношаговыми внутренними алгоритмами. Эти методы при аппроксимации с помощью усечения бесконечных рядов сводятся к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений. Получены оценки скорости сходимости по функционалу и условия сильной сходимости к нормальному оптимальному управлению. Методы могут быть применены для решения более общих задач с выпуклыми целевыми функционалами, а также для многомерных уравнений и систем.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 04-01-00619.

О ВОЗМОЖНОСТИ СВЕДЕНИЯ АНОРМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С НЕРАВЕНСТВАМИ К КВАДРАТИЧНОЙ[1]

Карамзин Д.Ю. (Москва)
dmitry_karamzin@mail.ru

Изучается экстремальная задача

$$f(x) \to \min, \quad F(x) \in C. \tag{1}$$

Функции $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ и $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ дважды непрерывно дифференцируемы; конус $C = \{y \in \mathbf{R}^k : \ y^j = 0, \, j \in J_1, \ y^j \leqslant 0, \, j \in J_2\}$, где J_1, J_2 – два набора индексов, отвечающих ограничениям типа равенств и неравенств соответственно: $J_1 \sqcup J_2 = \{1, 2, ..., k\}$.

Предположим, что в задаче (1) существует локальный минимум $\hat{x}$, и $F(\hat{x}) = 0$, $f'(\hat{x}) = 0$, $F'(\hat{x}) = 0$. Рассмотрим функцию Лагранжа $\mathcal{L}(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \langle y, F(x) \rangle$, $\lambda = (\lambda_0, y)$, $\lambda_0 \in \mathbf{R}^1$, $y \in \mathbf{R}^k$. Пусть $\Lambda(\hat{x})$ – множество векторов $\lambda \neq 0$ таких, что $\lambda_0 \geqslant 0$, $y \in N_C$. Обозначим через $\Lambda_r(\hat{x})$ множество векторов $\lambda \in \Lambda(\hat{x})$, для которых существует подпространство $\Pi \subseteq \mathbf{R}^n$, $\operatorname{codim} \Pi \leqslant r$ и $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(\hat{x}, \lambda)[h, h] \geqslant 0 \ \forall \, h \in \Pi$. Ясно, что $\Lambda_s(\hat{x}) \subseteq \Lambda_r(\hat{x})$ при $s < r$.

Определение 1. Будем говорить, что задача (1) сводится к квадратичной, если $f''(\hat{x})[h, h] \geqslant 0 \ \forall \, h$: $F''(\hat{x})[h, h] \in C$.

Пусть $j \in J_2$, $\delta > 0$. Задачу, полученную из (1) заменой ограничения $F_j(x) \leqslant 0$ на ограничение $F_j(x) + \delta |x|^2 \leqslant 0$, будем называть (j, δ)-возмущением задачи (1). Очевидно, что при любом (j, δ)-возмущении исходной задачи локальный минимум не изменится.

Теорема 1. Пусть $J_2 \neq \varnothing$. Имеет место альтернатива:

а) либо для любых $j \in J_2$, $\delta > 0$ (j, δ)-возмущение задачи (1) сводится к квадратичной задаче,

б) либо $\Lambda_{k-2}(\hat{x}) \neq \varnothing$.

Простые примеры показывают, что может быть выполнено а), но не выполнено б), и наоборот. Условие $J_2 \neq \varnothing$ является существенным. Изучению анормальных экстремальных задач посвящена монография [1].

Литература

[1] *Арутюнов А.В.* Условия экстремума. М.: Факториал, 1997.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 04-01-00619 и Фонда содействия отечественной науке.

НЕКОТОРОЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Карюк А.И., Редькина Т.В. (Ставрополь)
Karyuk@mail.ru

Нелинейное уравнение в частных производных

$$v_x = \frac{\beta}{2\alpha k}(lnu)_{tx} + \frac{a}{2\alpha^2}[u_t + (\alpha k + \beta)u_x] + \left(\beta + \frac{\beta^2}{2\alpha k}\right)(lnu)_{xx}, \quad (1)$$

где a, k, α, β - const, $u(x,t)$ - неизвестная функция, $v(x,t)$ - функция, описывающая некоторое возмущение, было получено в статье Редькиной Т.В. [1]. Оно обладает парой Лакса с дифференциальными операторами первого порядка L и A с матричными коэффициентами 2×2, вида

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ a & -\alpha \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2k}(lnu)_x & u \\ \frac{a}{2}(\frac{\beta}{\alpha k} + 1)(lnu)_x + (\frac{a}{2\alpha})^2 u & -(\alpha + \frac{\beta}{2k})(lnu)_x \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha k + \beta & 0 \\ ak & \beta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} v & ku \\ k(\frac{a}{2\alpha})^2 u - \frac{a}{2\alpha}(lnu)_t & v + (lnu)_t \end{pmatrix}.$$

Выполнив в уравнении (1) подстановку $u(x,t) = e^{q(\xi,\eta)}$, где $q(\xi,\eta)$ - новая неизвестная функция, зависящая от новых переменных, выраженных через старые в виде:

$$\xi(x,t) = t, \eta(x,t) = \left(\beta + \frac{\beta^2}{2\alpha k}\right)t - \frac{\beta}{2\alpha k}x,$$

уравнение (1) сводится к неоднородному квазилинейному уравнению гиперболического типа $v_\eta = \frac{\beta}{2\alpha k}q_{\xi\eta} - \frac{ak}{\alpha}e^q(\frac{1}{\beta}q_\xi + \frac{1}{2}q_\eta)$, которое может описывать волновые процессы в средах с нелинейными свойст- вами. Для нелинейного уравнения (1) найдено решение в виде бегущей волны и доказана следующая

ТЕОРЕМА. Если в уравнении (1) $u(x,t) = u(\zeta)$, $\zeta = x + \gamma t$, где γ - произвольная постоянная, а функция $v(x,t)$, описывающая некоторое возмущение - задана, и ее также можно представить в виде $v(x,t) = v(\zeta)$, то уравнение (1) имеет точное решение

$$u(\zeta) = \frac{e^{\mu\int(v+C_1)d\zeta}}{C_2 + \frac{a\mu}{2\alpha^2}[\gamma + \alpha k + \beta]\int e^{\mu\int(v+C_1)d\zeta(v+C_1)d\zeta}d\zeta}, \text{ где } \mu = \frac{2\alpha k}{\beta(2\alpha k + \beta + \gamma)}.$$

Литература

[1] Редькина Т.В. Возможность построения солитонных 1+1 и 2+1 - мерных уравнений, имеющих общую задачу рассеяния // Вестник СГУ, Ставрополь, 2005, 4 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

Карюкина Ю.Г. (Москва)
Julieta_K@rambler.ru

Рассматривается задача оптимального управления, связанная с экономическими моделями. А именно:

$$I(u) = x_3(T) \to \max, 0 < u_1 \leqslant u \leqslant u_2,\ t \in [0, T],$$

$$dx_1/dt = u(t) - n_c(Y - x_2)x_1,\ x_1(0) = x_1^0 > 0,$$
$$dx_2/dt = n_c(Y - x_2)x_1 - k_1 x_2,\ x_2(0) = x_2^0 > 0,$$
$$dx_3/dt = n_c(Y - x_2)x_1 - u(t) - k_2 x_1,\ x_3(0) = x_3^0 > 0,$$

Здесь u - темп производства, количество товара выпускаемое в единицу времени; x_1 - количество товара на рынке; x_2 - количество товара у потребителей (не потребленного); x_3 - доход (разность между выручкой и затратами на единицу времени); $Y > 0 - const$, потенциальный спрос (полное количество товара, способное мгновенно удовлетворить спрос в условиях отсутствия ажиотажного спроса); $k_1 - const$, темп потребления товара (относительный коэффициент потребления купленного товара в единицу времени); $k_2 - const$, плата за хранение единицы товара; c - цена товара ($c > 1$, так как себестоимость товара считается равной 1); $n(c)$ - коэффициент скорости продаж. Считаем, что цена c товара постоянна, поэтому $n(c) = const$. Пусть $n(c) = n_c$. Время T — фиксировано. Кроме того, исходя из смысла задачи $x_2^0 < Y$.

Для этой задачи доказывается теорема существования оптимальных управлений, выпуклость множества достижимости, а также возможность наличия особого режима, который содержит бесконечное количество точек переключения.

Литература

[1] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкридзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1983.

[2] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Математический анализ. М.: Наука. 1986, т.1.

[3] *Зеликин М.И., Борисов Б.Ф.* Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления. 1991.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 04-01-00619.

ОБ ОБРАЩЕНИИ ТРЕХДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Катрахов В.В., Каретник В.О. (Владивосток)
katrakhov@mail.ru

Рассмотрим трехдиагональную матрицу $M = aD^- + bE + cD^+$, где E – единичная матрица, элементы матриц $(D^-)_{kj} = \delta_k^{j+1}$ и $(D^+)_{kj} = \delta_k^{j-1}$, где δ_k^j – символ Кронекера. То есть $D^\pm$ представляют собой однодиагональные матрицы, у которых единицы стоят на первой наддиагонали или поддиагонали, соответственно, а остальные элементы нулевые.

Рассмотрим еще полиномы Чебышева второго рода U_n, которые определяются, например, по рекуррентной процедуре $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$, $U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1} - U_n(x)$.

Элементы M_{kj}^{-1} обратной матрицы M^{-1} вычисляются по формуле

$$M_{kj}^{-1} = \frac{-\alpha^{j-k}}{\beta U_N(x)} \sum_{l=0}^{n_{kj}} U_{N-1-|k-j|-2l}(x),$$

где $n_{kj} = \min\{k-1, N-k, j-1, N-j\}$, $x = -b/(2\sqrt{ac})$, $\alpha = \sqrt{c/a}$, $\beta = \sqrt{ac}$, N – размер матриц.

Эта формула имеет место в невырожденном случае когда $ac \neq 0$ и x не является корнем многочлена U_N. Она может быть выведена из известной (см., например, [1]) формулы

$$M_{kj}^{-1} = \frac{2\,c^{(j-k)/2}}{(N+1)\,a^{(j-k)/2}} \sum_{l=1}^{N} \frac{\sin(\pi kl/(N+1))\sin(\pi jl/(N+1))}{b + 2\sqrt{ac}\ \cos(\pi l/(N+1))}.$$

Приведенная формула представляет интерес, как с теоретической, так и вычислительной точек зрения, поскольку быстрое вычисление по рекуррентной формуле полиномов Чебышева приводит и к быстрому вычислению обратной матрицы.

Литература

1. Катрахов В.В., Головко Н.И., Рыжков Д.Е. Введение в теорию марковских дважды стохастических систем массового обслуживания. Владивосток, изд-во ДВГУ, 2005, 212 стр.

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Квитко А.Н. (Санкт-Петербург)
alkvit46@mail.ru

Объектом исследования является система

$$\dot{z} = \varphi(z, w, t) \tag{1}$$

$$z \in R^n, w \in R^n, r \leqslant n, t \in [0,1], f \in C^3(R^n \times R^r \times R^1; R^n) \tag{2}$$

Пусть $z_0(t) \in C^1[0,1]$, $w_0(t) \in C^1[0,1]$ удовлетворяют системе (1). Введем замену переменных z, w по формулам

$$z = x + z_0(t), \quad w = u + w_0(t) \tag{3}$$

Тогда система (1) в новых переменных примет вид

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{4}$$

$$f(0,0,t) \equiv 0 \tag{5}$$

Пусть $\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$

$$A = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1) \right\}, \quad B = \left\{ \frac{\partial f}{\partial u}(0,0,1) \right\} \tag{6}$$

Задача — найти функции $x(t) \in C^1[0,1)$, $u(t) \in C^1[0,1)$, удовлетворяющие условиям

$$||x|| < C_1, \quad ||u|| < C_2 \tag{7}$$

и системе (4) так, чтобы было выполнено

$$x(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad x(t) \to x_1, \text{ при } t \to 1. \tag{8}$$

Литература

1. Квитко А.Н. Об одной задаче управления // Дифференциальные уравнения. Т.40. Вып. 6. 2004. С.740-746

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ УПРАВЛЯЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Кетова К.В., Сабирова О.Р. (Ижевск)
primat@istu.ru

Задача экономического роста формулируется как задача управления благосостоянием населения в определенный интервал времени с использованием функции полезности.

Ежегодно валовый региональный продукт распределяется на три составляющие: часть средств направляется на расширение основных производственных фондов, часть средств вкладывается в инновационные технологии, оставшаяся часть расходуется на потребление. Доли инвестирования есть управляющие переменные задачи.

Размеры выпуска определяются агрегированной производственной функцией типа функции Кобба-Дугласа-Тинбергена.

В отличие от классических постановок [1], в данной задаче присутствуют две управляющие переменные. Фазовыми координатами являются фондовооруженность и науковооруженность труда. Постановка относится к классу задач оптимального управления с закрепленными концами фазовых траекторий.

Решение задачи управления определяется с использованием принципа максимума Понтрягина [2], который строит оптимальное управление как функцию времени. Оптимальная стратегия следует из максимизации функции Гамильтона, которая в случае числа управляющих переменных более одной имеет ряд особенностей.

В результате решения поставленной задачи оптимального управления исследованы параметры устойчивости задачи, найдены квазистационарные траектории сбалансированного экономического роста.

Литература

1. Столерю Л. Равновесие и экономический рост. - М.: Статистика, 1974. - 472с.

2. Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. - М.: Наука, 1989. - 61 с.

О СВОЙСТВАХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ТЕПЛОВОГО ВЗРЫВА[1]

Китаева Е.В. (Самара)

el_kitaeva@mail.ru

Рассмотрим спектральную дифференциальную задачу

$$Lu \equiv u'' - d(x)u = \lambda u, u(-1) = u(1) = 0, u(-x) = u(x), \qquad (1)$$

и соответствующую разностную задачу

$$(L_h u)_i \equiv \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - d(x_i)u_i = \lambda_h u_i, \qquad (2)$$

$$u_{-m} = u_m = 0, u_i = u_{-i}, -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, x_i = ih, h = \frac{1}{m},$$

где $d(x) > 0$ непрерывная на [-1,1] функция. Пусть
$d_0 = \min_{x\in[-1,1]} d(x)$, $d_1 = \max_{x\in[-1,1]} d(x)$, $d_2 = 2\int\limits_{-1}^{1} d(x)\cos^2 \frac{\pi}{2}xdx$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия
$d_1 - d_0 < 2\pi^2$, $2\int_{-1}^{1} d(x)\cos^2\frac{\pi}{2}xdx > \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$.

Тогда найдется такое $m_0 \in N$ и константа $\lambda_0 > 0$, не зависящая от m, что для всех $m \geqslant m_0$ собственные значения $\lambda_{h,i}$ задачи (2) простые, вещественные, и справедливы неравенства $\lambda_{h,m-1} < \lambda_{h,m-2} < \ldots < \lambda_{h,2} < 0 < \lambda_{h,1}$; $|\lambda_{h,i} - \lambda_{h,j}| \geqslant C|i-j|^2, \lambda_{h,i} = O^*(i^2), |\lambda_{h,m-1}| \geqslant \lambda_0 > 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия $C_1C_3 - C_2C_4 > 0$,где $C_1 = d_2 - \frac{\pi^2}{4}$, $C_3 = \frac{9\pi^2}{4} - d_1$, $C_2 = C_4 = \frac{4}{9\pi^2}\left(\int_{-1}^{1}((d(x)\cos\frac{\pi}{2}x)'')^2dx\right)^{1/2}$. Тогда найдется такое $m_0 \in N$, $\gamma > 0$, что для всех $m \geqslant m_0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \leqslant \gamma\varepsilon/m$, алгоритм из [1] численного отыскания ограниченного на всей оси решения задачи $\varepsilon\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} = L_h u^n + f^n$ является сходящимся.

В докладе изучаются приложения полученных результатов к моделированию критических условий теплового взрыва.

Литература

1. Китаева Е.В., Соболев В.А. Численное отыскание ограниченных на всей оси решений дискретных сингулярно возмущенных уравнений и критических режимов горения // Журн. вычисл. матем. и матем. физики.- 2005.- Т. 45, №1.- с. 56-87.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 04-01-96515).

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ДЕЙСТВИЙ

Ключанцев М.И. (Воронеж)

kluchancev@pmemm.org.ru

Система A отождествляется с некоторым математическим оператором $A : D(A) \to R(A)$. Требуем существование алгебры некоммутирующих операторов. Дополняем это условие следующими тремя аксиомами. 1). Оператор A имеет свое пространство-время $DtR(A)$. 2). Оператор A имеет первый $t = 0$ и последний $t = T$ моменты времени t. 3). Для единичного оператора $T = 0$. Оператор A, удовлетворяющий аксиомам 1)-2), допускает единственное полное временное представление, для интерпретации которого необходим операциональный формализм.

Без привлечения теории графов конструкции теории становятся труднообозримыми. Математический формализм, включающий алгебру операторов - временных форм $A...p...$, $A...r...$ и теорию графов, будет неполным. Для описания самоэволюции оператора A вводится эволюционирующееся пространство $Dtt_1...t_nR(AA_1...A_n)$ элементов $(x, t, t_1, ..., t_n, A, A_1, ..., A_n)$. Пространство $Dtt_1...t_nR(AA_1...A_n)$- топологическое пространство, но не является векторным.

Теория пространства $Dtt_1...t_nR(AA_1...A_n)$ вместе с теорией *исчисление будущих*, т. е. теорией, предметом которой являются операции с прошедшими и будущими всех порядков, рассматриваемых как абстрактные объекты некоторого множества, дополняет математическ̆й формализм, интерпретирующий введенную систему аксиом, понятий и определений теории параллельных действий.

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ключев В.В. (Йошкар-Ола)

kljuchevvv@yandex.ru

Рассматривается задача Коши $dx(t)/dt = Ax(t),\ x(0) = f$, где $A : D(A) \subset X \to X$ — неограниченный замкнутый оператор, действующий в банаховом пространстве X; $\overline{D(A)} = X,\ f \in D(A)$. Предполагается, что для спектра $\sigma(A)$ и резольвенты $(\zeta E - A)^{-1}$ оператора A выполняется условие $\sigma(A) \subset K(\varphi_0),\ \varphi_0 \in (0, \pi/2)$ и имеет место оценка $\|(\zeta E - A)^{-1}\| \leqslant C_0(1+|\zeta|)^{-1}\ \forall\zeta \in \mathbf{C}\backslash K(\varphi_0)$, где $K(\varphi) = \{\zeta \in \mathbf{C}\backslash\{0\} : |\arg\zeta| < \varphi\}$. ($C_i > 0$ – постоянные). Рассматриваемая задача поставлена, вообще говоря, некорректно.

Следуя [1], рассмотрим следующий класс разностных схем численной аппроксимации функции $x = x(t)$:

$$\sum_{\nu=0}^{k} \alpha_\nu x_{n+\nu} = \Delta t \sum_{\nu=0}^{k} \beta_\nu A x_{n+\nu}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-k, \quad \Delta t = \frac{T}{N}; \qquad (1)$$

$$x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-1} = f.$$

Здесь $k \geqslant 1$ — фиксированное натуральное число, α_ν, β_ν, $0 \leqslant \nu \leqslant k$ — вещественные числа, выбор которых определяет конкретную разностную схему. Ввиду некорректности рассматриваемой задачи, для получения квалифицированных по Δt оценок скорости сходимости приближений x_n к $x(n\Delta t)$, равномерных по $t = n\Delta t$, необходимо привлекать дополнительную информацию о решении задачи Коши. Установлены условия на α_ν, β_ν, $0 \leqslant \nu \leqslant k$ и ограничения на величину отрезка $[0;\ T]$, на котором ищется решение, при выполнении которых для приближений x_n, порождаемых схемой (1)

1) представление $x(T) = A^{-p}w,\ p > 0,\ w \in X$ влечет оценку $\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_1(-\ln\Delta t)^{-p},\ 0 \leqslant n \leqslant N-1,\ \Delta t \in (0,\varepsilon)$;

2) существование решения на отрезке $[0;\ T_1]$, $T_1 > gT > T$ – оценку $\|x_n - x(n\Delta t)\| \leqslant C_2(\Delta t)^q,\ 0 \leqslant n \leqslant N,\ \Delta t \in (0,\varepsilon)$ для $\forall q \in (0; p)$, где $p = O(T_1 - gT)$, $T_1 \to gT$ определяется выбранным методом вида (1).

Литература

1. Бакушинский А.Б. Разностные методы решения некорректных задач Коши для эволюционных уравнений в комплексном В – пространстве // Дифф.ур. – 1972. – Т.VIII, №9. – С.1661–1668.

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ СОСТАВНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Кобзев Г.К. (Иркутск)

Для составного стержня с кусочно постоянными характеристиками наполнителя ρ_i и E_i $(i = 1, 2)$ и одинаковой вязкой связующей рассматривается задача управления движением с управляющей функцией $W(x,t)$:

$$\rho_i \frac{\partial^2 Q_i}{\partial t^2} = E_i \left(\frac{\partial^2 Q_i}{\partial x^2} - \int\limits_0^t K(t-\tau) \frac{\partial^2 Q_i}{\partial x^2}\, d\tau \right) + W(x,t), \tag{1}$$

$$Q(x,0) = \varphi(x), \quad \dot{Q}(x,0) = \psi(x), \quad Q(0,t) = Q(l,t) = 0, \tag{2}$$

финальными условиями $Q(x,T_0) = \dot{Q}(x,T_0) = 0$ и условиями сопряжения при $x = x_0$. $X_n(x)$ и ω_n – собственные функции и числа соответствующей задачи Штурма-Лиувилля [1]. Приближенное решение задачи (1)-(2)

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \tag{3}$$

где $T_n(t)$ – решения интегро-дифференциальных уравнений, получаемых методом усреднения [2], и $Q_t(x,t)$ используется вместе с финальными условиями для получения моментных равенств l-проблемы моментов в $L_p[0,T_0]$ [3]:

$$\int\limits_0^{T_0} \int\limits_0^{l} W(\xi,\tau) e^{\beta_k \tau} \left\{ \begin{array}{c} \sin \Omega_k (T_0 - \tau) \\ \cos \Omega_k (T_0 - \tau) \end{array} \right\} X_k(\xi)\, d\xi\, d\tau = \left\{ \begin{array}{c} A_k \\ B_k \end{array} \right. \tag{4}$$

Для пространства L_2 построение $W(\xi,\tau)$ сводится к решению линейной алгебраической системы ($k = \overline{1,N}$).

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Наука, 1972, – 736 с.

2. Мальцев Л. Е. Приближенное решение некоторых динамических задач вязкоупругости // Механика полимеров, 1978, N 2, с. 210–218.

3. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. ГОНТИ, Харьков, 1938.

ОБ ИТЕРАТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА ПРИ НАЛИЧИИ БОЛЬШИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Кокурин М.Ю. (Йошкар–Ола)

kokurin@marsu.ru

Рассматривается операторное уравнение $F(x) = 0$, $x \in H_1$, где $F : H_1 \to H_2$ – нелинейный дифференцируемый по Фреше оператор с липшицевой производной, H_1, H_2 – гильбертовы пространства. Нерегулярность исходного уравнения означает, что непрерывная обратимость операторов $F'(x)$, $F'^*(x)F'(x)$ для точек x из окрестности $\Omega_R(x^*) = \{x \in H_1 : \|x - x^*\| \leqslant R\}$ искомого решения x^* не предполагается. Считаем, что вместо F доступно приближение $\widetilde{F}$ такое, что $\widetilde{F}(x) = \widehat{F}(x) + \eta$, $\|\widehat{F}(x^*)\| \leqslant \delta$, $\|\widehat{F}'(x^*) - F'(x^*)\| \leqslant \delta$, оператор $\widehat{F}'$ удовлетворяет условию Липшица в $\Omega_R(x^*)$ и кроме того $\sup_{x\in\Omega_R(x^*)} \|\widehat{F}'^*(x)\eta\| \leqslant \omega$ с малым значением ω. Последнее условие выполняется в том случае, когда $\eta = \varphi_m$ $(m \gg 1)$ – элемент *слабо* сходящейся к нулю последовательности $\{\varphi_n\} \subset H_2$, а оператор F таков, что $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega_R(x^*)} \|\widehat{F}'^*(x)h_n\| = 0$ $\forall\{h_n\} : h_n \to 0$ слабо в H_2. Величина δ имеет смысл меры той части возмущения оператора F, которая мала в смысле нормы, а ω является оценкой компоненты возмущения, малой в слабом смысле. При этом слабое возмущение η может не быть малым в смысле нормы H_2. Пусть далее Q – выпуклое замкнутое множество, содержащее x^*, и оператор $\mathcal{F}_Q : H_1 \to H_1$ таков, что $\|\mathcal{F}_Q(x) - y\| \leqslant \|x - y\|$ $\forall x \in H_1, y \in Q$. В качестве примера укажем оператор метрического проектирования на множество Q. Рассматривается итерационный процесс

$$x_0 \in \Omega_R(x^*), \quad x_{n+1} = \mathcal{F}_Q[x_n - \mu_n(\widetilde{F}'^*(x_n)\widetilde{F}(x_n) + \alpha_n(x_n - \xi))].$$

Здесь $\alpha_n, \mu_n > 0$; $\xi \in H_1$ – оценка решения x^*. Предполагается, что начальная невязка допускает приближенное истокообразное представление $x^* - \xi = F'^*(x^*)v + w$, $\|w\| \leqslant \Delta$. Предлагается правило останова итераций $n = N(\delta, \Delta, \omega)$, обеспечивающее оценку погрешности $\|x_{N(\delta,\Delta,\omega)} - x^*\| = O((\delta+\Delta+\omega^{2/3})^{1/2})$. В применении к методу Тихонова для аффинного оператора F в случае $\delta = \Delta = 0$, $\mathcal{F}_Q = E$ аналогичная оценка получена в [1].

Литература

1. Морозов В.А. Регуляризация при больших помехах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т.36. N9. С.13–21.

О НОРМАЛИЗАЦИИ КВАРТИЧНОЙ ФОРМЫ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Колесникова И.В., Сапронов Ю.И. (Воронеж)
Inna384@yandex.ru

При исследовании бифуркаций решений в "реальных" краевых задачах возникает вопрос приведения ключевой функции к нормальной форме и в частности, для трехмерной сборки – в построении квартичной формы нормального вида. [2] Первые результаты в этом направлении были получены еще в середине 19–го века (в теории инвариантов) в работах А.Кэли, С.Аронхольда, А.Клебша и др. [1]. В.И.Арнольдом была разработана общая схема нормализации квазиоднородных особенностей [3], на основе которой можно указать нормальный вид квартичной формы, но при этом оставался в тени вопрос "практического приведения" к нормальному виду произвольной квартичной формы. В настоящем исследовании использованы элементы теории $G-$пространств для изучения невырожденных квартичных форм.

Рассматривается квартичная форма трех переменных

$$W(x_1,x_2,x_3) = a_1\ x_1^4 + a_2\ x_2^4 + a_3\ x_3^4 + b_1\ x_2^2x_3^2 + b_2\ x_1^2x_3^2 + b_3\ x_1^2x_2^2 +$$

$$+c_1\ x_1^2x_2x_3 + c_2\ x_1x_2^2x_3 + c_3\ x_1x_2x_3^2,$$

где $\{a_i,\ b_j,\ c_k\}$ — фиксированный набор коэффициентов, заданный с условием, что квартичная часть имеет конечнократную (27-кратную) особенность в нуле.

Пусть $W(x_1,x_2,x_3) = N(x_1,x_2,x_3) + R(x_1,x_2,x_3).$, где $N(x_1,x_2,x_3) = a_1\ x_1^4 + a_2\ x_2^4 + a_3\ x_3^4 + b_1\ x_2^2x_3^2 + b_2\ x_1^2x_3^2 + b_3\ x_1^2x_2^2,$

$$R(x) = c_1\ x_1^2x_2x_3 + c_2\ x_1x_2^2x_3 + c_3\ x_1x_2x_3^2.$$

Делая замену $x = y + Hy$, где

$H = (h_{jk}),\quad h_{jj} = 0\ \forall j,$

получаем квартичную форму трех переменных

$$\widetilde{W}(y_1,y_2,y_3) = \widetilde{N}(y_1,y_2,y_3) + \widetilde{R}(y_1,y_2,y_3). \tag{1}$$

Приведение квартичной формы к нормальному виду означает подбор такой матрицы H, что

$\widetilde{R}(y_1,y_2,y_3) \equiv 0.$

Литература

1. Крафт Х. Геометрические методы в теории инвариантов. -М.: Мир. 1987. – 312 с.

2. Колесникова И.В. Особенности многомерной сборки и нормализация квартичных форм// Топологические и вариационные методы нелинейного анализа и их приложения. Материалы международной научной конференции ТВМНА - 2005. Воронеж: ВорГУ, 2005. - С.61-62.

3. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО. 2004. – 672 с.

4. Колесникова И.В., Сапронов Ю.И., Царев С.Л. К бифуркационному анализу 2-точечных краевых задач классической механики. Труды ВЗМШ–2006. (в печати).

КОМПЬЮТЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОБЛАСТЕЙ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ДЛЯ ОДНОГО СЛУЧАЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ НА ДВУМЕРНОЙ ПЛОСКОСТИ

Колодежнов В.Н. (Воронеж)

kvn@vgta.vrn.ru

Рассматривается система трехкомпонентных гиперкомплексных чисел при дополнительном условии неотрицательности компонент. Сформулированы основные определения и предложена аксиоматика. Геометрически элементы такой системы интерпретируются точками на двумерной плоскости.

Постулируется два основных варианта задания матрицы умножения базисных единиц. Гиперкомплексные числа, порождаемые этими матрицами, для краткости терминологии называются далее ансамблями третьего порядка, соответственно, первого и второго родов. При этом множество из трех базисных единиц для ансамблей первого рода образуют группу. Множество же базисных единиц для ансамблей второго рода не имеет единичного элемента в смысле групповой операции умножения.

Показано, что ансамбли первого рода представляют собой, по сути, еще одну (наряду с координатной, тригонометрической и экспоненциальной) форму представления комплексных чисел. Ансамбли второго рода образуют самостоятельную числовую систему с “равноправными” базисными единицами.

Для наиболее простой нелинейной, квадратичной функции с параметром, определенной на множестве ансамблей второго рода, рассмотрена процедура итерирования. С помощью ПЭВМ проведено качественное исследование отдельных участков фрактальных границ области, для точек которой аттрактором является бесконечность. Показано, что в плоскости параметра квадратичной функции в окрестности границ основного множества в форме “трехлистника” имеют место структуры типа множества Мандельброта, характерные для комплексных чисел. Рассмотрены особенности некоторых спиральных структур в рамках исследуемого итерационного процесса.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С УЧЕТОМ ДИССИПАЦИИ И ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Колтаков А.В. (Воронеж)

teormech@vgta.vrn.ru

В работе [1] приведено решение задачи о стационарном теплопереносе в слое жидкости, текущей в ограниченном канале. При решении этой задачи учитывалась диссипация механической энергии и зависимость вязкости от температуры.

С учетом допущений представленных в работе [1] получена математическая модель нестационарного теплопереноса, которая включает в себя дифференциальное уравнение энергии с соответствующими начальными условиями. Решение этого дифференциального уравнения было получено методом характеристик. Система характеристических уравнений включала в себя три дифференциальных уравнения. Первые два уравнения для продольной координаты и времени решались прямым интегрированием. Третье уравнение для температуры по форме записи совпадает с видом уравнения, решаемого в [1] для стационарной постановки задачи. При этом имеет место и аналогия в постановке граничных условий. Поэтому для решения этого уравнения использовался метод малого параметра, применение которого к данной задаче описано в [1] для стационарной постановки.

Полученное решение позволило провести численные эксперименты, в ходе которых было изучено влияние критериев подобия (чисел Фурье, Наме-Гриффетса и Био) на распределение температуры по длине канала, а так же на максимальное ее значение.

Литература

1. Колодежнов В.Н. Стационарный теплоперенос в плоском канале конечной длины с учетом диссипации и зависимости вязкости от температуры [Текст] / В.Н. Колодежнов, А.В. Колтаков // Современные проблемы механики и прикладной математики: Сб. трудов междунар. школы-семинара. Часть 1. – Воронеж: ВГУ, 2005. – С. 171 – 174. – ISBN 5-9273-0900-3.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ФОРМЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ[1]

Кононенко Л.И. (Новосибирск)

Volok@math.nsc.ru

Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x, y, \varepsilon), \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, \varepsilon$ — малый положительный параметр, f, g — достаточно гладкие функции, $\dot{x}$, $\dot{y}$ — производные по времени.

Продолжено исследование релаксационных колебаний данной системы в случае $m = n = 1$, начатое в [1, 2]. Приведены условия на функцию g, задающую интегральное многообразие рассматриваемой системы, при которых существуют релаксационные колебания.

Достаточное условие существования релаксационных колебаний. Для существования релаксационных колебаний достаточно, чтобы функция g имела вид $g(x, y, \varepsilon) = (\varphi_1(x) - y)(\varphi_2(x) - y)(\varphi_3(x) - y)$, где $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}), i = 1, 2, 3$, и удовлетворяют следующим условиям:

I. $\varphi_3(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \varphi_1(x) \quad \forall x \in [a, b]$;

II. $\frac{\partial g}{\partial y}(a, \varphi_2(a), 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(a, \varphi_3(a), 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(b, \varphi_1(b), 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(b, \varphi_2(b), 0) = 0$;

III. $-(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_2 - \varphi_1) < 0, -(\varphi_3 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_3) < 0, -(\varphi_1 - \varphi_3)(\varphi_2 - \varphi_3) < 0$, где $\varphi_1 = \varphi_1(x), \varphi_2 = \varphi_2(x), \varphi_3 = \varphi_3(x) \quad \forall x \in [a, b]$.

Литература

1. Гольдштейн В. М., Соболев В. А. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1988.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05–01–00302).

2. Кононенко Л.И. Релаксационные колебания в сингулярных системах с медленными и быстрыми переменными // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. VII. №3(19). С. 102–110.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА $L_{pq}(b;R)$

Копежанова А.Н., Тлеуханова Н.Т. (Казахстан, Астана)
er-nurs@yandex.ru

В работе вводится шкала пространств L_{pq}, являющиеся обобщениеми пространств Лоренца. Доказывается интерполяционная теорема для этих шкал.

Пусть f-определенная на R измеримая функция.Функцию

$$f^*(t) = \inf\{\sigma : m(\sigma, f) \leqslant t\},$$

где $m(\sigma, f) = \mu\{x : |f(x)| > \sigma\}$ назовем невозрастающей перестановкой функций f.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Обозначим через $L_{pq}(b)$, пространств всех измеримых функции f определенных в R для которых

$$\|f\|_{L_{pq}(b)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{b_k}^{b_{k+1}} (f^*(t))^p \, dt \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

В случае, когда последовательность $\{b_k\}_{k=-\infty}^{\infty} = \{2^k\}$, данные пространства совпадают с классическими пространствами Лоренца L_{pq}.

Теорема*Пусть* $1 \leqslant p_0 < p_1 < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Пусть $b = \{b_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $\{d_m\}_{m=-\infty}^{+\infty}$*-две последовательности удовлетворяющих условиям: при любых*$\alpha > 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{m} (b_k - b_{k+1})^\alpha \sim (d_m - d_{m+1})^\alpha$$

при любых$\beta < 0$

$$\sum_{k=-m}^{+\infty} (b_{k+1} - b_k)^\beta \sim (d_m - d_{m+1})^\beta \text{и}$$

если T-линейный оператор ограничен:

$$T : L_{p_0 1}(d) \to L_{p_0 \infty}(b)$$

$$T : L_{p_1 1}(d) \to L_{p_1 \infty}(b)$$

тогда

$$T : L_{pq}(d) \to L_{pq}(b), \text{где} 0 < \theta < 1, \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

Когда $\{b_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} = \{2^k\}$ и $\{d_k\}_{k=-\infty}^{+\infty} = \{2^k\}$ удовлетворяющих условиям теоремы, и следовательно из теоремы следует интерполяционная теорема для пространств Лоренца $L_{pq}(\{2^k\})$.

Литература

1. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. Москва,“Мир“1980г.

2. Трибель Х. Теория функциональных пространств. Москва, „Мир“ 1986г.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Корнев В.В. (Саратов)

Обозначим через L дифференциальный оператор:

$$Ly = y^{(n)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y, \quad x \in [0,1], \, p_k(x) \in C[0,1]$$

с регулярными двухточечными краевыми условиями.
Предположим, что краевые условия регулярны, n–нечетное.

В работе [1] для разложений по собственным функциям оператора L был доказан аналог теоремы Зигмунда об абсолютной сходимости тригонометриченских рядов Фурье. Следующая теорема усиливает этот результат и является аналогом известной теоремы Саса.

Теорема. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет тем краевым условиям в определении оператора L, которые не содержат производных, и выполняются условия:*

1) $f(0) = f(1)$;

2) либо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int\limits_0^{1/n} |f(x) - f(0)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty,$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00003)

либо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int\limits_0^{1/n} |f(1-x) - f(1)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty$*;*

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{(2)}(f, \frac{1}{n}) < \infty$*, где* $\omega^{(2)}(f, \frac{1}{n})$ *– квадратический модуль непрерывности функции* $f(x)$*, продолженной периодически.*

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\varphi_n(x)| < \infty$*, где* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ *– ряд Фурье функции* $f(x)$ *по собственным и присоединенным функуиям оператора* L*.*

Замечание. Схожие результаты имеют место и для четного n. Но в этом случае собственные значения не всегда являются однократными, и тогда абсолютная равномерная сходимость ряда Фурье будет иметь место при некоторой группировке членов.

Литература

1. Корнев В.В., Хромов А.П. Об абсолютной сходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень, 2005. – Т. 5, No 1. – С. 13-23.

СТРОГОСТЬ ИЛИ ПОНЯТНОСТЬ?

Костенко И.П. (Краснодар)

В современной математической педагогике императивом является строгое и логически систематизированное изложение.

В то же время фактом является непонимание математики абсолютным большинством учащихся школы и вуза и, как следствие, – отвращение к ней.

Эти два факта жёстко связаны: первый является основной причиной второго.

К обсуждению предлагается тезис: строгое изложение математики всегда затрудняет её понимание и даже делает его для новичка невозможным, потому что отдаляет от смыслов, если не уничтожает смысл вообще.

Несколько аргументов.

Слово “понимание” органически связано со словом “смысл”. Понимание есть всегда понимание смыслов, главных смыслов. Термин “строгость” так же органически связан со термином “формальная”. Как нельзя соединить “формальный смысл”, так же несоединимы “строгость” и “понимание”.

Теория Гёделя и Гильбертовская аксиоматика доказали, что “абсолютная строгость возможна только и благодаря отсутствию смысла” (Р. Том, 1972).

Преодолеть “строгость” и дойти до смыслов, т. е. до понимания способен лишь искушённый профессиионал-математик.

Озабоченность преподавателя (автора учебной книги) строгостью “изложения” убивает в нём педагога. Он становится не способным стать на точку зрения ученика, понять его затруднения, найти верные методические решения.

Строгость образцовой математической теории и пресловутая “математическая культура” формируют в сознании математика (преподавателя) жёсткий шаблон учебной дисциплины, который он не в состоянии изменить. Тем самым, в преподавание не допускается методика и педагогика.

Вместе с тем, строгость (точность определений, логичность рассуждений) неотделима от математики-науки. Как быть?

Возникает *проблема меры строгости* в учебном курсе.

Предлагается обсудить и определить “нестрогости”, допустимые в учебном математическом курсе, например, для студентов технических вузов.

Допустимы *неполные определения*, т. е. определения, где опущены некоторые тонкие ограничения, объяснить необходимость которых новичку невозможно. Пример – определение общего решения дифференциального уравнения, как формулы, содержащей произвольную постоянную, вариация которой даёт бесконечно много разных решений. Другой пример – определение непрерывной случайной величины, значения которой заполняют некоторый промежуток “сплошь” (Е. С. Вентцель).

Допустимы *доказательства не в полной общности* и даже на характерных примерах, а также с помощью чертежа (теорема Лагранжа).

Методы решения математических задач (метод Гаусса решения систем уравнений, вычисление интегралов, решение дифференциальных уравнений и др.) *не всегда нужно обосновывать “в общем виде”*. Методом нужно владеть.

Что ещё??

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА НА ОБЛАСТИ

Крепкогорский В.Л. (Казань)

Рассматривается интерполяция пространств Бесова

$(B^{s_0}_{p_0}(G), B^{s_1}_{p_1}(G))_{\theta,q}$ в «недиагональном» случае,на области $G \subset R^n$ с сильным условием конуса [1].

Пусть $\mathcal{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \bigcup \{0\}$.

При $x, y \in R_n, a \in R_n, h \in R_1, E \subset G \subset R_n$, $m \in \mathcal{N}_0$ положим

$$\Delta^m(y, E)f(x) := \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \frac{m!}{j!\,(m-j)!} f(x + jy)$$

при $[x,\, x + my] \subset E$ и $\Delta^m(y, E)f(x) := 0$, если это не так;

$$\Delta^m_i(h, E)f(x) := \Delta^m(he^i, E)f(x),\ i = 1, 2, 3.., n;$$

e^i - единичный вектор i-ая координата которого равна 1, а остальные 0.

Пусть $Q_0 = (-1; 1)^n$, при $t > 0$ рассмотрим множество $G_t := \{x : x + tQ_0 \subset G\}$.

При $m > 0$ через $\delta^{(m)}_i(f, x, t) = \int_{-1}^{1} \left|\Delta^m_i(tu, G_t)f(x)\right| du$ обозначим модуль непрерывности. При $1 < p < \infty, 1 \leqslant q \leqslant \infty, -\infty < s < \infty, -\infty < k < \infty$ определим норму интерполяционного пространства

$$\|f|BL^{s,k}_{p,q}(G)\|^{(2)} = \|f|L_{p,q}(G)\| +$$

$$+ \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\delta^{(m)}_i(f, x, d^{-j}) \right) \cdot d^{j(s-k/p)} \right)^*_{d^j k \eta \otimes \mu} \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

ТЕОРЕМА.*Если для* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. *Числа* k *и* b *– коэффициенты из уравнения прямой, проходящей через точки* $(1/p_i, s_i)$, *то*

$$(B^{s_0}_{p_0}(G), B^{s_1}_{p_1}(G))_{\theta,q} = \left(F^{s_0}_{p_0,p_0}(G), F^{s_1}_{p_1,p_1}(G)\right)_{\theta,q} = BL^{s,k}_{p,q}(G).$$

Литература

1. Бесов О.В. О пространствах Соболева-Луивилля и Лизоркина-Трибеля на области // Тр. Матем. ин-та РАН имени Стеклова. 1990. Т.192. С.20 - 34.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРИСТСКОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ

Курбыко И.Ф., Левизов А.С. (Владимир)

sl@vpti.vladimir.ru

С помощью многомерных методов математической статистики исследуется туристская инфраструктура регионов России. На основе данных Федеральной службы государственной статистики формируется и подвергается статистическому анализу матрица, состоящая из 9 базисных показателей по 80 регионам. Показателями (в процентном выражении по отношению к своему выборочному среднему) выступают: X_1 - число мест в средствах размещения, X_2- число мест в учреждениях питания, X_3- число турфирм, X_4- число музеев, X_5- число театров, X_6 - число культурно-досуговых учреждений, X_7- число спортивных сооружений, X_8- протяженность железных дорог, X_9- протяженность автомобильных дорог. Сформированы 4 группы (A, B, C, D) регионов, однородных по степени инфраструктурной обустроенности. Анализируется зависимость числа туристов Y - результирующего признака от сопутствующих факторов $\{X_i\}(i=1,\ldots,9)$. Построена матрица парных коэффициентов корреляции, позволяющая судить о линейной связи между факторами. Методом множественной линейной регрессии для групп *A, B, C, D* получены следующие линейные модели: $Y_A = -8,23 + 0,11X_1 + 0,13X_2 + 0,34X_3 - 0,30X_4 - 0,08X_5 + 0,36X_6 + 0,06X_7 - 0,07X_8 + 0,70X_9$, $Y_B = -31,01 + 0,07X_1 + 0,15X_2 - 0,34X_3 - 0,04X_4 - 0,03X_5 + 0,31X_6 + 0,34X_7 + 0,21X_8 + 0,92X_9$, $Y_C = -3,60 + 0,13X_1 - 0,04X_2 + 0,09X_3 + 0,18X_4 - 0,23X_5 - 0,05X_6 + 0,57X_7 - 0,0006X_8 + 0,60X_9$, $Y_D = -15,25 + 0,43X_1 - 0,14X_2 - 0,52X_3 - 0,23X_4 + 0,30X_5 + 0,44X_6 + 0,19X_7 + 0,27X_8 + 0,42X_9$. Вычислены коэффициенты детерминации d_1*=0,98;* d_2*=0,81;* d_3*=0,84;* d_4*=0,99*, которые дают процент общей вариабельности количества туристов за счет изменения исследуемых девяти факторов. Соответственно, для групп *A, B, C, D* имеем: *98%; 81%; 84%; 99%.* Модели показывают, что рост каждого фактора инфраструктуры на 1 % по отношению к своему выборочному среднему значению приводит к росту результирующего показателя по группе A - на 1,25 %; по группе B - на 1,59 %; по группе C - на 1,24 %; по группе D - на 1,16 %. Модели позволяют выделить наиболее значимые факторы по каждой группе регионов. Для группы A - факторы X_2, X_9; для B - X_9, X_6, X_7; для C - X_9; для D - X_5, X_6, X_9.

О БАЗИСАХ РИССА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ОТРАЖЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

Курдюмов В.П. (Саратов)

Обозначим через L оператор

$$ay''(x) + y''(1-x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y'(1-x), \; x \in [0,1],$$

$$\int\limits_0^1 y(t)\, d\sigma_i(t) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Предположим, что $\operatorname{Var} \sigma_i(t) < \infty$, $i = 1,2$, $\sigma_i(+0) - \sigma_i(0) = \alpha_i$, $\sigma_i(1) - \sigma_i(1-0) = \beta_i$, $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0$, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, $a^2 \neq 1$ и обозначим $q_1 = (a+1)^{-1/2}$, $q_2 = (a-1)^{-1/2}$.

Пусть λ_k - собственные значения оператора L. Зафиксируем некотрую ветвь функции $\sqrt{\lambda}$ и обозначим $\rho_k = \sqrt{\lambda_k}$. Тогда числа ρ_k расположены в некоторых полуполосах $P_i = \{\rho : |\operatorname{Re} \rho q_i| \leqslant h, \operatorname{Jm} \rho q_i \geqslant 0\}$, $i = 1,2$, причем в любом прямоугольнике $|\operatorname{Jm} \rho q_i - C| \leqslant 1$, где $C \in R$ и произвольно, каждой полуполосы их число ограничено. Каждую полуполосу P_i представим в виде объединения конечного числа различных групп прямоугольников $\Pi_{k,i}$, границы которых $\Gamma_{k,i}$ состоят из отрезков: $\operatorname{Re} \rho q_i = \pm h$, $C_{k,i} \leqslant \operatorname{Jm} \rho q_i \leqslant C_{k+1,i}$; $\operatorname{Jm} \rho q_i = C_{k,i}$, $\operatorname{Jm} \rho q_i = C_{k+1,i}$, $|\operatorname{Re} \rho q_i| \leqslant h$; так что в некоторой δ–окрестности $\Gamma_{k,i}$ нет чисел ρ_k. Каждая группа состоит из равных между собой прямоугольников и для каждого прямоугольника конкретной группы существует натуральное $t_{k,i}$, что $\Gamma_{k,i} = \Gamma_i + iq_i^{-1}t_{k,i}$, где Γ_i – некоторый фиксированный контур этой группы. Пусть Π_0 – ограниченная односвязная область, содержащая $P_1 \cap P_2$ и в δ–окрестности границы Π_0 нет числа ρ_k.

Теорема. *Система корневых функций оператора L образует базис Рисса со скобками в $L_2[0,1]$. При этом в скобки нужно объединять те корневые функции, которые соответствуют собственным значениям, для которых числа ρ_k попали в Π_0, $\Pi_{k,i}$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00003)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Курохтин В.Т. (Москва)
vkt@rambler.ru

Еще в 1941 году E. Orovan писал: "Развитию динамики пластического скольжения в течение многих лет сильно препятствовала кажущаяся правдоподобной, но на самом деле ложная гипотеза, унаследованная из инженерной механики. Эта гипотеза утверждает, что пластические свойства материала могут быть описаны кривой напряжение-деформация. Другими словами эта гипотеза предполагает, что динамический закон пластического скольжения содержит связь между напряжением и деформацией". Поэтому в данной работе предлагается использовать зависимость величины деформации от величины внешней энергии, расходуемой во время процесса деформирования. Физическая суть пластического деформирования есть лавинообразный рост дефектов кристаллической решётки, обусловленный притоком энергии извне. Причем эта энергия выделяется главным образом вблизи поверхностей скольжения, которые с позиций теории функций пространственных комплексных переменных можно трактовать как конусы фильтры делителей нуля (см. В.И. Елисеев Введение в теорию функций пространственного комплексного переменного НИАТ 1990, с. 190). Кроме того недавние исследования российских учёных под руководством В.Е. Панина обнаружили феномен возникновения вихрей при зарождении пластических деформаций. Поэтому автором выдвигается гипотеза о возникновении в теле вихревых движений отдельных блоков, образующихся в процессе импульсного деформирования. Процесс образования блоков и их вихревого движения сопровождается ростом энтропии и увеличением внутренней энергии. Рассматривается задача о распространении упругопластических волн в массивном полубесконечном стержне круглого сечения.

О НЕРАВЕНСТВАХ ВЛОЖЕНИЯ МНОГОВЕСОВЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Кусаинова Л.К., Искакова Г.Ш. (Караганда)
kusainova@kargu.krg.kz

В работе получены неравенства вложения многовесого анизотропного пространство Соболева $W^{\bar{l}} = W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(G;\bar{\omega})$ в пространства

Лоренца $L^{q\infty}_\rho(G)$ и Лебега $L^q_\rho(G)$. Норма в $W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(G;\bar{\omega})$ задается равенством

$$|f;W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(G;\bar{\omega})| = |f;L^p_{\omega_0}(G)| + \sum_{i=1}^{n} |D^{l_i}_i f; L^{p_i}_{\omega_i}(G)|,$$

где $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ - целый вектор с $l_i \geqslant 1$, $\bar{p} = (p_0, p_1, \dots, p_n)$, $1 < p_i < \infty$, ρ, ω_i $(i = 0, 1, \dots, n)$- весовые функции в области $G \subset \mathbb{R}^n$,

$$|f;L^q_\rho(G)| = \left(\int_G |f(x)|^q \rho(x)dx\right)^{1/q},$$

$$|f;L^{q\infty}_\rho| = \sup_{t>0} t(\rho(|f|>t))^{1/q}.$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $0 < \lambda_i l_i = \alpha < 1$. Для $t > 0$ положим $Q_{(t,\lambda)}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y_i - x_i| < t^{\lambda_i}, \ i = 1, \dots, n\}$, $\delta^\lambda Q = Q_{(\delta t,\lambda)}(x)$. Пусть далее $v(x)$- положительная ограниченная функция в области $G \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям:
1) $\forall x \in G \ \ 2^\lambda Q(x) \subset G$,
2) $\exists b > 1 : \ b^{-1} < v(y)/v(x) < b$, если $y \in Q(x)$,
где $Q(x) = Q_{(v(x),\lambda)}(x)$. Обозначим через J_v семейство всех параллелепипедов $Q_{(t,\lambda)} \subset Q(x)$, $x \in G$, через M^*f максимальную функцию

$$M^*f(x) \overset{\text{def}}{=} \sup_{Q\in J_v, Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|.$$

Ниже будем полагать, что $1 < p_i \leqslant q < \infty$, $p'_i = p_i/(p_i - 1)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, $|1:\bar{l}| = \sum\limits_{i=1}^{n} 1/l_i$, $(1 - 1/q)\sum\limits_{i=1}^{n} 1/l_i < 1$.

Теорема 1.*Пусть веса* ρ, ω_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ *подчиняются условиям:*
a) $A = \int\limits_G (M\omega_0^{1-p'}(x))^{q/p'} v(x)^{-|\lambda|q/p} \rho(x)dx < \infty$,
b) $B_i = \sup\limits_{Q\in J_v} |Q|^{-1+|1:\bar{l}|}\left(\int\limits_Q \rho(x)dx\right)^{1/q}\left(\int\limits_Q \omega_i^{1-p'}(x)dx\right)^{1/p_i} < \infty, (i = 1, \dots, n)$.
Тогда справедливо неравенство

$$|f;L^{q\infty}_\rho(G)| \leqslant C|f;W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(G,\bar{\omega})|$$

с наилучшей постоянной $C \leqslant c(A + \sum\limits_{i=1}^{n} B_i)$.

Теорема 2. *Пусть веса* ρ, ω_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ *подчиняются условиям a), b) теоремы 1 и к тому же:*

c) $D_i = \left(\int\limits_G \rho(x) \left[\int\limits_{G \setminus \delta^\lambda Q(x)} \frac{\omega^{1-p'_i}_i(y)dy}{|y-x|_\lambda^{(|\lambda|-\alpha)p'_i}} \right]^{q/p'_i} dx < \infty \right)^{1/q} (i = 1, \dots, n),$

где $\delta = 2^{-n}/16$. *Тогда справедливо неравенство*

$$|u; L^q_\rho(G)| \leqslant C|u; W^{\bar{l}}_{\bar{p}}(G; \bar{\omega})|$$

с наилучшей постоянной $C \leqslant c(A + \sum\limits_{i=1}^{n} B_i + \sum\limits_{i=1}^{n} D_i)$.

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ[1]

Кутерин Ф.А., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

msumin@sinn.ru

Доклад посвящен обсуждению алгоритма двойственной регуляризации [1] для решения обратной задачи финального наблюдения для абстрактного параболического уравнения. Пусть H – гильбертово пространство, $A : V \to V^*$ – энергетическое расширение линейного неограниченного симметричного положительно определенного оператора с плотной в H областью определения V. Рассматривается обратная задача определения правой части $u \in U$ и начального условия $w \in W$, где $U \subset L^2(0, T; H)$, $W \subset H$ – выпуклые замкнутые множества, для абстрактной задачи Коши (см., например, [2])

$$y'(t) + Ay(t) = u(t), \quad y(0) = v \quad t \in [0, T]$$

по приближенно известному в финальный момент времени T значению h решения $y[u, w](T) \in H$.

Двойственный алгоритм заключается в непосредственном решении на основе метода регуляризации Тихонова задачи

$$V(\lambda) \equiv \min\{\|u\|^2 + \|w\|^2 + \langle \lambda, y[u, w](T) - h \rangle\} \to \sup, \quad \lambda \in H,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00460)

двойственной к задаче с операторным ограничением типа равенства

$$\|u\|^2 + \|w\|^2 \to \min, \;\; y[u,w](T) = h, \; u \in U, \, w \in W,$$

эквивалентной исходной обратной задаче. Обсуждается вопрос итеративной регуляризации [1] этого двойственного алгоритма. Рассматривается также приложение этих абстрактных результатов к решению ряда конкретных обратных задач теплопроводности.

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризованный градиентный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 11. С.2001-2019.

2. Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М. Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999.

НЕКОТОРЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ВЛИЯНИЯ УПРУГОЙ СЕТИ

Ладченко Я.С. (Ставрополь)

Для упругой системы, имеющей форму связного графа $\Gamma \subset R^3$ с потенциальной энергией

$$\Phi(u) = \int\limits_\Gamma \frac{pu'^2}{2} dx - \int\limits_\Gamma uf dx,$$

функция влияния $H(x,s)$ может быть определена как минималь функционала

$$\Phi(u) = \int\limits_\Gamma \frac{pu'^2}{2} dx - u(s).$$

Здесь, как и выше, интеграл понимается как сумма интегралов по всем ребрам Г. Оказывается, для того, чтобы $H(x,s)$ была функцией влияния исходной задачи, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int pH'_x(x,s)h(x)dx - h(s) = 0$$

для любой допустимой $h(x)$.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РЕЖИМОМ

Лашин Д.А. (Москва)
dalashin@gmail.com

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t),\ u_x(l,t) = \psi(t),\ t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 < x < l, \tag{3}$$

где $\varphi(t) \in W_2^1(0,T)$, $\psi(t) \in W_2^1(0,T)$ для любого $T > 0$.

Будем рассматривать обобщенное решение задачи (1) – (3) из энергетического класса, то есть функцию $u(x,t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$, где $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ (см. [1], с.179).

Пусть $T > 0$, $h(t) \in W_2^1(0,T)$. Обозначим $U = \{\varphi \in W_2^1(0,T),\ \varphi_1 \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi_2\}$, где φ_1, φ_2 – некоторые постоянные.

Для произвольного $c \in (0,l]$ определим функционал

$$J[\varphi] = \int_0^T (u(c,t) - h(t))^2 dt.$$

Рассмотрим задачу минимизации данного функционала. Обозначим $\inf\limits_{\varphi \in U} J[\varphi] = m$.

Физический смысл задачи заключается в том, что на одном конце бесконечно тонкого стерженя длины l в течение времени T поддерживают температуру $\varphi(t)$ (управляющая функция), а на другом конце задан тепловой поток $\psi(t)$. Задача состоит в нахождении такой управляющей функции $\varphi_0(t)$, при которой температура в определенной точке c была бы максимально близка к заданной температуре $h(t)$. Оценка качества управления осуществляется с помощью функционала $J[\varphi]$. Отметим, что подобные задачи расматривались, например, в [2] (с. 28).

Теорема. *Существует функция $\varphi_0(t) \in U$, такая что $m = J[\varphi_0]$.*

Литература

[1]] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973.

[2] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир. 1972.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА ДВУМЕРНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лашина И.Н. (Москва)
i-n-k@yandex.ru

Предлагаемая программа автоматизирует построение фазового портрета двумерной автономной динамической линейной или нелинейной (допускающей линеаризацию) системы дифференциальных уравнений. Входной информацией для программы является система дифференциальных уравнений и область, в которой необходимо построить фазовый портрет. Программа определяет особые точки следующих типов: устойчивый и неустойчивый узел, в том числе вырожденный и дикритический, седло, центр (для линейной системы), устойчивый и неустойчивый фокус. Правые части в исходной системе могут быть сложными функциями следующих элементарных функций: тригонометрических, обратных тригонометрических, логарифмических, экспоненциальных и степенных.

Фазовый портрет строится в окрестности каждой особой точки отдельно и на заданной области для всей системы в целом. При этом масштаб и точность построения задает пользователь. Выходной информацией программы являются: таблица особых точек системы с указанием типа особой точки, ее устойчивости, собственных значений, а также графиком траекторий решений в окрестности каждой особой точки, процесс решения задачи с вычислением производных, отысканием собственных значений и векторов, соответствующих особым точкам, фазовый портрет системы в указанной пользователем области. После введения исследуемой системы программа выполняет синтаксический разбор введенных выражений. При вычислении производных программа применяет алгоритм, позволяющий упрощать полученные выражения. При отладке программы использовались задачи из [1].

Предлагаемая работа представляет собой пример современной активной формы обучения для очного, заочного, и дистанционного обучения и может быть использована в научных исследованиях. Первая редакция программы представлена на сайте www.fito-agro.ru/soft/Portret.rar

Литература

. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравне-

ниям. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2000.

О СОХРАНЕНИИ РАЗРЕШИМОСТИ "В ЦЕЛОМ" ЗАДАЧИ ГУРСА-ДАРБУ[1]

Лисаченко И.В., Сумин В.И. (Нижний Новгород)
v_sumin@mail.ru

Рассматривается краевая задача Гурса-Дарбу

$$\begin{aligned} &x''_{t_1t_2}(t) = g(t, x(t), x'_{t_1}(t), x'_{t_2}(t)), t \in \Pi \equiv [0,1]^2, \\ &x(t_1, 0) = \varphi_1(t_1), t_1 \in [0,1]; x(0, t_2) = \varphi_2(t_2), t_2 \in [0,1], \end{aligned} \qquad (1)$$

где $g(t,l) : \Pi \times R^{3k} \to R^k$ вместе с $g'_l(t,l)$ измерима по t $\forall l$ и непрерывна по l для п.в. t, $\varphi_i(t_i) : [0,1] \to R^k$ абсолютно-непрерывны, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. В [1] получены достаточные условия сохранения глобальной разрешимости (1) при возмущении правой части и граничных функций в случае решений с ограниченной смешанной производной. В докладе обсуждается развитие результатов [1] в случае, когда глобальное решение (1) естественно искать в классе W функций со смешанной производной из $L_p^k \equiv L_p^k(\Pi)$, $p \in (1,\infty)$. Пусть: $\varphi'_1, \varphi'_2 \in L_p^k[0,1]$; $f(t,l) \equiv g(t, l_1 + \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), l_2 + \varphi'_1(t_1), l_3 + \varphi'_2(t_2))$; $\mathbf{A}[z] \equiv \{A_1[z], A_2[z], A_3[z]\}$, $A_1[z](t) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} z(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2$, $A_2[z](t) = \int_0^{t_2} z(t_1,\xi)d\xi$, $A_3[z](t) = \int_0^{t_1} z(\xi, t_2)d\xi$; задана функция $N(\cdot) : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$; Ψ – класс всех троек $\psi \equiv \{g, \varphi_1, \varphi_2\}$ таких, что формула $F[z](t) \equiv f(t, A[z](t))$ определяет оператор $F[\cdot] : L_p^k \to L_p^k$ и $\left\| f'_l(\cdot, A[z](\cdot)) \right\|_{L_p^{k\times k} \times \left(L_\infty^{k\times k}\right)^2} \leqslant N(M)$ при $\|z\|_{L_p^k} \leqslant M$. Каждой тройке из Ψ отвечает не более одного решения (1) из W. Пусть Ψ_0 — та часть Ψ, каждому элементу которой отвечает глобальное решение (1) класса W. Для $\psi = \{g, \varphi_1, \varphi_2\}$ из Ψ и $\psi_0 = \{g_0, \varphi_{01}, \varphi_{02}\}$ из Ψ_0 положим $\Delta[\psi,\psi_0](x_0) = g(t, x_0 + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2, x'_{0t_1} + \Delta\varphi'_1, x'_{0t2} + \Delta\varphi'_2) - g_0(t, x_0, x'_{0t_1}, x'_{0t2})$, где $\Delta\varphi_1 \equiv \varphi_1(t_1) - \varphi_{01}(t_1)$, $\Delta\varphi_2 \equiv \varphi_2(t_2) - \varphi_{02}(t_2)$, x_0 — глобальное решение (1) из W, отвечающее тройке ψ_0.

Теорема.$\forall\ \psi_0 \in \Psi_0\ \exists\ \delta > 0,\ C > 0$: $\psi \in \Psi$, $\|\Delta[\psi,\psi_0]\|_{L_p^k} < \delta \Rightarrow \psi \in \Psi_0$, $\|(x - x_0)''_{t_1t_2}\|_{L_p^k} \leqslant C\|\Delta[\psi,\psi_0]\|_{L_p^k}$, где x — решение (1), отвечающее ψ.

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (проект 04-01-00460).

Литература

1. Сумин В.И. // Украинский матем. журн. 1991. Т.43. № 4. С.555-561.

ДВОЙСТВЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ[1]

Лисаченко М.И., Сумин М.И. (Нижний Новгород)

m.sumin@mm.unn.ru

Доклад посвящен обсуждению алгоритма двойственной регуляризации [1] для приближенного решения задачи оптимального управления с поточечным фазовым ограничением и с сильно выпуклым целевым функционалом

$$I_0(u) \to \min,\ g(t, x[u](t)) \leqslant 0,\ t \in [0, T],\ u \in \mathcal{D}, \tag{1}$$

где $I_0(u) \equiv \int_0^T (\langle A_0(t)x[u](t), x[u](t)\rangle + \langle B_0(t)u(t), u(t)\rangle)\, dt, g(t, x) \equiv g_1(t) + \langle g_2(t), x\rangle$, $\mathcal{D} \equiv \{u \in L_2(0, T) : u(t) \in U$ п.в. на $(0, T)\}$, $U \subset R^m$ - выпуклый компакт, $x[u]$ - решение линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t),\ \ x(0) = x_0,\ \ x \in R^n.$$

Под двойственной регуляризацией задачи (1) понимается регуляризация неустойчивого к ошибкам исходных данных классического двойственного алгоритма Удзавы (см., например, [2]), заключающаяся в непосредственном решении на основе градиентного метода регуляризованной по Тихонову двойственной к (1) задачи. Показывается, что при согласованном стремлении к нулю ошибки задания исходных данных δ и параметра регуляризации α имеет место сильная сходимость в метрике $L_2(0, T)$ приближенных решений к решению исходной (невозмущенной) задачи вне зависимости от того разрешима или нет двойственная к (1) задача. Рассматривается вопрос итеративной регуляризации обсуждаемого двойственного алгоритма, а также вопрос останова итерационного процесса в случае конечной фиксированной ошибки задания исходных данных δ.

Литература

1. Сумин М.И. Регуляризованный двойственный метод решения обратной задачи финального наблюдения для параболического

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00460)

уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т.44. № 11. С.2001-2019.

2. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИИ КАРАТЕОДОРИ[1]

Лопушанская Е.В. (Воронеж)

kate_lopushanskaya@yahoo.com

В работе М. Г. Крейна, Г. Лангера [1] было найдено представление обобщенной функции Неванлинна в области $W_\nu = \{z \in C_0, |argz - \frac{\pi}{2}| \leqslant v\}$, где $0 \leqslant v < \frac{\pi}{2}$. Обобщенная функция Каратеодори связана с обобщенной функцией Неванлинны с помощью дробно-линейного преобразования аргумента.

Известно (см.,напр., [2, глава V,§3]), что функция f является функцией Каратеодори тогда и только тогда, когда существует пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$, унитарный оператор $V : \Pi_\varkappa \to \Pi_\varkappa$ и порождающий элемент $v \in \Pi_\varkappa$ такие, что:

$$f(\lambda) = f(0) + 2\lambda[(V - \lambda)^{-1}v, v], \quad (\lambda \in \Omega_\nu \setminus \sigma_p(V)). \tag{1}$$

Для обобщенной функции Каратеодори доказан аналог теоремы М.Г.Крейна, Г. Лангера для функций Неванлинны, основанный на следующем результате:

Лемма. Пусть $\Omega_\nu = \{\lambda : \lambda = \frac{\alpha - i}{\alpha + i}, \quad \alpha \in W_\nu\}$.

Функция f удовлетворяет свойствам:

(1) $f(\lambda) \in C_\varkappa$;

(2) $\overline{\lim\limits_{\substack{\lambda\to 1\\ \lambda\in\Omega_\nu}}} \frac{Ref(\lambda)}{|1-\lambda|} < \infty$;

(3) $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 1\\ \lambda\in\Omega_\nu}} f(\lambda) = 0$,

тогда и только тогда, когда порождающий элемент $v \in \Pi_\varkappa$ в представлении (1) принадлежит $\mathrm{dom}(V - I)^{-1}$ и представление (1) функции f принимает вид:

$$f(\lambda) = -2(\lambda - 1)[(V - \lambda)^{-1}v, (V - I)^{-1}v] \qquad (\lambda \in \Omega_\nu \setminus \sigma_p(V)).$$

Литература

1. Krein M.G., Langer H.K. Uber einige Forsetzungsprobleme die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren in Raume $\Pi_\varkappa$

[1] Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а.

zusammenhangen, I: Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen.- Math. Nachr., 1977, 77, S. 193-206.

2. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.-М.:Наука (1986)

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ[1]

Луконина А.С. (Саратов)

Рассматривается оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = \beta y'(x) + y'(1-x) + p_1(x)y(x) + p_2(x)y(1-x),\ x \in [0,1],$$

где $\beta^2 \neq 1$, $p_i(x) \in C^1[0,1]\,(i = 1,2)$ и интегральным граничным условием

$$U(y) = \int_0^1 p(t)\,y(t)\,dt = 0, \quad p(t) = \frac{k(t)}{t^\alpha(1-t)^\alpha},\ 0 < \alpha < 1$$

На $k(t)$ накладываются условия:

1) $k(t) \in C[0,1] \cap V[0,1]$,

2) $k^2(1) - \gamma^2 k^2(0) \neq 0, \quad k^2(0) - \gamma^2 k^2(1) \neq 0, \quad \gamma = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}$

Теорема. *Система собственных и присоединенных функций оператора L образуют базис Рисса со скобками в $L_2[0,1]$.*

Литература

1. Курдюмов В.П., Хромов А.П. О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Матем. заметки – 2004 – Т. 76, № 1 – С. 97–110.

2. Хромов А.П. Об аналоге теоремы Жордана-Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Докл. РАЕН – 2004 – № 4 – С. 80–87.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00003)

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЯМЫМ СДВИГОМ В ОБЛАСТЬ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Лысенко З.М., Матвиюк Л.В., Нечаев А.П. (Одесса)

Построена теория Нётера [1] задачи об отыскании аналитической в односвязной области D с простой ляпуновской границей Γ функции $\varphi(z)$, представимой интегралом типа Коши с плотностью из $L_p(\Gamma)$ $(1 < p < \infty)$ по следующему условию:

$$c(\xi)\varphi(\xi) = a(\xi)\varphi[\theta(\xi)] + b(\xi)\overline{\varphi[\omega(\xi)]} + h(\xi), \tag{1}$$

$\xi \in \gamma$. Здесь γ — простой разомкнутый контур, лежащий в D и такой, что $\Gamma \cap \gamma = \{t_1, \ldots, t_m\}$, при этом $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \cup_{i=1}^{m-1}[t_i, t_{i+1}]$, $\Gamma_2 = [t_m, t_1]$ ($[\tau, t]$ — дуга контура Γ, пробегаемая от τ к t в положительном направлении); сохраняющие ориентацию сдвиги $\theta : \gamma \to [t_1, t_m]$ и $\omega : \gamma \to [t_m, t_1]$ имеют отличные от нуля производные; a, b, c — кусочно–непрерывные функции ($a(\xi) \neq 0$, $b(\xi) \neq 0$, $c(\xi) \neq 0$, $\xi \in \gamma$); $h \in L_p(\gamma)$.

Построение теории Нётера задачи (1) сводится к построению теории Нётера некоторого сингулярного интегрального оператора с карлемановским [1] сдвигом α и сдвигом β контура Γ в область D. Отметим, что, в силу условия $\Gamma \cap \gamma \neq \varnothing$, возникают операторы с точечными особенностями.

С помощью операторного подхода найдены необходимые и достаточные условия нётеровости и формула вычисления индекса задачи (1) в терминах символа [1] некоторой операторной матрицы $2m \times 2m$, элементы которой принадлежат хорошо изученной в [2] банаховой алгебре сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами в $L_p([0, 1])$.

Литература

1. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М.: Наука, 1977.

2. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Сингулярные интегральные уравнения с непрерывными коэффициентами на составном контуре. // Математические исследования. 1970. Т.5, №2, С. 89–103.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МАКСВЕЛЛА О ТЕПЛОВОМ СКОЛЬЖЕНИИ ДЛЯ КВАНТОВЫХ ГАЗОВ

Любимова Н.Н. (Елец)
natlove@inbox.ru

В настоящее время изучение влияния квантовых эффектов на кинетические процессы в газах и плазме является предметом научного интереса. Имеется ряд исследований, посвященных данной проблеме (см., например, [1], [2]).

В настоящей работе впервые получено аналитическое решение граничной задачи для кинетического уравнения, описывающее поведение кватовых ферми–газов в полупространственной задаче о тепловом скольжении, восходящей к Максвеллу.

Аналитическое решение получено в виде разложения по собственным сингулярным обобщенным функциям дискретного и непрерывного спектров соответствующего характеристического уравнения. Доказательство этого разложения сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. Последнее в результате решения приводится к краевой задаче Римана — Гильберта теории функций комплексного переменного.

Литература

1. *Латышев А.В., Юшканов А.А.*// Теоретическая и математическая физика.1997. Т. 111. № 3. С. 462–472.

2. *Латышев А.В., Юшканов А.А.*// Теоретическая и математическая физика. 2001. Т. 129. № 3. С. 491–502.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ[1]

Максимов П.В., Румянцев А.Н. (Пермь)
mpv12@rambler.ru, ran56@mail.ru

Исследование динамики развития многопродуктовых производственных систем приводит к постановке ряда задач управления (ЗУ) с использованием различных режимов управления и способов реализации управляющих воздействий. В докладе рассматривается ЗУ, в которой в качестве управляющих воздействий выступают банковские кредиты, при этом предполагается возможность

[1]Работа поддержана грантами РФФИ (04-06-96002) и Программы "Университеты России"

выбора сроков, ставок и планов возврата кредитов. Как замечено в [1], удобным и естественным инструментом моделирования рассматриваемого класса задач являются динамические модели в виде функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями. Сложность ЗУ для таких моделей приводит к необходимости разработки конструктивных методов исследования, допускающих эффективную компьютерную реализацию. Реализация конструктивных методов и теоретическое обоснование возможности их применения основываются на теории доказательного вычислительного эксперимента (ДВЭ) [2]. Основные этапы ДВЭ, ориентированного на исследование задачи управления для линейной системы управления с линейными ограничениями на управляющие и фазовые переменные, включают аппроксимацию операторов и функционалов в классе так называемых вычислимых объектов; конструктивныую оценку параметров точности аппроксимации; редукцию "вычислимой"задачи к конечномерной задаче, допускающей эффективную и достоверную проверку теоретических критериев разрешимости; проверку условий специальных конструктивных теорем о наследовании свойства разрешимости исходной задачей управления.

Литература

1. Максимов В.П., Румянцев А.Н. Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике// Известия вузов. Математика, 1993, N 5, с.56-71.

2. Румянцев А.Н. Доказательный вычислительный эксперимент в исследовании краевых задач, Пермь, Изд-во Перм. ун-та, 1999.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПО КАПУТО[1]

Мамчуев М.О. (Нальчик)

niipma@mail333.com

В области $\Omega = \{(x,y): \;\; 0 < x < a, \; 0 < y < b\}$ рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\partial_{0x}^{\alpha} u(x,y) + \partial_{0y}^{\beta} u(x,y) = Au(x,y) + f(x,y), \tag{1}$$

[1]Работа выполненна при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-96625-р_ юг_ а).

где ∂_{0t}^{γ} – дробная производная по Капуто порядка γ [1], $\alpha, \beta \in (0,1)$, $f(x,y) = ||f_1(x,y),...,f_n(x,y)||$ и $u(x,y) = ||u_1(x,y),...,u_n(x,y)||$, – соответственно заданный и искомый n-мерные векторы, A – заданная постоянная матрица размера $n \times n$.

Рассматривается следующая

Задача. *Найти решение* $u = u(x,y)$ *системы (1) в области* Ω *такое, что* $u \in C(\bar{\Omega})$, $\partial_{0x}^{\alpha} u$, $\partial_{0y}^{\beta} u \in C(\Omega)$, *удовлетворяющее следующим краевым условиям:*

$$u(0,y) = \varphi(y), \ 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant a, \tag{3}$$

где $\varphi(y)$, $\psi(x)$ *– заданные непрерывные n-мерные вектор-функции.*

Имеет место

Теорема. *Пусть* $0 < \alpha, \beta \leqslant 1$, $\alpha \cdot \beta < 1$, $\varphi(y) \in C[0;T]$, $\psi(x) \in C[0;l]$, $f(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, *и выполняется условие согласования* $\varphi(0) = \psi(0)$. *Тогда существует единственное решение задачи (1) – (3).*

Литература

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. —272 с.

УСЛОВИЯ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Минюк С.А., Метельский А.В. (Гродно)

Пусть задана алгебро-дифференциальная (АДС) система наблюдения

$$A_0\dot{x}(t) = Ax(t), t \in T = [0, t_1], \ A_0x(0) = A_0a, \ a \in R^n, \tag{1}$$

с выходом

$$y(t) = Gx(t), \ t \in T. \tag{2}$$

Здесь A_0, A и G – постоянные $m \times n$- и $r \times n$-матрицы; $x(t)$, $t \in T$ – непрерывная функция, а $A_0x(t)$, $t \in T$ – непрерывно дифференцируемая функция, $t_1 > 0$ – фиксированный момент времени. Считаем, что в (1) начальный вектор A_0a, $a \in R^n$, является согласованным, то есть система (1) имеет решение.

Если $m = n$, $\det A_0 = 0$ и $\det[A_0\lambda - A] \neq 0$ $\exists\lambda \in \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ – множество комплексных чисел, то систему (1) – (2) называют регулярной.

Определение. *Систему (1) – (2) назовем идентифицируемой по Калману, если по выходу $y(t)$, $t \in T$, можно восстановить единственным образом любой $n-$вектор $x(t_1)$, совместимый с системой (1) – (2). Систему (1) – (2) назовем идентифицируемой по Красовскому, если операция восстановления линейна и непрерывна:*

$$x(t_1) = \int\limits_0^{t_1} V(t)y(t)dt, \tag{3}$$

где $V(t)$, $t \in T$ – некоторая $n \times r$-матричная кусочно-непрерывная функция.

Теорема. *Для идентифицируемости по Калману системы (1) – (2) необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_0\lambda - A \\ G \end{bmatrix} = n \quad \forall\lambda \in \mathcal{C}, \tag{4}$$

где $\mathcal{C}$ – множество комплексных чисел. Для регулярной системы (1) – (2) условие (4) необходимо и достаточно для идентифицируемости по Красовскому.

Доказательство второго утверждения теоремы основано на явном построении восстанавливающей операции (3).

Замечание. Идентифицируемая по Калману система (1) – (2) может быть не идентифицируема по Красовскому.

Пример. Рассмотрим систему (1) – (2) вида

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = x_1(t), \\ y(t) = x_2(t),\ t \in T. \end{cases} \tag{5}$$

Такая система, очевидно, идентифицируема по Калману, так как выполнено условие (4). Однако она не идентифицируема по Красовскому, поскольку непрерывная операция восстановления не существует. Действительно, из системы (5) находим $x_2(t_1) = y(t_1)$, $x_1(t_1) = \dot{y}(t_1)$.

Таким образом, не для всякой идентифицируемой по Калману АДС существует непрерывная операция восстановления (даже в форме интеграла Лебега-Стилтьеса).

ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ С N-НАКОПИТЕЛЯМИ

Михайлова И.В., Смирнова Е.А. (Воронеж)

Рассмотрим систему массового обслуживания с одним обслуживающим прибором, в которую поступают N независимых пуассоновских потоков требований с интенсивностями $\lambda_j, j = \overline{1, N}$. Каждый из потоков поступает в свой накопитель и все накопители имеют неограниченное число мест для ожидания. Будем считать, что обслуживание требований происходит по следующей схеме. Начиная обслуживать требования j-ого потока, прибор не переключится на другой поток до тех пор, пока не опустеет накопитель этого потока. Времена обслуживания требований j-ого потока и суть независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $B_j(t),\ t \in R$. Естественно предположить, что времена обслуживания требований различных потоков независимы между собой и не зависят от входящих потоков. Если прибор закончил обслуживать j-ый поток, то с вероятностью $F_{jk}(t)$ не позднее, чем через t временных единиц, он начнет обслуживать k-ый поток. Тогда $f_{jk} = \int_0^\infty t dF_{jk}(t)$ есть среднее время переключения с j-ого на k-ый поток и $f_j = \sum\limits_{kf} f_{jk}$ – среднее время переключения с j-ого потока. Для исследования описанной выше системы рассмотрим в моменты начала обслуживания j-ого потока, $j = \overline{1, N}$, вложенную цепь Маркова, состояние которой есть вектор $\overrightarrow{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$, где x_0 - номер обслуживающего потока, а x_j – количество заявок в j-ом накопителе, $j = \overline{1, N}$. Пусть

$$P_j(\overrightarrow{u}) = P\{x_0 = j,\ x_1 = u_1, \ldots, x_N = u_N\}, u_K = 0, 1, 2 \ldots\ k = \overline{1, N};$$

$$P_j(\overrightarrow{z}) = \sum_{\substack{u_k = 0,1,\ldots \\ k = \overline{1}, N}} P_j(\overrightarrow{u}) z_1^{u_1}, \ldots, z_N^{u_N}, \quad |z_k| \leqslant 1, \quad k = \overline{1, N}$$

При помощи метода дополнительных событий можно выписать систему уравнений для $P_{jn}(\overrightarrow{z})$ и затем перейти к пределу при $n \to \infty$. Тогда при условии существования стационарного режима получим систему уравнений

$$P_j(\overrightarrow{z}) =$$

$$= \sum_k P_k(z_1, \ldots, \Pi_k(\sum_{m \neq k} (\lambda_m - \lambda_m z_m)), \ldots, z_N) f_{kj}(\sum_m (\lambda_m - \lambda_m z_m));$$

где $j = \overline{1,N}$; $\Pi_k(s),\ Res > 0$ – преобразование Лапласа-Стильтьеса функции распределения длины периода занятости системы $M|GI|1$ с характеристиками λ_k и B_k, а $f_{kj}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} dF_{rj}(t), \quad Res > 0.$

Литература

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания /Л. Клейнрок. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КОНЦЕПЦИЙ И ТЕОРИЙ ОБОСНОВАНИЯ

Михайлова Н.В. (Минск)
erovenko@bsu.by

Математике изначально присуща фундаментальная двойственность: с одной стороны, ее суждения выглядят как абсолютно достоверные, а с другой стороны, ее объекты не существуют как предметы внешнего мира или как внутренние ощущения. С точки зрения методологии математики существенной составляющей системного анализа является моделирование изучаемых процессов. Системный анализ пытается понять диалектику целостности системы и относительную самостоятельность образующих ее элементов.

Любая непротиворечивая система аксиом не устанавливает пределов для интерпретаций или моделей в том смысле, что соответствующие интерпретации могут быть неизоморфны, то есть отличаться не только терминологией, но и не совпадать по существу. Это связано с существованием дополнительных неопределяемых понятий, содержащихся в каждой аксиоатической системе. Саму неопределенность можно трактовать в контексте дополнительных понятий как недостаток информации о некотором явлении и как свойство самой информации. Замысел системного обоснования состоит в том, чтобы связать непротиворечивость аксиоматики с ее фактологической истинностью.

В математических приложениях первостепенное значение приобретает концепция двойственности функциональных пространств. В современной теории дифференциальных уравнений в частных производных используются "дуализации"в виде сопряженных пространств и сопряженных уравнений. С точки зрения математического формализма корреляция взаимно дополнительных характеристик проявляется в отсутствии коммутируемости соответствующих операторов.

Заметим, что алгоритмическую неразрешимость некоторых арифметических высказываний можно рассматривать как дополнение к известным результатам Геделя о неполноте [1]. Убеждение о том, что теоретико-множественные понятия — это лишь способы выражения, опирающиеся на программу обоснования Гильберта, и поэтому соответствующие трудности могут быть устранены, в каком-то смысле дополнительно к гипотезе об окончательном решении, поскольку она опровергнута второй теоремой Геделя о неполноте.

На всех этапах развития математической теории в ней всегда присутствовали как дополнительные понятия дедуктивная составляющая, включающая рассуждения и доказательства, и алгоритмическая составляющая, связанная с вычислениями и методами решения задач. Теория доказательств с самого начала возникала на стыке двух концепций — интуиционизма и формализма, каждая из которых пользовалась своей логикой, допустимой в математических рассуждениях. В различные периоды истории математики предпочтение отдавалось то методам вычисления, то проблемам обоснования математических теорий, поэтому системный анализ включает методы исследования как составную часть методологического аппарата.

Литература

1. Еровенко В.А., Михайлова Н.В. Проблема Ферма в контексте Геделевских теорем // Математическое образование. — 2003. — №4. — С.97-103.

ОБ ЭЛЕМЕНТАХ ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛОГО ПРОСТРАНСТВА H_α^β

Можарова Т.Н. (Орел)

Пусть H — банахово пространство и $A : \mathcal{D}(A) \to H, \mathcal{D}(A) \subset H$, — замкнутый линейный неограниченный оператор; $\mathcal{D}(A)$ — инвариантно относительно A. Если характеристическая функция $\varphi \in \left[\frac{1}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha e}\right)$, то оператор

$$\varphi(A)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k(x), \{c_k\} \subset \mathbb{C},$$

определен и непрерывен на некотором подпространстве H_α^β пространства H ($\alpha > 0, \beta > 0$ — фиксированные числа) [1].

Пусть $\psi_\varphi(\lambda;t) = \frac{\varphi(\lambda)-\varphi(t)}{\lambda - t}$, где t — фиксированный комплексный параметр. Как функция λ, $\psi_\varphi(\lambda;t) \in \left[\frac{1}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha e}\right)$. При фиксированном t такая функция определяет на H_α^β линейный непрерывный оператор

$$\psi_\varphi[A;t_0](x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n[A^{n-1}(x) + t_0 A^{n-2}(x) + ... + t_0^{n-1}x], t_0 \in \mathbb{C}.$$

С использованием свойств интерполирующей функции $\psi_\varphi[A;t](x)$ доказано следующее утверждение:

Теорема. *Для любого вектора* $x \in H_\alpha^\beta$ *и любой функции* $\varphi \in \left[\frac{1}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha e}\right)$ *справедлива формула:*

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{\psi_\varphi[A;t](x)}{\varphi(t)} dt + R_r(A)(x),$$

где $R_r(\lambda) \in \left[\frac{1}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha e}\right)$ *и для* $|\lambda| < r$ *определяется как*

$$R_r(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{2\pi i} \int\limits_{|t|=r} \frac{dt}{(t-\lambda)\varphi(t)}.$$

(Здесь $r > 0$ – любое, но такое, что окружность $|t| = r$ не проходит через нули функции $\varphi(t)$.)

Литература

[1] Можарова Т.Н. Об условиях существования и непрерывности оператора $\varphi(A)$ с переменными коэффициентами в случае неограниченного оператора A. — Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XVI". — Воронеж: ВГУ, 2005. - С. 110-111.

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА

Мухамадиев Э.М., Назимов А.Б. (Вологда)

muhamerg@mail.vstu.edu.ru, n.akbar54@mail.ru

Пусть $G = \{(x,y) : 0 < x, y < 1\}$ - квадрат, Γ - граница G, $H^\alpha(\overline{G})$ и $H^\alpha(\Gamma)$ - гельдеровы пространства функций соответственно на $\overline{G}$ и Γ. Гармоническая функция $u(x,y)$, принадлежащая пространству

$H^\alpha(\overline{G})$, порождает след $\Psi = u|_\Gamma$ на границе Γ, принадлежащий пространству $H^\alpha(\Gamma)$. Возникает вопрос: все ли функции пространства $H^\alpha(\Gamma)$ являются следом гармонической функции из $H^\alpha(\overline{G})$? Ответом является следующая

Теорема 1. *Для того, чтобы каждая функция из $H^\alpha(\Gamma)$ была следом некоторой гармонической функции из $H^\alpha(\overline{G})$, необходимо и достаточно выполнение условия $0 < \alpha < 2/3$.*

Доказательство теоремы основано на анализе возможности представления гармонической функции в виде потенциала двойного слоя [1, 2]

$$u(M) = -\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{R_{MP}}\right)\Phi(P)ds_P, \tag{1}$$

где $\Phi(P)$ - плотность, $M = M(x,y) \in G$, $P = P(\xi,\eta) \in \Gamma$, $R_{MP}^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$, n_P - внешняя нормаль в точке P (кроме угловых точек). Основные этапы анализа содержатся в следующих теоремах.

Теорема 2. *Если $\Phi(P)$ из $H^\alpha(\Gamma)$, то потенциал (1) принадлежит $H^\alpha(\overline{G})$ и его след $\Psi = u|_\Gamma$ удовлетворяет равенству*

$$\Phi(N) - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{R_{NP}}\right)\Phi(P)ds_P = \Psi(N), \quad N \in \Gamma. \tag{2}$$

Теорема 3. *Для того, чтобы интегральное уравнение (2) было разрешимо в $H^\alpha(\Gamma)$ для любой функции $\Psi \in H^\alpha(\Gamma)$, необходимо и достаточно выполнение условия $0 < \alpha < 2/3$.*

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

[2] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ[1]

Наимов А.Н. (Вологда)
nan67@rambler.ru

Рассматривается вопрос об априорной оценке и существовании ω-периодических решений для систем вида

$$z'' = \overline{(z' - A_1(z))(z' - A_2(z))} + f(t, z, z'), \qquad (1)$$

где $\omega > 0$, $z = x_1 + ix_2 \in \mathrm{C}$, C - пространство комплексных чисел, верхняя черта означает комплексное сопряжение, $A_1, A_2 : \mathrm{C} \mapsto \mathrm{C}$ - непрерывные отображения, положительно однородные порядка 1, $f(t, z_1, z_2)$ непрерывно действует из $\mathrm{R} \times \mathrm{C} \times \mathrm{C}$ в C, ω-периодическое по t и удовлетворяет условию $f(t, z_1, z_2)/(|z_1| + |z_2|)^2 \Rightarrow 0$ при $|z_1| + |z_2| \to \infty$ равномерно по t . Главная нелинейная часть системы (1) обращается в ноль на двух поверхностях $z_2 = A_j(z_1)$, $j = 1, 2$. Ранее автором были исследованы априорная оценка и существование периодических решений для систем более общего вида, главная нелинейность которых обращается в ноль на одной поверхности.

Обозначим: $H(A_1, A_2)$ - множество всех непрерывных векторных полей на единичной окружности $S = \{y \in \mathrm{C} : \quad |y| = 1\}$, совпадающих в каждой точке $y \in S$ с одним из значений $A_1(y)$, $A_2(y)$, $\gamma(B)$ - вращение невырожденного непрерывного векторного поля $B : S \mapsto \mathrm{C}$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия: 1) для любого ненулевого* $y \in \mathrm{C} \quad A_j(y) \neq 0$, $j = 1, 2$, $Im(A_1(y) - A_2(y))^3 \neq 0$ *; 2) для любого* $B \in H(A_1, A_2) \quad \gamma(B) \neq 1$ *. Тогда для ω-периодических решений системы (1) имеет место априорная оценка*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} (|z(t)| + |z'(t)|) < C_1,$$

где $C_1 = C_1(A_1, A_2, f))$ *.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* $\gamma(A_1) + \gamma(A_2) \neq 0$ *. Тогда существует хотя бы одно ω-периодическое решение системы (1).*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта МД-2828.2005.1 Президента Российской Федерации.

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЁЛЬДЕРА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Насонов С.Н. (Липецк)

nasonov1@mail.ru

Пусть $H(\varphi,\psi) = \{x \in C : |x(t,s) - x(\tau,\sigma)| \leqslant h(x)(\varphi(|t-\tau|) + \psi(|s-\sigma|))\}$, где $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции класса Φ [1, 2]. $H(\varphi,\psi)$ банахово пространство относительно нормы $\|x\|_H = \|x\|_C + \sup\limits_{(t,s)\neq(\tau,\sigma)} \dfrac{|x(t,s) - x(\tau,\sigma)|}{\varphi(|t-\tau|) + \psi(|s-\sigma|)}$. В $H(\varphi,\psi)$ рассматривается уравнение с оператором суперпозиции

$$f(t,s,x(t,s))h(t,s) \equiv Fx = x. \tag{1}$$

Допустим, F дифференцируем по Фреше $\forall x \in B(\theta,R)$, $B(\theta,R) = \{x \in H(\varphi,\psi) : \|x\|_H \leqslant R\}$ и $\forall h \in H(\varphi,\psi)$

$$F'(x)h(t,s) = f'(t,s,x(t,s))h(t,s), \tag{2}$$

где $f'(t,s,u) = \dfrac{\partial f(t,s,u)}{\partial u}$ – непрерывная функция. Положим $Px = Fx - x$, $x_0 \in B(\theta,R)$, $a = \|(P'(x_0))^{-1}P(x_0)\|$, $b = \|(P'(x_0))^{-1}\|$.

Теорема 1. *Если производная по Фреше оператора F имеет представление* (2), $|f'(t,s,u) - f'(\tau,\sigma,v) - f'(t,s,z) + f'(\tau,\sigma,w)| \leqslant k(r)|u-v-z+w|$, *при* $|u|,|v|,|w|,|z| \leqslant r \leqslant R$, $P'(x_0)$ *обратим,* r_* – *единственный корень уравнения* $r = a + 2b\int\limits_0^r (r-t)k(t)dt$ *на* $[0;R]$, *то уравнение* (1) *имеет единственное решение* x^* *в* $B(\theta,R)$.

Теорема 2. *Если производная по Фреше оператора F имеет представление* (2), $|f'(t,s,u) - f'(\tau,\sigma,v) - f'(t,s,z) + f'(\tau,\sigma,w)| \leqslant k|u-v-z+w|^\gamma(|u-v|^{1-\gamma} + |z-w|^{1-\gamma})$, $|f'(t,s,u) - f'(t,s,v)| \leqslant k|u-v|^\gamma$ *при* $|u|,|v|,|z|,|w| \leqslant \|x_0\|_{H(\varphi,\psi)} + R$, $P'(x_0)$ *обратим,* r_* – *единственный корень уравнения* $\dfrac{bK}{1+\gamma}r^{1+\gamma} - r + a = 0$ *на* $[0;R]$, $0 < \gamma \leqslant 1$, $K = k(2 + 2(\|x_0\| + R)^{1-\gamma})$, *то уравнение* (1) *имеет единственное решение* x^* *в шаре* $B(x_0,R)$.

Литература

1. *Appell J., Zabrejko P.P.* Nonlinear superposition operators. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. — 311 p.

2. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. — М.: Наука, 1980. — 415 с.

ОБ ОДНОЙ МЕТОДИКЕ РАЗВИТИЯ ТВОРЧЕСТВА УЧЕНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Нгуен Ван Лой (Воронеж)
loitroc@yahoo.com

Важнейшей проблемой в современном обучении для школьников и студентов является проблема развития их творчества. Мы хорошо привыкли решать задачи, которые требовали доказать какое-нибудь свойство или найти величину с указанными другими величинами. Однако иногда вы сами себя спрашиваете о том, откуда приводятся такие задачи, такие свойства или такие условия? Хотя вы умеете решать даже трудные задачи, но в этом случае вы только тренировали способ решения проблемы, а не тренировали способ постановки проблем. В данной работе рассматривается новый тип задач, в которых вам не только надо доказать , а нужно и еще проводить изыскания. Такой тип задач включает в себя

1. Задача "Обобщение".
2. Задача "Высказывание".

Общей чертой таких задач является то, что результат неизвестен и неоднозначен. Главной целью является развитие творчества учеников и студентов, поэтому оценка не только опирается на результаты, но и еще на логическое размыщление.

Литература

[1] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчислениея: Вз т. Т.I/ пред. и прим. А.А.Флоринского 8-е изд. -М. Физматлит, 2001. -680с.

[2] Кудрявцев Л.Д. Курс математи-ческого анализа, Т.1 2-е изд., 1988. – 712с.

ФОРМАЛИЗМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Некрасова Н.В. (Воронеж)
nekrasovanv@mail.ru

Рассматривается следующая дискретная нелинейная задача оптимального управления

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = F_N(y(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} F_k(y(k), z(k), u(k)) \to \min_u, \qquad (1)$$

$$y(k+1) = f_k(y(k), z(k), u(k)),$$

$$\varepsilon z(k+1) = g_k(y(k), z(k), u(k)), \tag{2}$$

$$y(0) = y^0, z(0) = z(N), \tag{3}$$

где $y(k) \in R^n$, $z(k) \in R^m$ $(k = \overline{0, N})$, $u(k) \in R^r$ $(k = \overline{0, N-1})$, F_k $(k = \overline{0, N})$ - скалярные функции, f_k $(k = \overline{0, N-1})$ - функции со значениями в R^n, g_k $(k = \overline{0, N-1})$ - функции со значениями в R^m, число шагов N фиксировано, $\varepsilon > 0$ - малый параметр. Функции F_k, f_k, g_k предполагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам.

Решение задачи ищется в виде следующих рядов

$$y(k) = \sum_{j \geqslant 0} \varepsilon^j y_j(k), z(k) = \sum_{j \geqslant 0} \varepsilon^j z_j(k), u(k) = \sum_{j \geqslant 0} \varepsilon^j u_j(k). \tag{4}$$

Подставляя разложения (4) в (1)-(3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получим, что минимизируемый функционал запишется в виде ряда

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j \geqslant 0} \varepsilon^j J_j,$$

а из (2), (3) получим уравнения для коэффициентов y_i, z_i разложения (4).

Положив в задаче (1)-(3) $\varepsilon = 0$, получим однозначно разрешимую при некоторых условиях вырожденную задачу, решив которую, найдем коэффициенты y_0, z_0, u_0 разложения (4). После некоторых преобразований для нахождения коэффициентов y_i, z_i, u_i, $i > 0$, разложения (4) получим однозначно разрешимые при некоторых условиях линейно-квадратичные задачи.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ О БАРНЕТТОВСКОМ СКОЛЬЖЕНИИ ДЛЯ КВАНТОВЫХ БОЗЕ — ГАЗОВ

Нефедов А.Г. (Подольск)
itbrains@gmail.com

В настоящее время процессы в квантовых бозе – газах являются предметом активного исследования. Имеется ряд публикаций, посвященных данной проблеме (см., например, [1] – [2]).

В настоящей работе впервые получено аналитическое решение задачи для уравнения, описывающего поведение квантовых бозе–газов в полупространственной задаче о барнеттовском скольжении.

Решение получено в виде разложения по собственным сингулярным обобщенным функциям дискретного и непрерывного спектров соответствующего характеристического уравнения. Доказательство сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. Последнее в результате решения приводится к краевой задаче Римана — Гильберта теории функций комплексного переменного.

Литература

1. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Известия вузов. Сер. Физика. 2002. № 6. С. 51–56.

2. *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // Математическое моделирование. 2003. №5. С. 80–94.

СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕМНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Огарков В.Б., Тарасов Д.И. (Воронеж)

Проектирование и расчет одномерных и двумерных изделий из анизотропных композиционных материалов имеет большое практическое значение в машиностроении и деревообрабатывающей промышленности.

Примером одномерной задачи служит равномерное внутреннее и внешнее воздействие на анизотропную втулку (подшипник скольжения). Для определения потенциала напряжений имеем уравнение:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{d}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{b}{r^2}\varphi = 0 \tag{1}$$

Получено уравнение для функции L_1, пропорциональной объемному напряжению (заклинивание вала):

$$\frac{dL_1}{dx} + [e + \sqrt{|d|}]L_1 = 0 \tag{2}$$

$$L_1(x) = e^{\alpha x} \cdot w(\sigma_r + \sigma_\theta); \quad r = e^{\alpha x} \tag{3}$$

Уравнение (2) имеет первый порядок производной.

В качестве двумерной рассмотрена задача об изгибе прямоугольной пластинки (древесно-стружечные плиты, полупроводники и т.д.) Для определения прогиба имеем бигармоническое уравнение:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D} \tag{4}$$

Для объемной информации $Q = E_x + E_x$ получено гармоническое уравнение второго порядка:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = -\frac{z \cdot q(x,y)}{D} \tag{5}$$

АБСОЛЮТНЫЙ ГИСТЕРЕЗИС ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Огарков В.Б., Шегеда В.А. (Воронеж)

Рассматривается задача свободного колебания материальной точки в среде с сопротивлением, которое описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + d\frac{du}{dt} + bu = 0 \tag{1}$$

С использованием комплексной функции перемещения уравнение (1) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{du}{dt} + (c + i\sqrt{d})u = L_1(t) \tag{2}$$

$$c = \frac{a}{2}; \qquad d = b - \frac{a^2}{4} \tag{3}$$

$$L_1 = l_1 e^{-(c-\sqrt{d})t} \tag{4}$$

В случае малого сопротивления при $b - \frac{a^2}{4} > 0$ имеем комплексно-сопряженные корни:

$$p_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm i\sqrt{\left|\frac{a^2}{4} - d\right|} \tag{5}$$

В этом случае функция $L_1(t)$ с использованием формул Эйлера может быть представлена через сумму тригонометрических функций.

В этом случае решение уравнение (2) может быть записано так:

$$u = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{6}$$

Величина φ представляет угол сдвига фазы колебаний относительно фазы колебаний функции $L_1(t)$. Построен график изменения φ в зависимости от ωn. Выведено уравнение соответствующего эллипса, площадь которого представляет петлю гистерезиса. Приведена соответствующая зависимость площади от ωn.

Поскольку решение однородного уравнения (1) пропорционально резольвенте, то полученные результаты могут быть обобщены на вынужденные колебания точки.

НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА ПО СЛАБОМУ ПАРАМЕТРУ ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА $L_{p\theta}(R)$

Омарова А.Т., Смаилов Е.С. (Караганды)

esmailov@kargu.krg.kz

Для целых функций экспоненциального типа С.М.Никольским [1] установлено, так называемое, неравенство разных метрик:

$$\|g_\nu\|_{L_q(R_1)} \leqslant c \cdot \nu^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \|g_\nu\|_{L_p(R_1)},$$

где $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, ν - тип целой функции. Это неравенство и его аналог для тригонометрических полиномов существенную роль сыграл в гармоническом анализе. Данное неравенство в дальнейшем, многими авторами, было рассмотрено и в других пространствах и для других объектов, например, для линейных агрегатов различных ортогональных систем. Для тригонометрических полиномов, в частности, Л.А.Шерстнева [2] неравенство разных метрик установила по слабому параметру пространства Лоренца. В настоящем тезисе приведено подобное неравенство для целых функций экспоненциального типа ν.

Теорема. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $1 \leqslant s < \theta \leqslant +\infty$, $g_\nu(x)$ *- целая функция экспоненциального типа* ν, *на действительной оси* *принадлежащая пространству $L_{p\theta}(R)$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|g_\nu\|_{L_{ps}(R)} \leqslant c_{p\theta s} \cdot \left\{\log_2(2+\nu)\right\}^{\frac{1}{s}-\frac{1}{\theta}} \cdot \|g_\nu\|_{L_{p\theta}(R)},$$

где константа $c = c(p,\theta,s) > 0$ не зависит от $g_\nu(x)$ и $\nu > \frac{1}{3}$.

Литература

1. Никольский С.М.*Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных.* - Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, 38,. с.244-278.

2. Шерстнева Л.А. *Неравенства Никольского для тригонометрических полиномов пространства Лоренца.* /Вестник Моск.ун-та. Серия Математика. Механика, 1984,№4,с.75-79

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА СУБГАРМОНИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

Охлупина О.В. (Брянск)

Пусть $D = \{\, z \;:\; |z| < 1\}$ - единичный круг, Γ - его граница. Для $\alpha > -1$ введем в рассмотрение класс $SH_\alpha(D)$ функций $u(z)$, субгармонических в D, для которых справедлива оценка:
$T(r,u) \leqslant \frac{C}{(1-r)^\alpha},\ 0 \leqslant r \leqslant 1,$ где $T(r,u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u^+(re^{i\varphi})d\varphi -$ характеристика Неванлинна функции $u(z)$.

В работе описан этот класс в терминах представляющей меры Рисса. Обозначим через $B_\gamma^{1,\infty}(\gamma > 0)$ стандартный класс Бесова на единичной окружности Γ.

Построим потенциал типа Грина $V_\beta(z,\mu) = \int\limits_D \log|A_\beta(z,\zeta)|\, d\mu(\zeta)$ в круге D на основе элементарных факторов М. М. Джрбашяна:

$$A_\beta(z,\zeta) = \left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-\frac{\beta}{\pi}\int\limits_D \frac{(1-|t|^2)^\beta \ln\left|1-\frac{t}{\zeta}\right|}{(1-\bar{t}z)^{\beta+2}}dm_2(t)\right\}$$

Теорема. Функция $u(z)$ принадлежит классу $SH_\alpha(D)$ тогда и только тогда, когда $u(z)$ допускает следующее представление:

$$u(z) = \int\limits_D \ln|A_\beta(\zeta,z)|\, d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} Re\frac{\psi(e^{i\theta})}{(1-e^{-i\theta}z)^{\beta+1}}d\theta,\ z \in D,$$

где $\psi(e^{i\theta})$ - произвольная вещественнозначная функция из класса $B_1^{1,\infty}$, $\alpha > -1$, $\beta > \alpha$, $\mu(\zeta)$ - представляющая мера Рисса в D, удовлетворяющая условию: $\int\limits_D (1-|\zeta|)^{\alpha+2}\, d\mu(\zeta) < +\infty$.

При $u(z) = \ln|f(z)|$, аналогичное представление получено в [2].

Литература

1. Джрбашян М.М. К проблеме представимости аналитических функций// Сообщ. института матем. и мех. АН Арм.ССР. Вып. 2, 1948.

2. Shamoyan F.A., Shubabko E.N. Parametrical representation of some clases of holomorphic functions in the disk// Operator Theory: Advanced and Applications. Vol. 113, 2000.

ОРГАНИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ СРЕД

Пеньков В.Б., Харитоненко А.А. (Липецк)

svetl@stu.lipetsk.su

Рассматриваются физические среды, состояние которых описывается уравнением Лапласа. Пусть гармоническая среда занимает область пространства, ограниченную гладкой границей. Любой набор полевых характеристик, удовлетворяющих определяющим соотношениям среды безотносительно к граничным условиям, называется внутренним состоянием среды. Для гармонической среды это суть сама гармоническая в области функция и ее градиент. Это состояние индуцирует на границе тела след - граничное состояние (его составляют граничные значения упомянутых гармонических функций и их производные по нормали и касательной к границе). Множество различных состояний среды определяет пространства внутренних и граничных состояний, линейное относительно операций сложения состояний и умножения состояния на число. По граничному состоянию однозначно (с точностью до нулевого элемента) восстанавливается внутреннее. Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между элементами обоих (линейных) пространств.

Для построения скалярного произведения воспользуемся теоремой Гаусса - Остроградского, связывающей объемный интеграл от дивергенции вектора - градиента некоторой функции и поток этого вектора через замкнутую поверхность - границу области. Определяющую скалярное произведение функцию следует "организовать"через характеристики элементов пространств состояний так, чтобы формула Гаусса - Остроградского превратилась в пару равных между собой скалярных произведений, определяемых на соответствующих пространствах. Простейшим вариантом, обеспечивающим выполнимость всех свойств скалярного произведения (коммутативность, аддитивность, однородность, положительная определенность) в пространстве внутренних состояний, является произведение гармонических функций, отнесенных к двум различным состояниям. Таким образом, оба пространства являются бесконечномерными евклидовыми (предгильбертовыми).

Стандартная процедура пополнения пространств посредством присоединения к ним пределов всех фундаментальных последовательностей состояний делает их полными, гильбертовыми. Наличие счетного базиса у гармонических функций, представленного, например, системой гармонических многочленов, характеризует пространства как сепарабельные. Следовательно, имеет место изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств и изучение внутреннего состояния сводится к исследованию соответствующего по изоморфизму граничного состояния.

Конструктивная теорема Гильберта - Шмидта позволяет считать оба изоморфных базиса пространств ортонормированными. Произвольное состояние представляется рядом Фурье по элементам ортонормированного базиса. В общем случае решение краевой задачи сводится к регулярной бесконечной системе уравнений относительно коэффициентов Фурье. В простейших случаях вычисление коэффициентов Фурье связано с рутинным вычислением скалярных произведений.

Основная трудность метода граничных состояний определяется необходимостью массового вычисления кратных интегралов как на стадии формирования базисов состояний, так и в процессе подготовки разрешающей системы уравнений, либо при непосредственном вычислении коэффициентов Фурье. Численные процедуры здесь бессильны из-за их высокой погрешности. Опыт показал высокую эффективность применения компьютерной алгебры (алгебры полиномов); при этом вычисления производятся не только с высочайшей точностью, но и выполняются с большой скоростью.

Изложенное может быть эффективно применено для решения краевых задач электростатики, задач кручения призматических стержней, задач теории фильтрации и др.

МОДЕЛЬ ОПЕРАТИВНОГО ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ПРОГНОЗА НЕБЛАГОПРИЯТНЫХ И ОПАСНЫХ ЛЕТНИХ ПОЛУСУТОЧНЫХ ОСАДКОВ И ВЕТРА С ЗАБЛАГОВРЕМЕННОСТЬЮ 12, 24 и 36Ч ДЛЯ ТЕРРИТОРИИ ЕВРОПЕЙСКОЙ ЧАСТИ СНГ И СИБИРИ

Переходцева Э.В.
perekhod@mecom.ru

Прогнозирование неблагоприятных и опасных конвективных явлений – полусуточных осадков количеством Q>14мм/12ч и Q>49мм/12ч, дневного и ночного сильного ветра, включая шквалы и смерчи, с порывами скоростью свыше 18м/с и свыше 25м/с, остается одной из труднейших задач прогноза погоды и в значительной степени зависит от интуиции синоптика. Имеющиеся в оперативной практике графические и расчетные методы прогноза этих явлений, зависящих от большого количества параметров атмосферы, не в состоянии отразить эту зависимость во всей полноте. Наиболее успешными методами объективизации и автоматизации прогноза явлений, зависящих от большого количества параметров атмосферы, для которых не имеется адекватной гидродинамической модели, являются статистические методы. Для распознавания (диагноза) и прогноза явлений осадков и ветра двух градаций были разработаны соответственно для каждой градации свои статистические решающие правила прогноза. Они были получены на выборках данных объективного анализа (фактических полях метеоэлементов, прошедших контроль на ошибки) на архиве ситуаций наличия и отсутствия соответствующих явлений. Разработке статистических решающих правил диагноза и прогноза явлений предшествовала задача отбора (без значительной потери информации) наиболее информативных мало зависимых параметров из большого (n=40) количества потенциальных физически обоснованных параметров атмосферы, способствующих возникновению указанных явлений. Отбор информативного вектора признаков (параметров атмосферы) для каждого класса явлений проводился методом диагонализации средней матрицы корреляции соответствующих классов и выбора наиболее информативных представителей от каждого диагонального блока связанных признаков в средней матрице корреляции. В качестве критериев информативности использовались критерии Махаланобиса и критерий минимальной энтропии Вапника-Червоненкиса. Размерность вектора информативных признаков (параметров атмосферы) для разных классов явлений составила n=6-8.

При оперативном автоматизированном расчете прогноза (два раза в сутки) каждого из четырех явлений прогностические значения дискриминантных функций соответствующих явлений и зависящие от них вероятности прогноза рассчитываются в узлах сетки 150x150км, покрывающей европейскую территорию СНГ (или Сибири), в зависимости от прогностических значений полей полусферной гидродинамической модели (автор- Беркович Л.В.). Для каждого класса явлений при переходе от вероятностного к категорическому прогнозу в поле значений вероятностей изолинией пороговой вероятности Рпор выделяется прогнозируемая область категорического прогноза конкретного явления. Прогнозы передаются по каналам связи и по электронной почте в шесть УГМС европейской части России, в Минск и в Киев. Прогнозы с заблаговременностью 12 и 24ч дневных ветров со скоростью более 18м/с и ливневых осадков количеством более 14мм/12ч (критерий Пирси-Обухова (T) составил T=0,47-0,68) в течение 15 лет передаются в шесть Управлений по каналам связи в виде телеграмм и ретранслируются на сеть. В 2000-01гг. методы прогноза по данной модели с заблаговременностью 12 и 24ч опасных ветров скоростью более 25м/с были приняты в трех УГМС в качестве основных расчетных методов. В настоящее время, после трехлетних испытаний эти методы прогноза опасных ветров с заблаговременностью 36ч в трех Управлениях европейской части России техсоветами соответствующих УГМС (Верхне-Волжского, Северо-Западного и Татарстана) были рекомендованы для использования в оперативном режиме. Для уточнения прогнозируемой в пунктах скорости ветра при шквалах и смерчах используется полученное нами уравнение регрессии для прогноза скорости ветра, превышающей 20м/с (и менее 50м|с). Среднеквадратическая ошибка прогноза скорости ветра на независимой выборке составила 2,7м/с при средней скорости ветра 29м/с. Если прогнозируемая в пункте скорость достаточно высокая (более 30м/с), то с большой вероятностью в пункте или в его окрестности можно ожидать появления смерчей. Для уточнения прогноза явлений смерчей в умеренных широтах нами была разработана экспертная система прогноза смерчей умеренных широт. Система постоянно пополняется новыми правилами и способна к самообучению в процессе прогнозирования. Прогноз опасных ливней свыше 49мм|12ч рекомендован как основной расчетный метод по территории Волго-Вятского района (Т=0,58), и в других районах его успешность достаточно высока. В 2004-05гг разработанная модель была адаптирована к территории Западной и Восточной Сибири и показала достаточно высокую успешность.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО – РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Перов А.И., Полякова Л.А. (Воронеж)
mhitaryanl@mail.ru

Рассмотрим нелинейное дифференциально – разностное уравнение

$$\mathfrak{L}x(t) \equiv \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x^{(j)}(t+h_i) = f(t, x^{(j)}(t+h_i)),$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные комплексные числа, отклонения аргумента h_i – постоянные попарно различные вещественные числа, m и n – некоторые натуральные числа. Нелинейная функция $f(t, x_{ij})$ непрерывна и ω – периодична по времени t и удовлетворяет условию Липшица $|f(t, x_{ij}) - f(t, y_{ij})| \leqslant \sum\limits_{i=0}^{m}\sum\limits_{j=0}^{n-1} l_{ij}|x_{ij} - y_{ij}|$, где l_{ij} – некоторые неотрицательные постоянные, $l_j = l_{0j} + ... + l_{mj}$.

Рассмотрим характеристический квазимногочлен и характеристическое уравнение

$$L(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\lambda^j e^{\lambda h_i} = 0.$$

Предположим, что $L(ik\theta) \neq 0$ при $k = 0, \pm1, ...$, где $\theta = 2\pi/\omega$, и $|(ik\theta)^p/L(ik\theta)| \leqslant c_p$, $p = 0, 1, ..., n-1, n$; $k = 0, \pm1, ...$. Определим периодическую функцию Грина и ее производные, положив

$$G_\omega^{(p)}(t) = \frac{1}{\omega}\sum_k \frac{(ik\theta)^p}{L(ik\theta)}e^{ik\theta t}, p = 1, 2, ..., n-1.$$

Мы видим, что $G^{(p)}(t)$ непрерывна при $0 \leqslant p \leqslant n-2$. Производная $G^{(n-1)}(t)$ на отрезке $[0, \omega]$ является функцией ограниченной вариации и допускает каноническое разложение $G^{(n-1)}(t) =$

$G_c^{(n-1)}(t) + G_a^{(n-1)}(t)$, где первое слагаемое есть функция скачков, а второе – абсолютно непрерывная функция.

Периодическое решение $x(t)$ уравнения $\mathfrak{L}x = f$, где $f(t)$ из C, и его производные допускают интегральное представление

$$x^{(p)}(t) = \int\limits_0^\omega G^{(p)}(t-s)f(s)ds, p = 0, 1, ..., n-1;$$

$$x^{(n)}(t) = \int\limits_0^\omega dG^{(n-1)}(t-s)f(s)ds,$$

где последний интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Обозначим через C банахово пространство непрерывных ω – периодических функций с равномерной нормой. Если обозначить через $\mathcal{K}_p$ соответственные интегральные операторы, действующие в банаховом пространстве C, то

$$\|\mathcal{K}_p\| = \int\limits_0^\omega |G^{(p)}(t)|dt, p = 0, 1, ..., n-1;$$

$$\|\mathcal{K}_n\| = \sum_s |b_{sn}| + \int\limits_0^\omega |[G_a^{(n-1)}(t)]^{\cdot}|dt.$$

Здесь $1/\sum\limits_{s=0}^{m} a_{sn}e^{ik\theta h_s} = \sum\limits_s b_{sn}e^{ik\theta p_s}$, $\sum\limits_s |b_{sn}| < +\infty$ Положим для краткости $\kappa_p = \|\mathcal{K}_p\|$, $p = 0, 1, ..., n-1, n$.

Теорема. *Пусть выполнено основное условие*

$$q \equiv \sum_{p=0}^{n} \kappa_p l_p < 1.$$

Тогда исходное нелинейное уравнение имеет единственное ω – периодическое решение $x(t)$. Для этого решения справедливы оценки

$$\|x^{(p)}\| \leqslant \frac{\kappa_p}{1-q}\|f_0\|,\ p = 0, 1, ..., n-1, n$$

(здесь $f_0(t) \equiv f(t, 0)$). Периодическое решение может быть получено обычным методом последовательных приближений $\mathfrak{L}x^{[k]} =$

$f(t, x^{[k-1](j)}(t+h_i))$, отправляясь от произвольной n раз непрерывно дифференцируемой ω – периодической функции $x^{[0]}(t)$, причем имеют место следующие оценки погрешности $\|x^{(p)} - x^{[k](p)}\| \leqslant \frac{q^{k-1}}{1-q} \kappa_p \sum\limits_{j=0}^{n} l_j \ \|x^{[1](j)} - x^{[0](j)}\|, \ p = 0, 1, ..., n-1, n; \ k = 1, 2, ...$

Литература

1. Баскаков А.Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ / А.Г.Баскаков //Сибирский математический журнал, 1997, том 38, №1. – С. 14-28

2. Беллман Р. Дифференциально – разносные уравнения/ Р. Беллман, К.Кук, Москва, Мир, 1967, 548с.

3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом/ Москва, Наука, 1972. - 352с.

4. Перов А.И. Обобщенный принцип сжимающих отображений/ А.И. Перов // Вестник ВГУ, сер. Физика,математика, - 2005, №1. - С.190-201.

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Перов А.И., Фетисов Р.Б. (Воронеж)

romeo_romch@mail.ru

Рассмотрим нелинейное дифференциально-разностное уравнение:

$$Lx(t) \equiv \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^{(j)}(t+h_i) = f(t, x^{(j)}(t+h_i)),$$

где коэффициенты a_{ij} – постоянные комплексные числа, отклонения аргумента h_i – постоянные вещественные числа, m и n- некоторые натуральные числа. Нелинейная функция $f(t, x_{ij})$ непрерывна по t и удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, x_{ij}) - f(t, y_{ij})| \leqslant \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} l_{ij} |x_{ij} - y_{ij}|,$$

где l_{ij}- некоторые неотрицательные постоянные и $l_j = l_{0j} + ... + l_{mj}$.

Рассмотрим характеристический квазимногочлен и характеристическое уравнение

$$L(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \lambda^j \exp^{\lambda h_i} = 0.$$

Предположим, что $L(\lambda)$ не обращается в нуль на мнимой оси и $|(i\sigma)^p/L(i\sigma)| \leqslant c_p, p = 0, 1, ..., n-1, n; -\infty < \sigma < +\infty$. Определим ограниченную функцию Грина и её производные, положив,

$$G^{(p)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\sigma)^p}{L(i\sigma)} \exp^{it\sigma} d\sigma, p = 0, 1, ..., n-1.$$

Производная $G^{(n-1)}(t)$ является функцией ограниченной вариации и допускает канонические разложения $G^{(n-1)}(t) = G_c^{(n-1)}(t) + G_a^{(n-1)}(t)$, где первое слагаемое есть функция скачков, а второе– абсолютно непрерывная функция.

Ограниченное решение $x(t)$ уравнения $Lx = f$, где $f(t)$ непрерывная ограниченная функция, и его производные допускают интегральное представление.

$$x^{(p)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G^{(p)}(t-s) f(s) ds, p = 0, 1, ..., n-1;$$

$$x^{(n)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dG^{(n-1)}(t-s) f(s) ds,$$

где последний интеграл понимается в смысле Стильтьесса. Обозначим через C банахово пространство непрерывных ограниченных функций с супремум-нормой. Если обозначить через K_p соответсвующие интегральные операторы, действующие в банаховом пространстве C, то

$$\|K_p\| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G^{(p)}(t)| dt, p = 0, 1, ..., n-1;$$

$$\|K_n\| = \sum_s |b_{sn}| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G_a^{(n-1)}(t)| dt.$$

Здесь

$$1/\sum_{s=0}^{m} a_{sn} \exp^{i\sigma h_s} = \sum_s b_{sn} \exp^{i\sigma p_s}, \sum_s |b_{sn}| < +\infty.$$

Положим для краткости $æ_p = \|K_p\|, p = 0, 1, ..., n-1, n$.

Теорема. Пусть выполнено основное условие

$$q \equiv \sum_{p=0}^{n} æ_p l_p < 1.$$

Тогда исходное нелинейное уравнение имеет единственное ограниченное решение $x(t)$. Для этого решения справедливы оценки

$$\|x^{(p)}\| \leqslant \frac{æ_p}{1-q}\|f_0\|, p = 0, 1, ..., n-1, n$$

(мы предполагаем, что $f_0(t) \equiv f(t, 0)$ есть ограниченная функция). Ограниченное решение может быть полученно обычным методом последовательных приближенний $Lx^{[k]} = f(t, x^{[k-1](j)}(t-h_i))$, отправляясь от ограниченной функции $x^{[0]}(t)$, имеющей непрерывные и ограниченные производные до n-го порядка включительно, причем имеют место следующие оценки погрешности

$$\|x^{(p)} - x^{[k](p)}\| \leqslant \frac{q^{k-1}}{1-q} æ_p \sum_{j=0}^{n} l_j \|x^{[1](j)} - x^{[0](j)}\|,$$

где $p = 0, 1, ..., n-1, n; k = 1, 2, ...$ Если все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, единственное ограниченное решение ассимптотически усторйчиво в целом.

Литература

1. Баскаков А.Г. Сибирский математический журнал, 1997, том 38, №1, с.14-28.

2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения./ Р. Беллман, К. Кук, Москва: Мир, 1967.- 548с.

3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальнве уравнения с запаздывающим аргументом. / А.Д. Мышкис, Москва: Наука, 1972.- 352с.

4. Перов А.И. Вестник ВГУ, серия: физика, математика, 2005, №1, с.190-201.

РАСЧЁТ СПЕКТРОВ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

Пискунова А.О. (Борисоглебск)
stamina85@rambler.ru

Рассмотрена спектральная задача:

$$-u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in \Gamma), \qquad u'\big|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{1}$$

где Γ - геометрический граф-звезда с тремя рёбрами, длины каждого из которых равны π. Условия трансмиссии предлагались при этом следующими:

$$\sum_{\gamma} \frac{du}{d\gamma}(a) = 0, \tag{2}$$

где a – единственная внутренняя вершина Γ, а суммирование ведется по рёбрам γ; $\frac{du}{d\gamma}(a)$ – крайняя производная (см. [1, стр. 51]). Кроме задачи (1), (2) рассмотрены спектральные задачи:

$$-u''(x) = \lambda u(x) \quad (x \in \gamma), \qquad u(a) = 0,\ u'(b_\gamma) = 0, \tag{3_γ}$$

где b_γ – конец ребра γ, отличный от a.

Предложение. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неубывающая последовательность, составленная из собственных значений задачи (1), (2), причём каждое собственное значение λ задачи (1), (2) совпадает со столькими членами последовательности Λ, какова геометрическая кратность λ. Пусть $\mathrm{N} = \{\nu_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неубывающая последовательность, состоящая из собственных значений задач (3_γ), причём каждое число ν входит в N столько раз, чему равна сумма геометрических кратностей ν, как собственного значения задач (3_γ). Тогда

$$\lambda_0 < \nu_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \nu_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \nu_2 < \lambda_3 < \nu_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \nu_4 \leqslant \lambda_5 \leqslant \nu_5 < \ldots .$$

Замечание. Данное предложение поставляет пример, когда имеет место перемежаемость спектра задачи на геометрическом графе со спектрами задач на его подграфе. Такого рода результат был доказан в [1] (см. там стр. 118) для уравнения $-\dfrac{d}{d\Gamma}(pu') + qu = \lambda\rho u$ при краевых условиях другого типа: $u\big|_{\partial\Gamma} = 0$.

Литература

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

О СВОЙСТВЕ ХИКСА ЦЕПОЧКИ УПРУГИХ КОНТИНУУМОВ

Покорный Ю.В., Перловская Т.В., Гулынина Е.В. (Воронеж)

Рассматривается последовательность упругих стержней, расположенных вдоль отрезка $[0,l]$, в точках $\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_m$ они непрерывно сочленены упругими шарнирами. Точное описание может быть дано потенциальной энергией

$$\Phi(u)=\int_0^l \frac{u''^2}{2}dP-\int_0^l u dF, \tag{1}$$

где $F(x)$ величина внешней нагрузки, приложенной на отрезке $[0,x]$ и $P(x)$ — строго возрастающая функция со скачками в точках $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m$. Интеграл понимается по Стильтьесу. Скачки $F(x)\in BV_{[0,l]}$ соответствуют сосредоточенным внешним усилиям, скачки $P(x)$ в точках ξ могут быть выделены с помощью внеинтегральных слагаемых вида

$$\sum\frac{\gamma_k}{2}(u'(\xi_k+0)-u'(\xi_k))^2,$$

где γ_k — коэффициенты упругого люфта.

Если $F(x)=\Theta(x-s)$, где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, то минималь $H(x,s)$ функционала (1) есть функция влияния исходной системы. Это определение, оказываясь корректным математически, позволяет показать, что форма $u(x)$, определяемая внешней нагрузкой $F(x)$, выражается формулой

$$u(x)=\int_0^l H(x,s)dF(s).$$

Оказывается, что если F и P достаточно гладкие, то для $u(x)$ может быть описана хорошо известная краевая задача

$$(pu'')''=f(x)\quad(x\neq\xi_i)$$

при $p(x) = P'(x), f(x) = F'(x)$, причем в точках ξ_i будут, помимо условий непрерывности, выполняться условия

$$pu''(\xi_i - 0) = pu''(\xi_i + 0) = 0,$$

$$(pu'')'(\xi_i + 0) - (pu'')'(\xi_i - 0) = \gamma u(\xi_i).$$

Если внешнее усилие локализовать в одной из точек ξ_i, то деформация системы именно в этой точке примет максимальное значение, что вполне соответствует принципу Хикса.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА[1]

Покровский А.Н. (Санкт-Петербург)
anpokr@petrodvorets.spb.ru

Прямая задача. Для $m = \overline{1, M}$ заданы компоненты, состоящие из функций $g_m(t) \geqslant 0,\ T_{m-1} < t < T_M;\ g_m \equiv 0,\ t < T_{m-1}$ и чисел

$$V_m \in R,\ z_j \in R \quad \text{и} \quad a_{j,m} \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{N} a_{j,m}^2 = 1\ .$$

Требуется найти решение $u(z,t)$ системы алгебраических и дифференциального уравнений:

$$I_j(t) = \sum_{m=1}^{M} a_{j,m} g_m(t)[u(z_j,t) - V_m]; \quad Lu = \sum_{j=1}^{N} \delta(z - z_j) I_j(t) \qquad (1)$$

при $L = (\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 1)$, $u(\pm\infty, t) = 0$ и при $u(z,t) \equiv 0$ при $t \leqslant 0$. Задача сводится к системе интегральных уравнений Рикката и имеет при $z_{j+1} > z_j$ единственное решение.

Обратная задача. Заданы только функции $u(z_j, \tau t) = u_j(t)$, числа $\tau > 0$ и z_j неизвестны. Требуется найти число компонентов и сами компоненты.

При $\tau = 1$ и известных $z_{j+1} - z_j$ найден обратный оператор (для вычисления $I_j(t)$) линейной части задачи (1); используется обычная регуляризация при вычислении производных. Алгебраическая система в (1) решается последовательно на интервалах $(0, T_1)$, $(T_1, T_2), \ldots, (T_{M-1}, T_M)$.

[1]Работа поддержана РФФИ проект 04-01-00048-а

При неизвестных τ и z_j решение обратной задачи заведомо не единственно. Ошибки в задании этих параметров приводят к завышению числа M вычисляемых компонентов и к ошибочным значениям этих компонентов. Поэтому при решении обратной задачи необходимо дополнительно использовать условие минимума числа компонентов M на каждом этапе вычисления решения.

ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Полякова Л.А. (Воронеж)
mhitaryanl@mail.ru

Рассмотрим нелинейную систему с дискретным временем

$$x(n+1) = Ax(n) + f[n, x(n)]. \tag{1}$$

Здесь "время" n принимает всевозможные целые значения, $n \in \mathbb{Z}$ (множество целых чисел), а вектор $x(n)$ принадлежит N - мерному пространству $\mathbb{C}^N$, рассматриваемому с евклидовой матрицей. Предположим, что спектр матрицы A в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ не пересекается с единичной окружностью $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Определим постоянную $\sigma = \max\limits_{\lambda \in T} \|(\lambda I - A)^{-1}\|$, где I есть единичная матрица $N \times N$ - матрица. Нелинейная функция $f(n,x) : \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$ периодична по времени $f(n+p, x) = f(n, x)$, где p есть некоторое натуральное число. Нас интересуют условия существования и устойчивости периодических решений системы (1) с тем же самым периодом $x(n+p) = x(n)$. Будем считать, что равномерно по n выполнено условие $\|f(n,x) - f(n,y)\| \leqslant \rho(\|x-y\|)$, где $\rho(u), n \geqslant 0$, полуаддитивная функция, т.е. она непрерывна, $\rho(0) = 0$, не убывает и $\rho(u+v) \leqslant \rho(u) + \rho(v)$ при $u, v \geqslant 0$. Предположим, что нелинейная функция подчинена линейной в том смысле, что

$$\sigma\rho(u) < u, \quad u > 0.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены все перечисленные выше ограничения. Тогда нелинейная дискретная система* (1) *имеет единственное периодическое решение* $x(n)$. *Это решение удовлетворяет оценке*

$$\|x(n)\| \leqslant \tau^{-1}(\sigma a),$$

где $\tau^{-1}(v)$ *- функция , обратная к* $v = \tau(u) \equiv u - \sigma\rho(u)$ *при* $n \geqslant 0$, *а* $\|f(n,0)\| \leqslant a$. *Периодическое решение* $x(n)$ *можно получить методом последовательных приближений*

$$x^{[k]}(n+1) = Ax^{[k]}(n) + f[n, x^{[k-1]}(n)], k = 1, 2, ..., \tag{2}$$

причем за нулевое приближение $x^{[0]}(n)$ *может быть принята произвольная p - периодическая последовательность; в качестве* $x^{[k]}(n)$ *выбирается единственное p - периодическое решение линейной дискретной системы* (2) *(при известно* $x^{[k-1]}(n)$*).*

При доказательстве теоремы 1 используется дискретное преобразование Фурье и равенство Парсеваля для периодических функций, а также принцип обобщенного сжатия М.А.Красносельского.

В приводимой ниже теореме 2 $x(n)$ - это полученное в теореме 1 периодическое решение, $y(n)$ - произвольное решение нелинейной системы (1), рассматриваемое при $n = 0, 1, 2, ...$; r - произвольное положительное число; p и q - суммы кратностей собственных значений матрицы A, лежащих внутри и, соответственно вне единичного круга, $p + q = N$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все перечисленные ограничения. Тогда:*

если спектр матрицы A лежит внутри единичного круга ($sprA < 1$), *то периодическое решение абсолютно устойчиво, т.е.*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\|x(0)-y(0)\|\leqslant r} \|x(n) - y(n)\| = 0; \tag{3}$$

если спектр матрицы A лежит вне единичного круга ($sprA^{-1} < 1$)*, то периодическое решение абсолютно неустойчиво, т.е.*

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{\|x(0)-y(0)\|\geqslant r} \|x(n) - y(n)\| = +\infty; \tag{4}$$

если спектр матрицы A имеет точки как внутри, так и вне единичного круга, то существуют такие многообразия $\mathfrak{M}_i$ *и* $\mathfrak{M}_e$ *размерности p и q соответственно в пространстве* $\mathbb{C}^N$, *что при дополнительном предположении* $y(0) \in \mathfrak{M}_i$ *имеет место* (3), *а при дополнительном предположении* $y(0) \in \mathfrak{M}_e$ *имеет место* (4).

Литература

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд, Москва, Наука, 1967. - 376с.

2. Красносельский М. А. Об абсолютной устойчивости систем с дискретным временем / М. А. Красносельский, А.В. Покровский // Автоматика и телемеханика, - 1978, №2, - С.42-52.

3. Трубников Ю.В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю.В. Трубников, А.И. Перов, Минск, Наука и техника, 1986. - 200с..

4. Халанай А. Качественная теория импульсных систем /А. Халанай, Д. Векслер, Москва, Мир, 1971. - 312с.

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Полякова Л.А. (Воронеж)

mhitaryanl@mail.ru

Пусть $Q = (q_{ij})$ есть вещественная неотрицательная матрица $n \times n$ -матрица: $q_{ij} \geqslant 0$ при $i, j = 1, 2, ..., n$. Пусть положительны последовательные главные миноры матрицы $I - Q$, где I есть единичная $n \times n$ - матрица,

$$\varepsilon_p \equiv (I - Q)\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & p \\ 1 & 2 & ... & p \end{pmatrix} > 0, \;\; p = 1, 2, ..., n.$$

Тогда спектральный радиус матрицы Q меньше единицы (см. [1, с. 368-370], [2]),$q \equiv sprQ < 1$. Требуется, зная величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$, дать оценку сверху величины q, причем желательно, чтобы оценка была точная. Отметим, что оценке спектрального радиуса неотрицательных матриц посвящено достаточно много работ [3].

В полном объеме поставленная выше задача (А.И. Перов) пока не решена. Приведем некоторые полученные при исследовании этой проблемы результаты.

Совсем просто получается

Теорема 1. *Для треугольной матрицы* **Q** *справедлива формула* $sprQ = 1 - \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2/\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n/\varepsilon_{n-1}\}$. С помощью теоремы для матриц типа M из [4, с.51] устанавливается справедливость этого утверждения.

Теорема 2. *Имеет место следующая цепочка неравенств* $1 \geqslant \varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \cdots \geqslant \varepsilon_{n-1} \geqslant \varepsilon_n > 0$.

Теорема 3. *Для* $n = 2$ *имеет место точная оценка*

$$sprQ \leqslant \frac{1 - \varepsilon_1}{2} + \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon_1)^2}{4} - \varepsilon_2} < 1 - \frac{\varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1}.$$

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц/ Ф.Р. Гантмахер, Москва, Наука, 1967. - 576с.

2. Перов А.И. Обобщенный признак сжимающих отображений/ А.И. Перов // Вестник ВГУ, сер. Физика,математика, - 2005, №1. - С.190-201.

3. Красносельский М.А. Позитивные линейные системы./ М.А. Красносельский, Е.А. Лифщиц, А.В. Соболев, Москва, Наука, 1985. - 256с.

4. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее приложения./ М. Пароди, Москва, ИЛ, 1960. - 172с.

МЕТОД ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КдФ НА ПОЛУОСИ

Поплавский Д.В. (Саратов)

PoplavskiVB@mail.ru

Рассматривается следующая смешанная задача

$$\left.\begin{aligned} &u_t + 2u_x(3u^2+v^2) + 4uvv_x + u_{xxx} = 0,\\ &v_t + 2v_x(3v^2+u^2) + 4vuu_x + v_{xxx} = 0,\ x \geqslant 0,\ t \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{gathered} u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\\ u(0,t) = u_1(t),\ u_x(0,t) = u_2(t),\ u_{xx}(0,t) = u_3(t),\\ v(0,t) = v_1(t),\ v_x(0,t) = v_2(t),\ v_{xx}(0,t) = v_3(t). \end{gathered}\right\} \qquad (2)$$

Здесь u_k, v_k $(k = \overline{0,3})$— непрерывные комплекснозначные функции. Система (1) допускает эквивалентное представление нулевой кривизны (см. [1]), что дает возможность применения метода обратной спектральной задачи, в котором решение нелинейной задачи (1)-(2) сводится к обратной задаче на полуоси по так называемой матрице Вейля (см. [2],[3]) для следующей системы

$$Y^{'} - i\begin{pmatrix} 0 & u & v\\ u & 0 & 0\\ v & 0 & 0 \end{pmatrix} Y = i\lambda \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y,$$

где $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)^T$, а λ— спектральный параметр.

Получены эволюционные уравнения по переменной t для элементов матрицы Вейля и конструктивная процедура решения задачи (1)-(2).

Литература

1. *Наянов В.И.* Многополевые солитоны. М., Наука, 2005, 278 с.

2. *Yurko V.A.* An inverse spectral problem for differential systems on the half-line with multiplied roots of characteristic polynomial. J. Inv. Ill-Posed Problems 13, № 5, 2005, 503-512.

3. *Юрко В.А.* Обратная спектральная задача для сингулярных несамосопряженных дифференциальных систем. Мат. Сборник, Т. 195, № 12, 2004, 123-155.

ПОЛНОТА СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Провоторов В.В. (Воронеж)

В прикладных задачах для систем с распределенными параметрами [1,2] актуальна ситуация, когда информация об измеряемых параметрах системы определяется в точке (или конечном числе точек) интервала изменения пространственной переменой. Это приводит к изучению задач типа Штурма-Лиувилля на отрезке, в конечном числе точек которого дифференциальное уравнение заменено некоторыми соотношениями.

Пусть $\xi_k = k\frac{\pi}{m}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Обозначим $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \gamma_k$, где $\gamma_k = (\xi_{k-1}, \xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m$; очевидно $\overline{\Gamma} = [0, \pi]$. Пусть N_m — множество функций $y\,(x) \in C_{[0,\pi]} \cap C^2_\Gamma$, производная которых имеет скачки в точках ξ_k пропорциональные значениям $y\,(\xi_k)$:

$$y'\,(\xi_k - 0) - y'\,(\xi_k + 0) = \alpha_k y\,(\xi_k)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

(здесь α_k — фиксированная постоянная). На множестве N_m рассмотрим краевую задачу

$$-y'' + q\,(x)\,y = \lambda y \tag{1}$$

$$U\,(y) \equiv y'\,(0) - hy\,(0) = 0, \quad V\,(y) \equiv y'\,(\pi) + Hy\,(\pi) = 0, \tag{2}$$

Теорема. *1). Система собственных функций* $\{\psi_n\,(x)\}_{n\geqslant 0}$ *краевой задачи (1),(2) полна и образует ортогональный базис в* $L^2\,(0,\pi)$.

2). Для любой абсолютно непрерывной функции $f(x), x \in [0,\pi]$, имеет место разложение в обобщенный ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x), a_n = \frac{1}{\varpi_n} \int_0^{\pi} f(t)\psi_n(t)\,dt, \varpi_n^2 = \int_0^{\pi} \psi_n^2(t)\,dt, \tag{3}$$

причем ряд сходится равномерно на $[0,\pi]$. 3). Для $f(x) \in L^2(0,\pi)$ ряд (3) сходится в $L^2(0,\pi)$, причем имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n^2.$$

Литература

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука 1965, 474 с.

2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах.- М.: Физматлит, 2004, 272 с.

ЗАДАЧА ГАШЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Провоторова Е.Н. (Воронеж)

В основе задач управления продольными колебаниями стержня лежит следующая задача с начальными и финальными условиями: найти функцию $u(x,t), x \in [0,\ell] \times [0,T]$, удовлетворяющую уравнению

$$u''_{tt}(x,t) = a^2 u''_{xx}(x,t) \tag{1}$$

начальным условиям в момент времени $t = 0$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u'_t(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

финальным условиям в момент времени $t = T$:

$$u(x,T) = \varphi_1(x), \;\; u'_t(x,T) = \varphi_1(x); \tag{3}$$

граничные условия для функции $u(x,t)$ имеют вид

$$u(0,t) = \mu(t), \;\; u(\ell,t) = \nu(t). \tag{4}$$

Рассмотрим важную в прикладных аспектах ситуацию, когда стержень в конечном числе точек отрезка $[0, \ell]$ имеет точечные неоднородности: непрерывность решения $u(x,t)$ в этих точках сохраняется, а производные $u'_x(x,t)$ имеют скачки пропорциональные значениям $u(x,t)$ в этих точках:

$$u'_x\left(k\frac{\ell}{m}-0,t\right)-u'_x\left(k\frac{\ell}{m}+0,t\right)=\alpha_k u\left(k\frac{\ell}{m},t\right), k=1,2,...,m-1, \tag{5}$$

здесь $m-1$ - число точек неоднородностей отрезка $[0, \ell]$. Такие неоднородности моделируют вставки датчиков в тело стержня при контроле (мониторинге) колебательного процесса.

Обозначим $\Re$ - множество функций $u(x,t)$ непрерывных в прямоугольнике $\bar{R}$, имеющие непрерывные вторые производные по переменным x, t в области $R \backslash \left\{k\frac{\ell}{m}, k=1,2,...,m-1\right\} \times [0,T]$, а в точках $k\frac{\ell}{m}$ $(k=1,2,...,m-1)$ удовлетворяющих соотношениям (5).

Основою задачи управления продольными колебаниями стержня является задача гашения колебаний - задача перевода колеблещегося стержня в состояние покоя, управляющими функциями являются функции $\mu(t)$, $\nu(t)$ пространства $C^2_{[0,\pi]}$. Показана полнота системы собственных функций задачи Штурма-Лиувилля соответствующей задаче (1),(2),(4); для определения функций $\mu(t)$, $\nu(t)$ построены уравнения, аналогичные моментным уравнениям при разложении по собственным функциям задачи (1),(2),(4).

ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Прозоров О.А. (Ростов-на-Дону)

kvm@math.rsu.ru

Известно, что существуют процессы с участием величин, которые должны быть неотрицательными по физическому смыслу. Необходимым условием правильности математической модели такого процесса является положительность ее эволюционного оператора. При некоторых предположениях, линейные положительные операторы обладают специальными спектральными свойствами, эти свойства имеют большое значение в теории устойчивости, теории ветвления решений нелинейных уравнений в частных производных [2].

В докладе рассматривается задача Коши на прямой для уравнения с псевдодифференциальным оператором, который определяется своим преобразованием Фурье — рациональной функцией вида

$$-\xi^{2k} + R(i\xi)/P(i\xi), \quad k \in N, \tag{1}$$

где $k \geqslant 1$ и полином $P(i\xi)$ не имеет вещественных корней. Уравнение (1) является обобщением параболических уравнений, рассмотренных в [5]. Вопрос о положительности эволюционного оператора задачи (1) решается при помощи теоремы Бохнера [1] переходом к условиям, которым удовлетворяет образ Фурье положительной функции. Данная задача, а также идея использовать теорему Бохнера предложены в [4]. Оказывается, что положительность возможна только при $k = 1$. Получены достаточные условия положительности эволюционного оператора, а также многомерные обобщения.

Литература

1. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. Физматгиз. 1962.

2. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям решений дифференциальных уравнений. "Наука".1966.

3. Юдович В. И. Лекции об уравнениях математической физики. Ростов-на-Дону, “Экспертное бюро”, 1998. 240 с.

4. Прозоров О. А. Положительность эволюционного оператора задачи Коши для параболических уравнений // Изв. Вузов Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. 2004. № 3. С. 12–17.

КОЛЛЕКТИВНЫЙ СЕТЕВОЙ ИНТЕЛЛЕКТ, КАК НОВАЯ ИНФОРМАЦИОННАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ТЕСТИРОВАНИЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Протасов В.И. (Москва)

protonus@yandex.ru

В настоящей работе исследована возможность использования коллективного разума студентов в компьютерной сети для тестирования знаний студентов по математике с применением новой информационной технологии.

Цель данной работы — исследовать возможности применения нового метода в системе образования, как для обучения студентов, так и для оценки знаний. Новым является то, что предлагаемый подход базируется на применении известного классического генетического алгоритма и позволяет оценить вклад каждого участника как генератора идей, «комбинатора» или эксперта, выставляя им соответствующие рейтинги. Образованный таким образом генетический консилиум [1] обладает рядом преимуществ по сравнению с известными методами коллективного творчества.

Предложены простые правила функционирования коллективного интеллекта, апробированные автором на ряде разных задач, как в компьютерной сети, так и в «безмашинной» среде.

По данной методике было проведено занятие по проверке навыков интегрирования и последующей их оценки в процессе коллективного тестирования группы студентов из шести человек. После самостоятельного изучения раздела и получения дополнительной консультации студентам было предложено пройти тестирование с использованием генетического консилиума по методике, описанной выше. После проведения четырех итераций популяция решений выродилась к общему коллективному ответу. Для оценки вклада каждого из участников в общий ответ из него вычленялись ответы каждого участника на первой и второй итерациях.

Литература

1. Протасов В.И. Генерация новых знаний сетевым человеко-машинным интеллектом. Нейрокомпьютеры, разработка и применение. М. № 7-8, 2001.

ФОРМУЛА РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ[1]

Прядиев В.Л., Прядиев А.В. (Воронеж)

pryad@mail.ru

Рассмотрим начальную задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx}(x,t) + r(x)u_x(x,t) - q(x)u(x,t) = u_{tt}(x,t) \quad \big(x \in \mathbb{R},\ t > 0\big) \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \end{array} \right. , \tag{1}$$

в которой $r \in C^1(\mathbb{R})$, $q \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$. Пусть $Ly = p_0 y'' + p_1 y' + p_2$, где p_i непрерывны, $p_0 > 0$. Пусть G - какое-либо фундаментальное решение уравнения $Ly = f$. Пусть функция $g(x,t,s)$ такова, что для любого $s \in \mathbb{R}$ 1) $g(\,\cdot\,,\,\cdot\,,s)$ непрерывна на $\mathbb{R}\times[0;+\infty)$, 2) на множестве $\Pi(s) = \big(\mathbb{R}\times[0;+\infty)\big) \setminus \big\{(x,t)\,\big|\, t = |x-s|\big\}$ функция

[1] Работа поддержана грантом РФФИ (04-01-00049).

$g(\,\cdot\,,\,\cdot\,,s)$ удовлетворяет уравнению $u_{xx}+ru_x-qu=u_{tt}$, 3) g_{xx}, g_{xt} и g_{tt} непрерывны на каждой из компонент связности множества $\Pi(s)$ и непрерывно доопределяемы с каждой из этих компонент на их замыкания, 4) $g(\,\cdot\,,0,s)=G(\,\cdot\,,s)$.

Теорема. Решение задачи (1) существует и представимо в виде

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t,s)(L\varphi)(s)\,ds. \tag{2}$$

Замечание. Аналогичный результат для начально-краевой задачи на отрезке установлен в [1].

Следствие. Для любой точки $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0;+\infty)$ функция $g(x,t,\,\cdot\,)$ удовлетворяет на $s\in(-\infty;x-t)\cup(x+t;+\infty)$ уравнению $(p_0y)''-(p_1y)'+p_2y=0$, а решение задачи (1) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}
&u(x,t)=\int\limits_{x-t}^{x+t} g(x,t,s)(L\varphi)(s)\,ds+\\
&+\Big(\varphi(s)\big(p_0(s)g(x,t,s)\big)_s-\\
&-\varphi'(s)p_0(s)g(x,t,s)-\varphi(s)p_1(s)g(x,t,s)\Big)\Big|_{s=x-t}^{s=x+t}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Замечание. Из (3) вытекает представление (1.14) из [2, Гл. VI, § 1], установленное там для $r\equiv 0$.

Литература

1. Прядиев В. Л., Прядиев А. В. Формула решения для некоторых классов начально-краевых задач для гиперболического уравнения с двумя независимыми переменными // Автоматика и телемеханика (отправлено в печать).

2. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию (самосопряжённые обыкновенные дифференциальные операторы). - М.: Наука, 1970.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ КАПУТО[1]

Псху А.В. (Нальчик)

pskhu@mail333.com

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \partial_{0x_k}^{\alpha_k} u(x) + \lambda u(x) = f(x), \tag{1}$$

где

$$\partial_{0x_k}^{\alpha_k} u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_k)} \int\limits_0^{x_k} \frac{[(\partial/\partial x_k)u(x)]_{x_k=t}}{(x_k-t)^{\alpha_k}} dt$$

– дробная производная Капуто порядка α_k по переменной x_k ([1, с.11]), $\alpha_k \in (0;1)$, $x = (x_k) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_k > 0$, $k = \overline{1,n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассматривается краевая задача: в области $D = (0;a_1) \times \cdots \times (0;a_n)$ найти решение уравнения (1), $u(x) \in C(\bar{D})$, $\partial_{0x_k}^{\alpha_k} u(x) \in C(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{x_k \to 0} u(x) = \tau\left(x_{(k)}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{2}$$

где $x_{(k)} = (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

В работе решена задача (1), (2). В терминах специальной функции Райта построен явный вид решения.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. -М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 06–01–96625, № 06–01–96627) и Фонда содействия отечественной науке.

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С n ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Пулькина Л.С., Дмитриев В.Б. (Самара)

louise@valhalla.sama.ru, dmitriev_v.b@mail.ru

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)u_{x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} +$$

$$+a_{n+1}(x,t)u_t + a(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

в цилиндре $Q_T = \{(x,\tau) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < \tau < T\}$, где Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, и поставим для него задачу с начальными условиями Коши

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и нелокальным условием

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(n,x_i)|_{S_T} = \int\limits_{\Omega} K\big(x,y,t,u(y,t)\big)\,dy, \tag{3}$$

где $\varphi(x), \psi(x), K\big(x,y,t,u(y,t)\big)$ заданы, а $S_T = \{(x,t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ - боковая поверхность цилиндра Q_T. При этом

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \nu\xi^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \mu\xi^2, \quad \nu > 0.$$

В работе доказывается, что при выполнении некоторых условий на функции a_{ij}, a_i, a, K задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ для $f \in L_{2,1}(Q_T), \varphi \in W_2^1(\Omega)$ и $\psi \in L_2(\Omega)$.

Доказательство единственности решения базируется на полученной априорной оценке.

Существование решения доказывается методом Галеркина.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пулькина Л.С., Климова Е.Н. (Самара)
elena_klimova@mail.ru

Рассматривается нелинейное гиперболическое уравнение

$$u_{xt}(x,t) = F(x,t,u,u_x,u_t)$$

в области

$$\Omega = \{(x,t): \quad 0 < x < l,\ 0 < t < T\},$$

для которого поставлена нелокальная задача со следующими условиями:

$$u(0,t) = \mu(t),$$

$$u(x,0) + \int_0^T h(x,\tau)u(x,\tau)d\tau = g(x),$$

где $\mu(t)$, $h(x,t)$, $g(x)$ - заданные функции. Доказана справедливость следующего утверждения:

если $\mu(t) \in C^1([0,T])$, $g(x) \in C^1([0,l])$, $F(x,t,u,p,q)$ непрерывна по всем переменным, $|F| \leqslant M$ и удовлетворяет условию Липшица:

$$|F(x,t,u,p,q) - F(x,t,\overline{u},\overline{p},\overline{q})| \leqslant L(|\ u - \overline{u}\ | + |\ p - \overline{p}\ | + |\ q - \overline{q}\ |),$$

то существует единственное решение поставленной задачи, принадлежащее классу функций $C^1(\overline{\Omega})$, имеющих в Ω непрерывную смешанную производную.

Для доказательства справедливости этого утверждения показано, что поставленная задача при выполнении условия согласования

$$\mu(0) + \int_0^T h(0,t)\mu(t)dt = g(0)$$

эквивалентна операторному уравнению $u = Tu$, где

$$Tu = \mu(t) - \mu(0) + g(x) - \int_0^T h(x,\tau)u(x,\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^x F d\xi d\tau.$$

Найдены условия на входные данные, при выполнении которых оператор T является сжимающим и, следовательно, существует единственное решение уравнения $u = Tu$. В силу эквивалентности этого уравнения и поставленной задачи тем самым доказана ее однозначная разрешимость.

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

Раев К.Т., Раев А.К. (Кыргызстан)

raev_k@rambler.ru

В области $D = \{(x,y) : 0 \leqslant x < l, 0 < y < h\}$ рассмотрим следующую задачу: требуется найти функцию $u\,(x,y)$, доставляющую экстремальное значение функционалу

$$L\left[u\,(x,y)\right] = \iint\limits_D \left[u_x^2 - a\,(x,y)\,u_y^2 - b\,(x,y)\,u^2 + 2f(x,y)u\right] dxdy \quad (1)$$

удовлетворяющую условию

$$u(0,y) = \varphi(y), 0 \leqslant y \leqslant l \quad (2)$$

Запишем уравнение Остроградского

$$L_u - (L_{u_x})_x - \frac{\partial L_{u_x}}{\partial u} u_x - \frac{\partial L_{u_x}}{\partial u_x} u_{xx} - \frac{\partial L_{u_x}}{\partial u_y} u_{xy} -$$

$$-(L_{u_y})_y - \frac{\partial L_{u_y}}{\partial u} u_y - \frac{\partial L_{u_y}}{\partial u_x} u_{xy} - \frac{\partial L_{u_y}}{\partial u_y} u_{yy} = 0$$

Вычислив соответствующие производные, получим следующую задачу

$$u_{xx} - a(x,y)u_{yy} - b_1(x,y)u_y + c(c,y)u = f(x,y) \quad (3)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (4)$$

Решение задачи (3), (4) ищем в виде

$$u(x,y) = \varphi(x) + \int_0^x \int_0^y exp(-\alpha(x - s + y - \nu)Q(s,\nu)dsd\nu, \quad (5)$$

где α - некоторая постоянная, $Q(x,y)$ - новая неизвестная функция.

Подставляя (5) в уравнение (3) получим интегральное уравнение Вольтерра второго порядка в следующем виде

$$Q(x,y) = (\alpha - a(x,y)) \int_0^x exp(-\alpha(x-s)Q(s,y)ds -$$

$$-a(x,y) \int_0^y exp(-\alpha(y-\nu)Q(x,\nu)d\nu -$$

$$-(\alpha^2 - 2\alpha a(x,y) - b(x,y))u + \alpha^2\varphi(y) - 2\alpha a(x,y)\varphi(y) + f(x,y)$$

Как известно это уравнение имеет единственное решение и тем самым мы получим решение поставленной задачи.

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Раев К.Т., Раева М.Т. (Кыргызстан)

raev_k@rambler.ru, mraeva06@rambler.ru

В настоящее время начались практические мероприятия по включению в школьный курс математики нового раздела: „элементы статистики, комбинаторики и теории вероятностей“. В данном этапе недостаточны методические рекомендации, призванные облегчить процесс преподавания этого раздела в средней школе и многие учителя испытывают значительные затруднения при раскрытии сущности и решении задач по новой тематике. Это связано в первую очередь с отсутствием соответствующего опыта у учителей, так как новый учебный материал отсутствовал в школьных программах. Главная цель нашего доклада - помочь учителям в преподавании методики изучения темы закона больших чисел.

Окружающий нас мир, это бесконечное многообразие различныз явлений. Общаясь с миром мы приходим к мысли, что в первом приближении все явления разделяется на два вида: необходимые и случайные. Необходимые явления кажутся нам явлениями неизбежно происходящими и изучение, описание, предсказание и установление закономерностей необходимых явлений представляется закономерным. Случайные явления кажутся могущими как произойти, так и непроизойти. Они в обыденном представлении кажутся нам крайне редкими, не имеющими закономерностей, неподчиняющими человеческой силе и нарушающими естественный ход развития.

Сущность закона больших чисел излагается учителем, который рассказывает ученикам о непредсказуемости отдельного конкретного события, которое может произойти или непроизойти при данном испытании. Однако при неоднократном повторении испытаний могут наблюдаться определенные закономерности, т. е. математические законы теории вероятностей получены в результате абстрагирования реальных статистических закономерностей, свойственных массовым случайным явлениям.

Следует обратить внимание учащихся на то, что эти закономерности обладают свойством устойчивости и под законм больших чисел не следует понимать какой-то один общий закон, связанный с большими числами, а обобщенное название нескольких теорем, в которых выясняются условия того, что совокупное действие многих случайных величин приводит к результату, почти не зависящему от случая, т. е. при неограниченном увеличении числа испытаний средние величины стремятся к некоторым постоянным. Таким образом, случайность и необходимость неотделимы друг от друга.

Следует обратить внимание учащихся, что основные теоремы закона больших чисел опираются на известное неравенство знаменитого русского математика П. Л. Чебышева. В форме

$$P(|X - M(X)| > \epsilon) \leqslant \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

оно устанавливает верхнюю границу, а в форме

$$P(|X - M(X)| \leqslant \epsilon) \leqslant 1 - \frac{D(X)}{\epsilon^2}$$

оно устанавливает нижнюю границу вероятности рассматриваемого события.

В докладе расскажем один вариант изложения, который будет доступен школьнику.

НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОТ ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Ратыни А.К. (Иваново)
ratyni@isuct.ru

Рассматриваются задачи $(j = 0, 1)$:

$$\Delta u + c(x)u = f(x)\ (x \in D),\ u(x) - \beta_j(x)u(\sigma_j x) = \psi(x)\ (x \in S). \tag{1_j}$$

Здесь и далее: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – точка $R^n (n \geqslant 2)$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$; D — ограниченная область R^n с границей $\partial D = S \in C^2$; $\bar{D} = D \cup S$; Δ – оператор Лапласа в R^n; σ_j– однозначные непрерывные отображения S в $\bar{D}$;
$c(x) \in C_\alpha(D)$ и $\beta_j(x) \in C(S)$– заданные функции. В работе используются пространства Гельдера, определенные в монографии А. Фридмана "Уравнения с частными производными параболического типа".

Обозначим $z(x; P, \mu)$ решение задачи Дирихле (P– область R^n, μ – число)

$$\Delta z + \mu z = 0\ (x \in P), \quad z(x) = 1\ (x \in \partial P).$$

Теорема. *Пусть существуют числа* $a \in (0,1)$, $\mu_k \leqslant 0$ *и открытые* n*-мерные шары* P_k $(k = 1,\ldots,m)$ *такие, что*: $\sigma_j S \subset Q \equiv \bigcup_{k=1}^{m} \bar{P}_k \subset \bar{D}; c(x) \leqslant 0$ *в* $D \setminus Q$; $c(x) \leqslant \mu_k$ *в* P_k; $|\beta_j(x)|Z(\sigma_j x) \leqslant a$ *при* $x \in S$ $(j = 0,1)$, *где* $Z(x) = \min\{z(x;\mu_1,P_1),\ldots,z(x;\mu_m,P_m)\}$, $x \in Q$. *Тогда для любых* $f \in C_\alpha(D)$, $\psi \in C(S)$ *каждая из задач* (1_j) *имеет единственное решение* $u_j(x) \in C_{2+\alpha}(D)$ $(j = 0,1)$. *Если же, кроме перечисленных условий, справедливо включение* $\sigma_0 S \subset D$, *то для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *зависящее от* $\varepsilon, a, n, \alpha$, *норм* c, f *в* $C_\alpha(D)$, *норм* β_0, ψ *в* $C(S)$ *и расстояния* $\sigma_0 S$ *от* S, *что при выполнении неравенства* $\|\beta_0(x) - \beta_1(x)\|_{C(S)} + \||\sigma_0 x - \sigma_1 x|\|_{C(S)} \leqslant \delta$ *будет справедливо неравенство* $\|u_0(x) - u_1(x)\|_{C_{2+\alpha}(D)} \leqslant \varepsilon$.

ОБ ОДНОЙ ВЕКТОРНО-АДДИТИВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ

Романова Н.С. (Минск)
natalaromanova@yahoo.com

Ранее в [1,2] был предложен метод многокомпонентного расщепления полной аппроксимации, который снимает ряд недостатков метода суммарной аппроксимации. Эти схемы не вписываются в канонические структуры и поэтому общая теория для этих алгоритмов мало пригодна. Метод многокомпонентного расщепления имеет ряд преимуществ, например, он обладает полной аппроксимацией и является асимптотически устойчивым, что свидетельствует о его высокой точности, и дает возможность использовать для построения итерационных методов решения стационарных задач. В данном сообщении для нестационарных задач математической физики рассматривается векторно-аддитивный алгоритм:

$$\frac{\widehat{y}_\alpha - \frac{1}{p}\sum\limits_{\beta=1}^{p} y_\beta}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta \widehat{y}_\beta + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta y_\beta = f, \quad y_\alpha(0) = u_0, \quad \alpha = \overline{1,p}.$$

Следуя работе [3], где обсуждается принцип векторно-аддитивного моделирования дифференциального уравнения при помощи однотипных задач с последующим применением для их решения разностных схем, исследуется устойчивость указанного выше метода. Доказательство удалось провести только для $p = 2$.

Теорема. Если A_α - положительно определенные операторы, то алгоритм при $p=2$ безусловно устойчив и при любых $\tau < \tau_0$ справедлива оценка $\|v^{(n+1)}\|_3^2 \leqslant \tau^2(1+\tau c_0)^{-n}\| \sum\limits_{\alpha=1}^{2} A_\alpha y_\alpha(0)\|^2$, см обозначения в [3].

Проведен вычислительный эксперимент и сравнительный анализ с другими экономичными методами.

Литература

1. Абрашин В.Н. // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т.26, №2. – С.311–323.

2. Жадаева Н.Г. // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т.28, №7. – С.1218–1230.

3. Абрашина-Жадаева Н.Г., Романова Н.С. // Дифференц. уравнения. – 2006. (в печати).

О СВОЙСТВАХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ[1]

Рыхлов В.С. (Саратов)

RykhlovVS@info.sgu.ru

Пусть $L(\lambda)$ есть пучок $\ell(y,\lambda) = \sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}(x)$, $U_j(y,\lambda) \equiv U_{j0}(y,\lambda) + U_{j1}(y,\lambda) := \sum_{s+k=\sigma_j} \lambda^s(\alpha_{jsk}y^{(k)}(0) + \beta_{jsk}y^{(k)}(1)) = 0$, $j=\overline{1,n}$, где $p_{sk}, \alpha_{jsk}, \beta_{jsk} \in \mathbf{C}$, $\sigma_j \leqslant n-1$. Пусть $\sigma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$. Предположим корни $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ уравнения $\sum_{s+k=n} p_{sk}\omega^k = 0$ попарно различны и отличны от нуля. Положим $y_k(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_k x)$, $k=\overline{1,n}$. Обозначим $V_k(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda^{\sigma_1}}U_{10}(y_k,\lambda),\ldots,\frac{1}{\lambda^{\sigma_n}}U_{n0}(y_k,\lambda)\right)^T$, $W_k(\lambda) = e^{-\lambda\omega_k}\left(\frac{1}{\lambda^{\sigma_1}}U_{11}(y_k,\lambda),\ldots,\frac{1}{\lambda^{\sigma_n}}U_{n1}(y_k,\lambda)\right)^T$. Предположим, что $\operatorname{rank}(V_1,V_2,\ldots,V_n) = s$, $\operatorname{rank}(W_1,W_2,\ldots,W_n) = t$, $1 \leqslant s,t \leqslant n$, $s+t \geqslant n$. Для $\Gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)^T$ пусть $g(x,\lambda,\Gamma)$ есть решения уравнения $\ell(y,\lambda) = 0$, введенные в [1]. Положим $\chi_{J_k} = \sum_{\alpha\in J_k}\omega_\alpha$, где J_k, $k=1,2,\ldots,N$, – произвольный набор из k различных натуральных чисел от 1 до n, $\chi_{J_0} = 0$. Тогда характеристический определитель (х.о.) пучка $L(\lambda)$ можно записать $\Delta(\lambda) = \det\left(U_j(y_k,\lambda)\right)_{j,k=1}^n = \lambda^\sigma \sum_{J_k} P^{J_k} e^{\lambda\chi_{J_k}}$. Через M_Δ обозначим выпуклую оболочку тех точек χ_{J_k}, для которых $P^{J_k} \neq 0$. M_Δ назовем характеристическим многоугольником (х.м.) функции $\Delta(\lambda)$. Аналогично введем х.м. $M_{g(x,\lambda,\Gamma)}$ функции $g(x,\lambda,\Gamma)$ при любом фиксированном $x \in [0,1]$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003)

Назовем х.м. вектора Г (обозначаем $M(\Gamma)$) выпуклую оболочку всех $M_{g(x,\lambda,\Gamma)}$ при $x \in [0,1]$. При исследовании полноты системы с.п.ф. пучка $L(\lambda)$ использовались леммы о х.м. векторов V_j и W_j ([1]). Эти леммы можно уточнить.

Лемма 1. *Для фиксированного* j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *х.м.* $M(V_j)$ *содержится в выпуклой оболочке* M_Δ *и тех точек* χ_{J_k}, *для которых* $j \in J_k$ *и* $n - s \leqslant \operatorname{card} J_k \leqslant t + 1$.

Лемма 2. *Для фиксированного* j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ *х.м.* $M(W_j)$ *содержится в выпуклой оболочке* M_Δ *и тех точек* χ_{J_k}, *для которых* $j \notin J_k$ *и* $n - s - 1 \leqslant \operatorname{card} J_k \leqslant t$.

Литература

1. Rykhlov V.S. Spectral and Evolutional Problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. – Simferopol: Simferopol State University. – 1997. – Vol. 7. – P. 70–73.

ОЦЕНКА АСИМПТОТИКИ ПРИ $t \to \infty$ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПОЛОСЕ

Рябенко А.С. (Воронеж)

В работе рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2(x_3)\,\Delta v = g(x,t) \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями:

$$v(x,t)\,|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$v|_{x_3=0} = v|_{x_3=d} = 0, \tag{3}$$

где $t > 0$, $(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0; d], a^2(x_3) \in C[0; d], 0 < \varepsilon_1 \leqslant |a(x_3)| \leqslant \varepsilon_2$, при некоторых $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Для изучения поведения решения задачи (1)-(3) при $t \to \infty$ применен принцип локализации, позволяющий свести изучение этого поведения к исследованию контуров потери аналитичности образов Фурье-Лапласа $L_{t\to\gamma}F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}$ решения задачи (1)-(3) в окрестности точки поворота.

Выделение зон аналитичности основано на априорных оценках образа Фурье-Лапласа задачи (1)-(3) решения.

Тот факт, что аргумент x_3 изменяется на отрезке $[0; d]$, позволяет при параметре γ, изменяющемся во множестве комплексной плоскости вида

$$\{|\gamma| \leqslant \delta_1\} \cup \{\,\gamma|\, 0 \leqslant |\arg\gamma| \leqslant \pi - \varepsilon_0\}, \varepsilon_0 > 0, \quad \delta_1 > 0$$

получить следующую априорную оценку решения

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right\| + \sqrt{|\gamma| + |s|^2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_3}\right\| + (|\gamma| + |s|^2)\,\|u\| \leqslant c\,\|f\|\,,$$

где $u(\gamma, s_1, s_2, x_3)$ и $f(\gamma, s_1, s_2, x_3)$ это образы Фурье-Лапласа $L_{t\to\gamma}F_{x_1,x_2\to s_1,s_2}$ функций $v(x_1,x_2,x_3,t)$ и $f(x_1,x_2,x_3,t)$ соответственно. Отметим также, что в окрестности нуля $|\gamma| \leqslant \delta_1$ удалось получить априорную оценку вида $(|\gamma| + \delta_2)\,\|u(x_3,\gamma,0)\| \leqslant c\,\|f\|$ с некоторой положительной постоянной $\delta_2 > 0$.

Введем необходимое функциональное пространство.

Определение. Пусть $\delta > 0$. Функция $u(x_1,x_2,x_3,t)$ принадлежит пространству $H^+_{2,1,\delta} = \{\,u|\, u(x_1,x_2,x_3,t)\exp[\delta t] \in \in L_2(t > 0; (x_1,x_2) \in R^2; x_3 \in [0;d])\}$ с нормой

$$\|u\|_{2,1,\delta} = \|u\exp[\delta t]\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\exp[\delta t]\right\| + \sum_{j=1}^{3}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_j}\exp[\delta t]\right\|,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(t > 0; (x_1,x_2) \in R^2; x_3 \in [0;d])$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Пусть $g(x,t) \in H^+_{2,1,\delta}$, а $v(x_1,x_2,x_3,t)$- решение задачи (1)-(3), тогда справедлива следующая оценка: $|v(x_1,x_2,x_3,t)| \leqslant c \cdot \exp[-\delta_3 t]$, где $\delta_3 > 0$.

О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ОБЩЕЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НА СЕТИ

Рябцева Н.Н. (Белгород)
science@bupk.ru

При анализе условий экстремума функционала на пространственной сети

$$\Phi(u) = \int\limits_{\Gamma} F(x,u,u')dx \tag{1}$$

достаточно естественно получается, как необходимое условие, аналог уравнения Эйлера

$$F_u(x,u_0(x),u_0'(x)) - \frac{d}{dx}F_{u'}(x,u_0(x),u_0'(x)) = 0 \tag{2}$$

в сочетании с условиями трансмиссии во внутренних вершинах

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma(a)} M_i(a) z_i'(a) = 0, \tag{3}$$

где $M(x) = F_{u'u'}(x, u_0(x), u_0'(x))$.

Привлечение второй вариации исходного функционала приводит к проблеме изучения общего квадратичного функционала, вида

$$\delta^2 \Phi(u_0) h = \int\limits_{\Gamma} (Mh'^2 + 2Qhh' + Nh^2)\, dx, \tag{4}$$

где условие неотрицательности этого функционала оказывается связано, аналогично классическому скалярному случаю, с предположением об отсутствии нулей у некоторого решения следующего уравнения

$$-(Mh')' + 2Qhh' - (\frac{Q^2}{M} + N)h = 0. \tag{5}$$

Оказывается, что уравнение (5) обладает свойствами, вполне аналогичными каноническим свойствам уравнений второго порядка, описанным в [1].

Литература

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев Л.В., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 272 с.

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ РЯДОВ ФУРЬЕ

Сарыбекова Л.О., Тлеуханова Н.Т. (Казахстан, Астана)
er-nurs@yandex.ru

Данная работа посвящена исследованию мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье в пространствах Лоренца L_{pq}.

Пусть (Ω, μ)-пространство с положительной мерой. Для μ- измеримой функций f, принимающей почти всюду конечные значения, введем функцию распределения

$$m(\sigma, f) = \mu\{x : |f(x)| > \sigma\}.$$

Обозначим через $f^*(t)$ невозрастающую перестановку функций f

$$f^*(t) = inf\{\sigma : m(\sigma, f) \leqslant t\}.$$

Пусть $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, пространством Лоренца называется множество функций для которых

$$\|f\|_{L_{pq}(\Omega)} = (\int\limits_0^{+\infty} (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t})^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Пусть $1 < p < \infty, 1 \leqslant q_1 < q_0 \leqslant \infty$ и функция $f \in L_{pq_0}[0, 2\pi]$ с рядом Фурье $\sum\limits_{k \in Z} \widehat{f}(x) e^{ikx}$. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in Z}$ является мультипликатором тригонометрических рядов Фурье из L_{pq_0} в L_{pq_1} если найдется функция $f_\lambda \in L_{pq_1}[0, 2\pi]$ ряд Фурье которого равен $\sum\limits_{k \in Z} \lambda_k \widehat{f}(x) e^{ikx}$.

Множество всех мультипликаторов $M_{pq_0}^{pq_1}$ является нормированным пространством с нормой

$$\|\lambda\|_{M_{pq_0}^{pq_1}} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|f_\lambda\|_{L_{pq_1}}}{\|f\|_{L_{pq_0}}}.$$

Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty, 1 \leqslant q_1 < q_0 \leqslant \infty$. *Если* $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in Z}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(|\lambda_k - \lambda_{k+1}| \cdot |k| \cdot (\ln(|k|+2))^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} + 1})^{q_0'}}{|k| \ln(|k|+2)} < \infty,$$

$$\sup_{k \in Z} |\lambda_k| \ln |k|^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}} < \infty,$$

то $\lambda \in M_{pq_0}^{pq_1}$.

Следствие. *Пусть* $\lambda = \{\frac{1}{ln(|k|+2)^\alpha}\}_{k \in Z}$, *тогда* $\lambda \in M_{pq_0}^{pq_1}$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha > \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}$.

РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Семенов М.Е., Канищева О.И., Толоконников П.В.
(Воронеж)
mkl150@mail.ru, olesya@lib.vsu.ru

В работе изучаются резонансные свойства уравнений, подобных уравнениям Матье, содержащих гистерезисные нелинейности:

$$\ddot{x} + (\delta + \varepsilon \cos(2t))x + u(t) = 0, \tag{1}$$

$$u(t) = L[\omega_0]x(t), \tag{2}$$

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = x_1, \tag{3}$$

где $x(t)$ – скалярная функция, δ, ε – скалярные параметры. Уравнение (2) описывает входно-выходные соответствия гистерезисного преобразователя, подробное описание которого будет приведено ниже. Уравнения (1)–(2) описывают колебания ферромагнитного маятника в переменном магнитном поле, являются математической моделью некоторых биологических и экономических систем.

Здесь и далее начальные состояния x_0 и ω_0 предполагаются согласованными, в том смысле, что для преобразователя $L[\omega_0]$, находящегося в начальном состоянии ω_0 , вход $x(t)$, $(t \geqslant 0)$ является допустимым.

Система (1)–(2) называется диссипативной, если существуют такие константы d, r, что для любых начальных значений $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = x_1$, удовлетворяющих условиям $|x_0| < r$, $|x_1| < r$, решение уравнений (1)-(2), им отвечающее, будет удовлетворять неравенству $|x(t)| < d$ $(t \geqslant 0)$.

Приведем описание гистерезисного преобразователя, фигурирующего в системе (1)–(2). Пару неубывающих функций $u = v_-(x)$ и $u = v_+(x)$ назовем правильной, если, во-первых, существуют такие x_-, x_+ и u_-, u_+, что

$$\begin{gathered} v_-(x) = v_+(x) = u_-, (x \leqslant x_-) \\ v_-(x) = v_+(x) = u_+, (x \geqslant x_+) \end{gathered} \tag{4}$$

и, во-вторых,

$$v_-(x) \leqslant v_+, x \in (-\infty; +\infty)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (v_+(x) - v_-(x))dx = v_0 > 0. \tag{5}$$

Оператор L назовем согласованным с парой $v_-(x)$, $v_+(x)$, если при некотором $M > 0$ для функции $x(t)$, невозрастающей на промежутке $[t_0; t_1]$ из соотношений $x(t_0) \geqslant M$, $x(t_1) \leqslant -M$ вытекает справедливость равенств $u(t) = v_+(x(t))$. Аналогично для неубывающей функции $x(t)$ из соотношений $x(t_0) < -M$, $x(t_1) > M$ вытекает равенство $u(t) = v_-(x(t))$. Операторы, соответствующие неидеальному реле, обобщенному люфту с насыщением, преобразователю

Прейсаха с финитным носителем меры [1,2], являются согласованными с некоторыми парами функций.

Теорема: Пусть гистерезисный преобразователь согласован с правильной парой тогда, для любого любого $\delta > 0$, существует $\varepsilon_1 > 0$, что для любого ε, удовлетворяющего неравенству $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, система (1)-(2) диссипативна.

Отметим, что для классического уравнения Матье (без гистерезисной нелинейности) в любой окрестности точки $(n^2, 0)$ на плоскости (δ, ε) можно указать такие $(\tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon})$, что уравнение (1) недиссипативно.

Литература

1. М.А. Красносельский, А.В. Покровский. Системы с гистерезисом. // М. Наука, 1985. 327 с.

2. Семенов М.Е. Математическое моделирование устойчивых периодических режимов в сис-темах с гистерезисными нелинейностями / М.Е. Семенов // Воронеж. – Издательство ВГУ. – 2002. – 104 С.

О ЛОКАЛЬНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ

Семенов Ю.М. (Чебоксары)

SemJuM@chuvsu.ru

Пусть C — управляемая система $\dot{x} = f(x) + u$ с линейным фазовым пространством V и ограничивающим множеством Ω. Через $t_{loc}(C)$ обозначается нижняя грань моментов времени t для которых множество достижимости $K(C, t)$ содержит окрестность точки 0. Естественно возникает вопрос об оценке момента времени $t_{loc}(C)$.

Через $t_{ca}(C)$ обозначается нижняя грань моментов времени t для которых множество $K(C, t) = V$. Через C' обозначается система $\dot{x} = \dot{f}(0)\, x + u$ с ограничивающим множеством Ω.

С одной стороны известно, что $t_{loc}(C) = t_{loc}(C')$, если $f(0) = 0$ и $det\, \dot{f}(0) \neq 0$. С другой стороны, если C' — линейная управляемая система с постоянными коэффициентами с ограничивающим множеством Ω, содержащим точку 0, то $t_{loc}(C') = t_{ca}(ConC')$. Здесь через $ConC'$ обозначается система, полученная из системы C' заменой ее ограничивающего множества на замыкание конуса $Con\Omega$, натянутого на Ω. Эти замечания позволяют свести задачу отыскания момента $t_{loc}(C)$ к отысканию момента времени $t_{ca}(ConC')$.

Теорема 1. *Если $C = (V, \alpha, \Omega)$ — линейная управляемая система с фазовым пространством V, оператором α и коническим* *ограничивающим множеством* Ω, *то*

$$\overline{K(C,t)} = \overline{\sum_{0<\tau<t} e^{\alpha\tau}\Omega}.$$

Теорема 2. *Если* $C = (V, \alpha, \Omega)$ *и* α*-инвариантное линейное подпространство* $V' \subseteq \overline{K(C,t_0)}$, *то для всех* $t > t_0$

$$\overline{K(C,t)} = \varphi^{-1}\overline{K(C/V',t)}.$$

На основе этих двух теорем для линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами с коническими ограничивающими множествами с конечным числом образующих предлагается процедура поиска момента $t_{ca}(C)$. Рассматриваются некоторые примеры вычисления момента $t_{ca}(C)$.

Литература

1. Семенов Ю.М. Об остовах линейных управляемых систем//Диф. уравнения. — 2005. — Т.41, № 8. — С. 1145–1146.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА И ПОЛИЭДРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Сибирякова О.В. (Ижевск)
sibolv@rambler.ru

В пространстве D абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ с производной $\dot{x} \in \mathbb{L}_p^n$ рассмотрен линейный управляемый процесс с отклонением аргумента

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) + \textstyle\sum_{j=1}^r A_j(t)x(h_j(t)) = B(t)u(t), \quad t \in [0,T], \\ x(s) = 0, \quad s \notin [0,T]. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $A_j(t)$ – $n \times n$-матрицы со столбцами из $\mathbb{L}_p^n$, $h_j : [0,T] \to \mathbb{R}$ – измеримые функции, $j = \overline{1,r}$, $B(t)$ – $n \times m$-матрица с элементами из $\mathbb{L}_p$, $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ – вектор-функция, значения которой при почти всех $t \in [0,T]$ принадлежат компакту $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

Непустые полиэдры пространства состояний заданы в виде

$$\alpha_l^k x(t_l) \geqslant \beta_l^k, \quad k = \overline{1,\nu_l}, \quad l = \overline{1,\mu}. \tag{2}$$

Здесь α_l^k – постоянные вектор-строки длины n, $\beta_l^k \in \mathbb{R}$, $t_l(0 < t_l < t_{l+1} < T, l = \overline{1, \mu - 1})$ – фиксированные точки интервала $[0, T]$. **Теорема 1.** Система (1) имеет решение $x \in D$, удовлетворяющее совместной системе неравенств (2) тогда и только тогда, когда для каждого неотрицательного решения $\{\lambda_l^k\}$ алгебраической системы

$$\sum\nolimits_{l=1}^{\mu} \sum\nolimits_{k=1}^{\nu_l} \lambda_l^k Z_l^k(0) = 0 \qquad (3)$$

выполняется неравенство $\sum\limits_{l=1}^{\mu} \sum\limits_{k=1}^{\nu_l} \lambda_l^k \left(\beta_l^k - \int\limits_0^T Z_l^k(s) B(s) u(s)\, ds \right) \leqslant 0$

где $Z_l^k(s)$ – единственное решение уравнения

$$Z(s) = \sum_{j=1}^{r} \int_{h_j^{-1}[0,T]} Z(t) A_j(t)\, dt + \alpha_l^k \chi(t_l - s), \quad s \in [0, T].$$

Теорема 2. Для некоторого неотрицательного решения $\{\xi_l^k\}$ системы (3) найдется допустимое управление $u^*(t)$, удовлетворяющее при почти всех $s \in [0, T]$ принципу максимума

$$\sum\nolimits_{l=1}^{\mu} \sum\nolimits_{k=1}^{\nu_l} \xi_l^k Z_l^k(s) B(s) u^*(s) = \max_{u \in \Omega} \sum\nolimits_{l=1}^{\mu} \sum\nolimits_{k=1}^{\nu_l} \xi_l^k Z_l^k(s) B(s) u.$$

ТЕПЛОПЕРЕНОС В НЕНЬЮТОНОВСКИХ СРЕДАХ ПРИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ

Сидоренко А.С. (Воронеж)
teormech@vgta.vrn.ru

Рассмотрена математическая модель фазового перехода полимерных материалов в цилиндрических каналах с учетом диссипации, учитывающая линейную зависимость вязкости рабочей среды от температуры в [1]. Модель представлена уравнениями неразрывности, гидродинамики, конвективного теплопереноса с учетом диссипации и баланса фаз. Дополнительно предполагали, что течение является одномерным, осесимметричным и ламинарным. Задача рассматривалась с граничными условиями первого рода для температуры.

В цилиндрический канал поступает однофазный поток, который, перемещаясь в нем, разогревается вследствие диссипации. Начиная с некоторого момента саморазогрев рабочей среды достигает температуры фазового перехода, в результате происходит формирование двухфазового потока. Необходимым условием фазового перехода было принято термодинамическое равновесие между компонентами рабочей среды.

В работе на основе численных экспериментов с моделью при помощи ПЭВМ проводился анализ формы границы начала фазового перехода и влияния на нее основных параметров системы.

Полученные результаты показывают, что в исследованных диапазонах изменения этих параметров форма границы начала фазового перехода в зависимости от радиальной координаты не носит, вообще говоря, монотонного характера. Показано, что наиболее существенная трансформация границы наблюдалась при варьировании чисел Эйлера и Рейнольдса.

Литература

1. Сидоренко, А. С. Математическое моделирование начальной стадии формирования пористой структуры полимеров в цилиндрических каналах [текст] / А.С. Сидоренко // Диссер. ...канд. техн. наук. Воронеж. гос. технол. акад. – 2005. – 209 с.

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ СУММЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА ПРОСТРАНСТВУ ОРЛИЧА-ЛОРЕНЦА[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

dvr@vstu.ru

Пусть Φ — совокупность неотрицательных на $[0,+\infty)$ почти возрастающих функций, удовлетворяющих Δ_2- условию; W– совокупность измеримых, неотрицательных почти всюду на $(0,2\pi)$ функций. Пространством Орлича-Лоренца $\Lambda(\varphi,w)$, где $\varphi\in\Phi, w\in W$, называется множество 2π- периодических измеримых функций $f(x)$, для которых $\| f \|_{\varphi,w}=\int\limits_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt<+\infty$, где $f^*(t)$- невозрастающая на $[0,2\pi]$ функция, равноизмеримая с $| f |$. Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx \quad (1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx \quad (2).$$

У т в е р ж д е н и е . *Пусть* $r\in N; a_n\to 0$ *при* $n\to\infty$, *где* a_n*- коэффициенты рядов* (1) *и* (2)*;* $\varphi\in\Phi; w\in W$ *и такова, что или* $w(t)=0$ *при почти всех* $t\in[\pi 2^{-12-2r},2\pi]$, *или* $\int\limits_0^{\pi 2^{-12-2r}} w(t)dt>0$.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00268).

а). Если $\Delta_{1,r}a_n \geqslant 0$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots,$ *то*

$$\int\limits_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt \geqslant C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w(t)dt \sum_{k=1}^{r} \varphi(a_{k+nr}(n+1)).$$

б). Если $\Delta_{2,r}a_n \geqslant 0$ *для всех* $n = 0, 1, \ldots,$ $2(a_0 - a_r) \geqslant \sum\limits_{m=0}^{r-1} \Delta_{1,r}a_m$ *и при* $r > 2$ *последовательность* $\{a_n\}$ *дополнительно удовлетворяет условию:* $\Delta_{1,r}(a_{r(n+1)-k} - a_{r(n+1)+k}) \geqslant 0$ *для всех* $n = 0, 1, \ldots$ *и* $k = 1, \ldots, [\frac{r-1}{2}]$, *то*

$$\int\limits_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt \geqslant C_2(\int\limits_{\frac{\pi}{r}}^{\frac{2\pi}{r}} w(t)dt\varphi(a_0 - a_r) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w_r(t)dt(\sum_{k=1}^{r} \varphi((n+1)^2\Delta_{1,r}a_{k+nr}) +$$

$$+ [\tfrac{r-1}{2}] \sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]} \varphi((n+1)(a_{r(n+1)-k} - a_{r(n+1)+k}))),$$

где C_1, C_2 *не зависят от* $\{a_n\}$, $\Delta_{1,r}a_n = a_n - a_{n+r}, \Delta_{2,r}a_n = \Delta_{1,r}(\Delta_{1,r}a_n)$.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ СУММЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА ПРОСТРАНСТВУ ОРЛИЧА-ЛОРЕНЦА[1]

Симонов Б.В. (Волгоград)

dvr@vstu.ru

Пусть Φ- совокупность неотрицательных на $[0, +\infty)$ почти возрастающих функций, удовлетворяющих Δ_2- условию; $W-$ совокупность измеримых, неотрицательных почти всюду на $(0, 2\pi)$ функций. Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (1), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad (2).$$

Утверждение. *Пусть* $r \in N; a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где* a_n- *коэффициенты рядов* (1) *и* (2); $\varphi \in \Phi; w \in W$ *и такова, что* $\int\limits_0^{\delta} w_r(x)dx \leqslant C_1 \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} w_r(x)dx$ *для любого* $\delta \in (0, \frac{2\pi}{r})$, *где* $w_r(x) = \sum\limits_{m=0}^{r-1} w(x + m\frac{2\pi}{r})$. *а). Если* $\Delta_{1,r}a_n \geqslant 0$ *для всех* $n =$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00268).

$1, 2, \ldots,$ *то* $\int\limits_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt \leqslant C_2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w_r(t)dt \sum\limits_{k=1}^{r} \varphi(a_{k+nr}(n+1))$. *Если* $\Delta_{1,r}a_n \geqslant 0$ *для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots,$ *то* $\int\limits_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt \leqslant C_3(\int\limits_{\frac{\pi}{r}}^{\frac{2\pi}{r}} w_r(t)dt\varphi(a_0) + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w_r(t)dt \sum\limits_{k=1}^{r} \varphi(a_{k+nr}(n+1)))$.

б). Если $\Delta_{2,r}a_n \geqslant 0$ *для всех* $n = 0, 1, \ldots \quad, a_r \leqslant a_k \leqslant a_0$ *для* $0 \leqslant k \leqslant r$ *и при* $r > 2$ *последовательность* $\{a_n\}$ *дополнительно удовлетворяет условию:* $\Delta_{1,r}(a_{r(n+1)-k} - a_{r(n+1)+k}) \geqslant 0$ *для всех* $n = 0, 1, \ldots,$ *и* $k = 1, \ldots, [\frac{r-1}{2}]$, *то* $\int\limits_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt \leqslant C_4(\int\limits_{\frac{\pi}{r}}^{\frac{2\pi}{r}} w_r(t)dt\varphi(a_0 - a_r) + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w_r(t)dt(\sum\limits_{k=1}^{r} \varphi((n+1)^2\Delta_{1,r}a_{k+nr}) + [\frac{r-1}{2}] \sum\limits_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]} \varphi((n+1)(a_{r(n+1)-k} - a_{r(n+1)+k})))$.

О СХОДИМОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ[1]

Симонов Б.В., Симонова И.Э. (Волгоград)

dvr@vstu.ru

Пусть $i = 1, \ldots, n; m_i = 0, 1, \ldots; s_i \in N; l_i = 1, \ldots, s_i;$ $\cos(0 \cdot x_i) = \frac{1}{2}; r_i$ равно 1 или 2;

$$A_{n_i}^{r_i}(x_i) = \begin{cases} \cos(n_i x_i), & \text{если} \quad r_i = 1, \\ \sin(n_i x_i) & \text{если} \quad r_i = 2; \end{cases}$$

$\Delta_{s_1,0,\ldots,0}a_{m_1,m_2,\ldots,m_n} = a_{m_1,m_2,\ldots,m_n} - a_{m_1+s1,m_2,\ldots,m_n};$
$\Delta_{0,s_2,0,\ldots,0}a_{m_1,m_2,m_3,\ldots,m_n} = a_{m_1,m_2,m_3,\ldots,m_n} - a_{m_1,m_2+s_2,m_3,\ldots,m_n}; \ldots;$
$\Delta_{0,\ldots,0,s_{n-1},0}a_{m_1,\ldots,m_{n-2},m_{n-1},m_n} = a_{m_1,\ldots,m_{n-2},m_{n-1},m_n} - a_{m_1,\ldots,m_{n-2},m_{n-1}+s_{n-1},m_n};$
$\Delta_{0,\ldots,0,s_n}a_{m_1,\ldots,m_{n-1},m_n} = a_{m_1,\ldots,m_(n-1),m_n} - a_{m_1,\ldots,m_{n-1},m_n+s_n};$
$\Delta_{s_1,s_2,s_3,\ldots,m_{n-2},m_{n-1},m_n}a_{m_1,m_2,m_3,\ldots,m_{n-2},m_{n-1},m_n} = \Delta_{s_1,0,0,\ldots,0,0,0}(\Delta_{0,s_2,0,\ldots,0,0,0}(\ldots(\Delta_{0,0,0,\ldots,0,m_{n-1},0}(\Delta_{0,0,0,\ldots,0,0,m_n}a_{m_1,m_2,m_3,\ldots,m_{n-2},m_{n-1},m_n}))))$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00268).

Скажем, что последовательность $\{a_{m_1,\ldots,m_n}\}_{m_1=0,\ldots,m_n=0}^{\infty,\ldots,\infty}$ сохраняет знак, если $a_{m_1,\ldots,m_n} \geqslant 0$ для всех $m_1,\ldots,m_n$ или $a_{m_1,\ldots,m_n} \leqslant 0$ для всех $m_1,\ldots,m_n$.

У т в е р ж д е н и е . Если последовательность чисел $a_{m_1,\ldots,m_n}$ такова,что $a_{m_1,m_2,\ldots,m_{n-1},m_n} \to 0$ при $m_1 \to \infty$ и любых фиксированных $m_2,\ldots,m_{n-1},m_n$, $,\ldots,$, при $m_n \to \infty$ и любых фиксированных $m_1,\ldots,m_{n-1}$, а также последовательность

$$\{\Delta_{s_1,\ldots,s_n} a_{l_1-r_1+1+m_1s_1,\ldots,l_n-r_n+1+m_ns_n}\}_{m_1=0,\ldots,m_n=0}^{\infty,\ldots,\infty}$$

сохраняет знак отдельно для каждого $l_1,\ldots,l_n$, то любой из многомерных тригонометрических рядов

$$\sum_{m_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{m_n=0}^{\infty} a_{m_1-r_1+1,\ldots,m_n-r_n+1} A_{m_1}^{r_1}(x_1)\cdots A_{m_n}^{r_n}(x_n) \qquad (1)$$

сходится по Прингсхейму всюду , кроме, может быть, $n-$ мерной меры нуль, то есть существуют функции $f_{r_1,\ldots,r_n}(x_1,\ldots,x_n)-$ суммы соответствующих рядов (1).

ПРИНЦИП ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛНОТЫ И ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ ГУМАНИТАРИЕВ

Сиренко С.Н. (Минск)

SSN27@mail.ru

Новые образовательные стандарты стимулировали обсуждение проблем математического образования гуманитариев в контексте ценностей научного знания. Одна из проблем математического образования нематематиков связана с содержанием теоретической и практической составляющей обучения. В соответствии с *принципом функциональной полноты* любая система не может эффективно функционировать, если набор ее составляющих не является функционально полным. Поэтому вполне естественной выглядит современная тенденция на повышение общекультурного уровня студентов-гуманитариев через фундаментализацию образования.

Среди современных социокультурных тенденций и научно-технических закономерностей развития можно выделить: рост наукоемких производств, увеличение объемов научной, технической и социальной информации, смену информационных технологий, развитие межпредметных научных исследований, активное использование вычислительных средств и многое другое. В настоящее время образование как главный источник умножения и потребления интеллектуального и культурного потенциала общества становится важнейшим фактором развития государства.

Поэтому задача повышения качества гуманитарно-математического образования в современных условиях массовости высшего образования и экспоненциального роста информации, подлежащей усвоению студентами, становится актуальной проблемой современной методологии образования. Многие специалисты связывают проблему качества университетского образования с его фундаментализацией, под которой понимается разностороннее гуманитарное, естественнонаучное и математическое образование на основе овладения фундаментальными знаниями.

Сегодня не вызывает сомнений тот факт, что специалист, ограничивающий свои интересы только профессиональной сферой, обедняет свое творческое профессиональное мышление. Изучение основ высшей математики важно для гуманитариев потому, что им необходимо уметь грамотно вводить новые понятия, правильно строить непротиворечивые классификации, уметь отделять существенные признаки от несущественных и многое другое, связанное с их профессиональными запросами [1]. Математическое знание помогает понять научную картину мира студентам нематематических специальностей.

Курс "Основы высшей математики" — важнейшая составляющая содержания высшего гуманитарного образования, поскольку он прививает конкретные методологические навыки использования современных математических и статистических методов в практической деятельности. Главной целью обучения математике является не только формирование научной картины мира, адекватной современному знанию, но и воспитание личностного отношения к полученным знаниям, трансформируемым в профессиональные навыки и умения.

Литература

1. Юрчук Н., Монастырный П., Еровенко В. О математике — с надеждой: О развитии и поддержке математического образования // Беларуская думка. — 2004. — №5. — С.66-71.

ИСТОРИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА И ОБОБЩЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВ

Ситник В.С., Ситник С.М. (Воронеж)
mathsms@yandex.ru

Неравенство Коши - Буняковского является классическим неравенством Анализа. Для конечных сумм и рядов оно было доказано О. Коши в 1821 году [1], а для интегралов - В.Я. Буняковским в 1859 году [2]. Отметим, что в 2004 году в Киеве состоялась международная конференция, посвященная двухсотлетию со дня рождения академика Виктора Яковлевича Буняковского. Интегральное неравенство Буняковского было переоткрыто через двадцать пять лет Г.А. Шварцем в 1884, однако им впервые была дана теперь привычная всем формулировка в терминах скалярного произведения.

Классические результаты, связанные с неравенством Коши - Буняковского и его обобщениями, приведены в ряде известных книг и статей. Отметим также три монографии Севера Драгомира, специально посвященные неравенству Коши - Буняковского [3 – 5].

Рассматриваются исторические аспекты данного неравенства.

Литература

1. Cauchy A.L. Cours d'analyse de l' École Royale Polytechnique. I partie. Analyse algebrique. (Oeuvres complè tes, II serie, III)/A.L. Cauchy. - Paris, 1821.

2. Buniakowski V. Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies/ V. Buniakowski// Mémoires de l' Acad. de St. - Pétersbourg (VII). - 1859. - 1. - No. 9.

3. Dragomir S.S. A Survey on Cauchy - Buniakowsky - Schwartz Type Discrete Inequalities/ S.S. Dragomir. - http://rgmia.vu.edu.au/monographs, 2003.

4. Dragomir S.S. Advances in Inequalities of the Schwarz, Gruss and Bessel Type in Inner Product Spaces/ S.S. Dragomir. - http://rgmia.vu.edu.au/monographs, 2004.

5. Dragomir S.S. Advances in Inequalities of the Schwarz, Triangle and Heisenberg Type in Inner Product Spaces/ S.S. Dragomir. - http://rgmia.vu.edu.au/monographs, 2004.

6. Ситник С.М. Уточнение интегрального неравенства Коши-Буняковского / С.М. Ситник // Вестник Самарского гос. тех. университета. Сер. "Физико-математические науки". - 2000. - №9. - С. 37 – 45.

7. Ситник С.М. Некоторые приложения уточнений неравенства Коши-Буняковского/ С.М. Ситник // Вестник Самарской государственной экономической академии. - 2002. - № 1(8). - С. 302 – 313.

8. Ситник С.М. Обобщения неравенств Коши - Буняковского методом средних значений и их приложения / С.М. Ситник // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия: Фундаментальная математика - 2005. - № 1(1). - С. 3 - 42.

ВОСПИТАТЕЛЬНАЯ КОМПОНЕНТА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОРИЕНТИРОВАНИИ УЧАЩЕЙСЯ МОЛОДЕЖИ

Ситник В.С., Телкова С.А.

mathsms@yandex.ru

В последние годы в связи с введением профильного обучения в общеобразовательных школах, значительного расширения спектра профессионально - образовательных услуг: появления новых профессий и специальностей, образовательных учреждений, дистанционного обучения и т. п., возросло значение профессионального ориентирования учащейся молодежи. Для преподавания математики данный вопрос также имеет важное значение, особенно в связи с наметившимся в последнее время общим кризисом образования и в том числе образования в области естественных наук.

Профессиональное ориентирование рассматривается в контексте "Профориентологии" как нового подхода, способствующего повышению эффективности выбора профессии учащейся молодежи. Профессиональное ориентирование человека - это сложный и многоплановый процесс, охватывающий значительный период жизни; выражается согласованностью биологических и психологических особенностей человека с содержанием и требованиями профессиональной деятельности, а также сформированностью способности адаптироваться к изменяющимся социально - экономическим условиям. В профессиональном ориентировании человек выступает как субъект собственной деятельности в выборе профессии, профессионализации, формировании карьеры.

Одной из компонент в профессиональном ориентировании является воспитательная компонента. Она включает в себя развитие и закрепление интереса к профессиям, формирование общественно - ценных мотивов выбора профессии, выявление и развитие профессионально важных качеств. Реализация воспитательной компоненты профессионального ориентирования в процессе обучения осуществляется силами преподавателей всех учебных дисциплин средствами своего предмета. Они развивают профессиональное мышление; учат принимать творческие решения в различных учебных ситуациях, и, следовательно, в будущей профессиональной деятельности; формируют мировоззрение; развивают социальную активность каждого обучаемого, устанавливают взаимоотношения сотрудничества и демократизма, уважения друг к другу и старшим; формируют высоконравственные, профессионально важные качества личности: целеустремленность, настойчивость, чувство личной ответственности, профессионального долга, аргументированно отстаивать свои взгляды и убеждения; организуют процесс обучения на основе высокой требовательности. Воспитывающая деятельность преподавателя имеет смысл только в том случае, если она побуждает обучаемых к самостоятельной работе, направленной на формирование себя как личности будущего специалиста.

Профессиональное ориентирование в области математики должно, разумеется, в обязательном порядке использовать исторические сведения и биографии известных математиков.

О БИФУРКАЦИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИИЙ УРАВНЕНИЯ БЕЛЕЦКОГО

Смольянова Т.И., Сапронов Ю.И. (Воронеж)
yusapr@mail.ru, tata_sti@rambler.ru

Известно, что колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты описываются уравнением В.В. Белецкого [1],[2] :

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\nu}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin\delta = 4e\sin\nu, \tag{1}$$

где e — эксцентриситет орбиты, μ — параметр, характеризующий распределение массы спутника, δ — угол между фокальным радиусом и осью симметрии спутника, ν — угловая (полярная) координата центра масс спутника.

Уравнение Белецкого имеет вариационное происхождение: если умножить левую и правую часть уравнения (1) на $(1 + e\cos\nu)$, то получится уравнение, определяющее экстремали функционола действия $V(q) =$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}(1+e\cos\nu)^2\dot{q}^2 + 2(1+e\cos\nu)^2\dot{q} + (1+e\cos\nu)\mu\cos q\right)dt$$

(уравнение Эйлера–Лагранжа экстремалей V).

Нетрудно убедиться, что к данному уравнению можно применить нелокальный метод Ляпунова–Шмидта и основанные на нем новые вычислительные технологии [3].

Литература

1. Козлов В.В. Симметрии топология и резонансы в гамильтоновой механике.–М.: Наука, 1995. 432 с.

2. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника вокруг центра масс.– М.: Наука, 1965. – 416 с.

3. Борзаков А.Ю. О приближенных методах в нелокальном анализе варицнонных задач на основе конечномерной редукции// Математические модели и операторные уравннения. Том 3. Воронеж: ВорГУ, 2005. 13–26 с.

О ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ФИНАЛЬНЫМ НАБЛЮДЕНИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Солдатенков А.О. (Москва)

a_sold@mail.ru

Рассмотрим в области $Q = \{(x,t),\ 0 < x < \pi,\ t > 0\}$ смешанную задачу для уравнения свободных колебаний струны:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx},\\
&u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \varphi(x),
\end{aligned}$$

где $\varphi(x) \in L_2(0,\pi)$. Будем рассматривать обобщенное решение данной задачи, которое при каждом $\tau > 0$ принадлежит пространству $H^1(Q_\tau)$, $Q_\tau = (0,\pi) \times (0,\tau)$ ([1]).

Пусть $T > 0$. Определим функционал

$$J[\varphi] = \|u(x,T) - u_0(x)\|^2_{L_2(0,\pi)},$$

где $u_0(x) \in L_2(0,\pi)$. Рассмотрим задачу нахождения экстремумов данного функционала: $\inf_{\varphi\in U} J[\varphi]$, $\sup_{\varphi\in U} J[\varphi]$, где $U = \{\varphi(x) \in L_2(0,\pi),\ \varphi(x) = h(\Theta(x-z+l) - \Theta(x-z-l)),\ l \leqslant z \leqslant \pi - l\}$, $\Theta(x)$ — функция Хевисайда; $h \in (0,+\infty)$, $l \in (0,\pi/2)$ — постоянные. Для случая $u_0(x) = \sin x$ получено следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $h \leqslant \frac{2\sin^2 l}{\pi l}$. *Тогда:*

1) *при* $2\pi k < T < \pi + 2\pi k$, $k = 0,1,2,\ldots$ *функционал* $J[\varphi]$ *достигает точной нижней грани при* $z = \pi/2$, *точной верхней грани при* $z = l$ *и при* $z = \pi - l$;

2) при $\pi + 2\pi k < T < 2\pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ функционал $J[\varphi]$ достигает точной нижней грани при $z = l$ и при $z = \pi - l$, точной верхней грани при $z = \pi/2$.

Отметим, что задачи нахождения экстремумов квадратичных функционалов для гиперболических краевых задач рассматривались в [2].

Литература

[1] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука. 1976.

[2] Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир. 1972.

К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЯДАХ ЭКСПОНЕНТ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Соломатин О.Д. (Орел)

Пусть H — полное отделимое локально-выпуклое пространство над полем комплексных чисел, топология которого задается системой полунорм $\{\|\cdot\|_p\}, p \in P$. Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n f(\lambda_n z),\ x_n \in H,\ 0 < |\lambda| \uparrow \infty,\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{|\lambda_n|^\rho} = 0,\ z \in \mathbb{C}, \qquad (*)$$

где $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция порядка ρ, $0 < \rho < \infty$ и типа $\sigma \neq 0, \infty$, причем $a_n \neq 0 (n = 1, 2, ...)$ и существует предел $\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|} = (\sigma e \rho)^{1/\rho}$.

Ряд вида $(*)$ называем обобщенным рядом экспонент в пространстве H, $x_n \in H$ — коэффициентами, а $\lambda_n \in \mathbb{C}$ — показателями ряда. Следующая теорема характеризует круг сходимости ряда $(*)$.

Теорема. *Пусть*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\lambda_n|^\rho}{-\ln \|x_n\|_p} = \frac{1}{\sigma R_p^\rho};\ R = \inf R_p.$$

Тогда ряд $(*)$ сходится абсолютно и равномерно внутри круга $|z| < R$. В любом круге $|z| < R_1$, $R_1 > R$ имеются точки, где ряд расходится.

Число $R = \inf R_p$ называется радиусом сходимости ряда $(*)$.

Например, для ряда $u(t,z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n f(\lambda_n t)$, где $f(z)=E_\rho(\sigma^{1/\rho} z)$, $E_\rho(z)$ – функция Миттаг-Леффлера, радиус сходимости в пространстве H_r — функций аналитических в круге $|z| < r$, равен

$$R = \left(\frac{\tau}{\sigma} \ln \frac{R_1}{r}\right)^{1/\rho}, \; r \leqslant R_1$$

(τ — плотность последовательности $\{\lambda_n\}$).

Если $\rho = \sigma = 1$, то $f(z) = e^z$, в этом случае радиус сходимости ряда $u(t,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n e^{\lambda_n z}$ равен $R = \tau \ln(R_1/r)$.

Литература

[1] Леонтьев А. Ф. Обобщения рядов экспонент. М.: Наука, 1981. — 320 с.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Степанов А.В. (Санкт-Петербург)

stepanov17@yandex.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + cu, \quad u(t) = f(\sigma(t)), \quad \sigma(t) = \gamma' x(t), \tag{1}$$

где $x \in E^n$, $t \geqslant t_0$, $\gamma \in E^n$, $\|\gamma\| \neq 0$, нелинейность f — гистерезисного типа, с насыщением [1]:

$$f(\sigma(t)) = \begin{cases} m_1, \begin{cases} \sigma(t) < \frac{m_1}{\kappa} + l_1, \\ l_1 \leqslant \sigma(t) - \frac{m_1}{\kappa} < l_2, \; u(t-0) = m_1, \end{cases} \\ m_2, \begin{cases} \sigma(t) > \frac{m_2}{\kappa} + l_2 \\ l_1 < \sigma(t) - \frac{m_2}{\kappa} \leqslant l_2, \; u(t-0) = m_2, \end{cases} \\ \kappa(\sigma(t) - l_1), \; m_1 < \kappa(\sigma(t) - l_1) \leqslant m_2, \; u(t-0) > m_1, \\ \kappa(\sigma(t) - l_2), \; m_2 \leqslant \kappa(\sigma(t) - l_2) < m_1, \; u(t-0) < m_2, \end{cases} \tag{2}$$

$\kappa > 0$, $m_1 < 0$, $m_2 > 0$, обход гистерезисной петли происходит против часовой стрелки.

По аналогии с [1], получены достаточные условия существования и единственности периодического режима системы (1). Если точки переключения управления периодического решения системы (1) известны, то периодический режим может быть исследован на предмет орбитальной асимптотической устойчивости методами, аналогичными изложенным в [2].

Если пара (A, c) полностью управляема, $l_1 < 0$, $l_2 > 0$, и значения $|l_1|, l_2$ достаточно малы, а значения $|m_1|, m_2$ — достаточно велики, то существует управление вида (2), решающее задачу релейной стабилизации системы (1) [3].

Литература

1. Камачкин А.М. Существование и единственность периодического решения релейной системы с гистерезисом // ДУ, 1972. Т. VIII, № 8. С. 1505–1506.

2. Зубов С.В., Зубов Н.В. Математические методы стабилизации динамических систем. СПб.: изд. СПБГУ, 1996. 288 с.

3. Зубов В.И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л.: Судпромгиз, 1966. 352 с.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ПРИБЛИЖЕННО ИЗВЕСТНЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ[1]

Сумин М.И., Трушина Е.В. (Нижний Новгород)

m.sumin@mm.unn.ru

Потребности многочисленных приложений неизбежно приводят к необходимости изучения задач оптимального управления в ситуациях, когда их исходные данные известны лишь приближенно. Однако, в этом случае само понятие классического оптимального управления в значительной степени "теряет смысл т.к. в "возмущенной" задаче его может и не существовать, а в случае существования не вполне понятно какое "отношение" оно имеет к исходному оптимальному управлению невозмущенной задачи. Ситуация кардинально меняется, если в качестве "искомого" элемента теории рассматривать минимизирующие последовательности допустимых управлений.

В докладе рассматривается параметрическая задача оптимального управления

$$I_0(u) \to \inf,\ I_1(u) \in M + q,\ u \in D,\quad q \in R^k - \text{параметр}, \qquad (P_q)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00460)

где $D \equiv \{u \in L_\infty^m(0,T) : u(t) \in U$ п.в. на $(0,T)\}$, $U \subset R^m$ - компакт, $I_0(u) \equiv \varphi_0(x[u](T))$, $I_1(u) \equiv (\varphi_1(x[u](T)),\ldots,\varphi_k(x[u](T)))$, $M \subset R^k$ - выпуклое замкнутое множество, $x[u]$ - решение задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t),\ \ x(0) = x_0,\ \ t \in [0,T],\ \ x \in R^n.$$

Исходные данные задачи (P_q) удовлетворяют традиционным для теории оптимального управления условиям и считаются известными приближенно. В данной ситуации обсуждаются следующие основные вопросы: 1) необходимые и достаточные условия для минимизирующих последовательностей; 2) регуляризирующие свойства принципа максимума Понтрягина и минимизирующих последовательностей; 3) конечно-разностная аппроксимация задачи (P_q) и минимизирующие последовательности; 4) устойчивость значения задачи (P_q) по возмущению параметра q. Рассматриваются иллюстративные примеры.

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ГАРМОНИЧНОСТИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

Теляковский Д.С. (Москва)

Dtelyakov@mail.ru

Известно, что непрерывная в области функция $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа, является гармонической. В случае функции двух переменных условие непрерывности можно ослаблять. Г.П. Толстов [1] заменил это условие на условие ограниченности функции. В работе [2] условие ограниченности было заменено на условие суммируемости (относительно плоской меры Лебега). Как показывают примеры, условие суммируемости функции существенно ослабить нельзя. В настоящей работе уравнение Лапласа понимается в обобщенном смысле.

Пусть прямая проходит l через точку ξ области. Точку на l будем обозначать через z, ее координату на l через h ($|h| = |z - \xi|$). Пусть вдоль l выполнено условие

$$u(z) = u(\xi) + a_l h + \frac{1}{2} b_l h^2 + o(h^2). \tag{1}$$

Теорема. Пусть функция $u(x_1, x_2)$ суммируема в области G, через каждую точку G проходят две ортогональные прямые l_1 и l_2,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00962).

вдоль каждой из которых выполнено условие дифференцируемости (1) и $b_{l_1} + b_{l_2} = 0$. Тогда функция $u(x_1, x_2)$ гармонична в G.

В этой теореме отказаться от условия ортогональности прямых нельзя.

Литература

1. Толстов Г. П. Об ограниченных функциях, удовлетворяющих уравнению Лапласа. — Матем. сб., 1951, т. 29, с. 559–564.

2. Теляковский Д. С. Об одном обобщении теоремы Лумана–Меньшова. — Матем. заметки, 1986, т. 39, вып. 4, с. 539–549.

ОБ ОДНОМ ОПЕРАТОРЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Тлеуханова Н.Т. (Казахстан, Астана)

er-nurs@yandex.ru

В работе рассматривается задача приближения периодических функций из пространств с доминирующими смешанными производными и их мультипликативных преобразований.

Пусть $f \in L_1[0,1]^n$, $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in Z^n}$ некоторая последовательность комплексных чисел. Определим мультипликативное преобразование $f_\lambda = \sum_{k \in Z^n} \lambda_k \hat{f}(k) e^{ikx}$.

Пусть (X, Y) пара функциональных пространств 1-периодических функций, X вложено в $C[0,1]^n$, последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbf{Z^n}}$ является мультипликатором из пространства X в пространство Y.

Задача заключается в нахождении узлов $\{t_k\}_{k=1}^M$ и функций $\{\varphi_k(x,\lambda)\}_{k=1}^M$, чтобы скорость убывания погрешности $\sup_{\|f\|_X=1} \|f_\lambda - \sum_{k=1}^M f(t_k)\varphi_k(x,\lambda)\|_Y$ в метрике Y была возможно большей, при возрастании M.

В работе вводится оператор восстановления мультипликативных преобразований

$$F_{2^m}(f,\lambda;x) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m+n \\ k_i \geqslant 1}} \sum_{0 \leqslant r < 2^k} f(\frac{r}{2^k}) \varphi_{kr}(x + \frac{r}{2^k};\lambda), \qquad (1)$$

здесь $\varphi_{kr}(x) = \frac{1}{2^{m+n}} \sum\limits_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_n \leqslant m \\ 0 \leqslant \nu_i \leqslant k_i - 1}} (-1)^{\sum\limits_{j=1}^{n-1}(r_j + sgn(k_j - \nu - 1))} \sum\limits_{\mu \in \rho(\nu)} \lambda_\mu e^{2\pi i \mu x}$.

Данный оператор восстановления является точным для полиномов со спектором из соответствующего гиперболического креста. В работе получены оценки погрешности этого аппарата в парах пространств (W_p^α, L_q) и (B_{pr}^α, L_q).

Теорема. *Пусть* $1 < p \leqslant 2 \leqslant q \leqslant \infty$, $f \in W_p^\alpha[0,1]^n$, $\alpha > \frac{1}{p}$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$, *последовательность* $\{\lambda_k\}_{k \in Z^n}$ *такова, что ряд* $\sum_{\mu \in Z^n} |\lambda_\mu \bar{\mu}^{-\alpha}|^r$ *сходится. Тогда имеет место оценка:*

$$\|f_\lambda - F_{2^m}(f, \lambda; \cdot)\|_{L_q} \leqslant C_{q,\alpha} \left[\frac{1}{2^{\alpha m}} \left(\sum_{s=0}^{m} (m-s)^{\frac{(n-1)r}{p}} \times \right.\right.$$

$$\left. \times \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_n = s} \sum_{k_1 = 2^{\nu_1 - 1}}^{2^{\nu_1} - 1} \ldots \sum_{k_n = 2^{\nu_n - 1}}^{2^{\nu_n} - 1} |\lambda_k|^r \right)^{1/r} +$$

$$\left. + \left(\sum_{\mu \in Z^n \setminus G_m} |\lambda_\mu \mu^{-\alpha}|^r \right)^{1/r} \right] \|f\|_{W_p^\alpha}.$$

Часть результатов данной работы анонсирована в статьях [1], [2].

Литература

1. Тлеуханова Н.Т. Интерполяционная формула для функций многих переменных//Математические заметки.-2003.- Т. 74, вып.1.- С.154-156.

2. Тлеуханова Н.Т. Интерполяционная формула для мультипликативных преобразований функций многих переменных//Доклады РАН.-2003.-Т.390, №2.-С.169-171.

МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ОРГАНИЗАЦИИ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОИЗВОДСТВА ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Тлустенко С.Ф. (Самара)

Формулирование и решение задач организации производства летательных аппаратов в настоящее время связано, в частности, с исследованиями в области формализации неопределенности и развития теории нечетких множеств и нечеткой логики. Предлагаемый подход связан с объектно-ориентированным моделированием предметной области как системы с отношениями "тип-прототип" и "часть-целое". Множество областей состояний отображается множеством мультивекторов S пар событий в различных базисах, а их взаимосвязь и переход из базиса в базис обеспечивается применением тензоров преобразований базисов событий. Предположим, в пространстве моделируемой ситуации по технологическим маршрутам необходимо переместить три объекта P1, P2, P3. нечеткость каждого события состоит в том, что имеется множество точек или интервалов в опорном базисе, где может произойти событие, но выбор должен быть оптимальным. Например, уточнение неопределенности между P1 и P2 за счет P2 производится по выбранному закону преобразования параметров ситуации, исключающем противоречие между P2 и P3. Поставим в соответствие P2 мультивектор SR $\alpha\beta\chi(2)$, P3 – SR $\alpha\beta\chi(3)$, а результаты преобразований покажем на схеме ρ-интерпретации опорного базиса событий, где пунктирными линиями показаны вход и выход SR $\alpha\beta\chi(3)$. Области допустимых значений получаемых решений для P2 и P3 представлены штрих - пунктирными линиями, соответственно точка S (z)(2) = S (z)(3) на оси Z – точка конфликта.

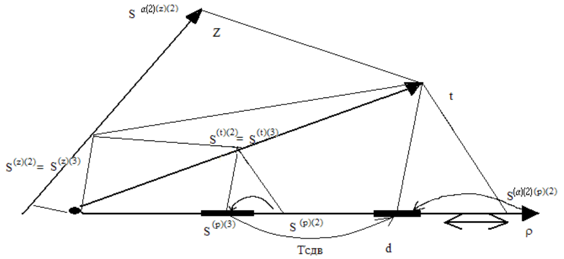

Рис. 1: Иллюстрация к примеру – Сдвиг области конфликта для проверки имитационной модели.

В точке конфликта на оси z необходимо обеспечить отличая $s^{(p)(2)}$ и $s^{(p)(3)}$, за счет которого обеспечивается нормативный интервал между P_2 и P_3, нарушение которого при попадании $s^{(p)(2)}$ в область конфликта T(S) (показано жирной линией) приведет к конфликтному событию в пространстве системы. Теперь предположим, что при разрешении конфликта между P_1 и P_2 требуется осуществить сдвиг $s^{\alpha(2)(p)(2)}$ на d (при этом, очевидно, параметр между $s^{(p)(2)}$ и $s^{(p)(3)}$ сократится, что показано изогнутой пунктирной стрелкой влево). Во избежании нового конфликта между P_2и P_3 осуществляем преобразование, приводящие экземпляр к бесконфликтной ситуации путем сдвига области T(S) согласно схемы (изогнутая стрелка вправо) с величиной сдвига в требуемой интерпретации:

$$\Delta^{(\nu)} = \rho\left(S^{\alpha(2)(\nu)(3)}, s^{(\nu(3))}\right).$$

При этом в опорном базисе моделируемого пространства вводятся ограничения в соответствии с программой оптимизации получаемых решений.

Разработанная базовая модель оптимизации создает условия для реализации адекватных алгоритмов методов моделирования и принятия решения на основе преобразования примеров решений в системах поддержки принятия решений.

Литература

1. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред.Д.А. Поспелова. – М.; Наука, 1986. - 311 с.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Тырсин А.Н. (Челябинск)

at2001@yandex.ru

При анализе временных рядов широкое распространение получили стохастические модели авторегрессии (AR) и авторегрессии-скользящего среднего (ARMA). Рассмотрим случай, когда задан не-стационарный временной ряд $\{y_k\}$. Пусть для него построена сто-хастическая модель AR(p)

$$y_k = \sum_{i=1}^{p} a_i y_{k-i} + \epsilon_k, \tag{1}$$

где ϵ_k – белый шум. Поставим в соответствие модели (1) разностную схему с аддитивным шумом [1]

$$x_k = \sum_{i=1}^{p} a_i x_{k-i},\ y_k = x_k + \xi_k, \tag{2}$$

где $\{x_k\}$ – неслучайная последовательность, $\{\xi_k\}$ – дискретный случайный процесс.

Утверждение. Модели (1) соответствует модель (2), в которой

$$\xi_k = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{l} \alpha_{l,j}(\mathbf{a}) \epsilon_{k-l-j},$$

где $\alpha_{l,j}(\mathbf{a})$ – слагаемые многочлена $(\sum_{i=1}^{p} a_i)^l$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$.

Например, для $p = 1$, $\xi_k = \sum_{l=0}^{\infty} a_1^l \epsilon_{k-l}$. Очевидно, что утверждение остается справедливым и для модели ARMA(p, q).

Разностная схема конечного порядка описывает общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Поэтому стохастические модели описывают узкий класс нестационарных процессов, задаваемых полиномиально-экспоненциальными зависимостями.

Литература

1. Тырсин А.Н. Статистическая эквивалентность разностных схем и моделей авторегрессии - скользящего среднего // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2005. – Т. 12, В. 4. – С. 1109-1110.

К ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ НА ОСИ

Тюрин В.М. (Липецк)

tuvm@stu.lipetsk.ru

Пусть X- банахово комплексное пространство; $L^p = L^p\ (R,\ X)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ — лебеговы пространства сильно измеримых (по Бохнеру) функций $u : R \to X$; $V^p = V^p\,(R, X)$ — линейное нормированное пространство функций $u \in L^p$, для которых

$$\|u\|_{V^p} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{j-1} \int\limits_{R_j} \|u\,(t)\|^p\, dt \right)^{1/p} < \infty,$$

$R_1 = \{x : x \in R, 0 < |t| < 1\}$, $R_j = \left\{x : x \in R, 2^{j-2} < |x| < 2^{j-1}\right\}$, $j = 2, 3, \ldots$; $L = L\,(R, X)$ — пространство всех сильно измеримых функций $u : R \to X$, интегрируемых по Бохнеру на каждом конечном интервале, с топологией сходимости в среднем; $C = C\,(R, X)$ — пространство непрерывных ограниченных функций $u : R \to X$ с sup-нормой. Предполагается, что пространство V^p инвариантно относительно линейного оператора $A : L \to L$ и оператор $A : V^p \to V^p$ является dr-оператором, т. е. носитель $\sup (A\varphi u - \varphi A u)$, где $u : R \to R$ — гладкая финитная функция, расположен в ограниченной окрестности носителя $\sup \varphi$ функции φ.

Пусть $F = \{C, L^p, M^p, V^p\}$, где $M^p = M^p = M^p(R, X)$ — пространство Степанова. Определим дифференциальный оператор £ : D (£,F) $\to$ F формулами $\pounds u = \frac{du}{dt} - Au$, D(£, F)= $\{u : u \in F, \pounds u \in F\}$.

Предполагается существование $N > 0$ и $m \in N$ таких, что

$\|u(t)\| \leqslant N \|u(t_o)\| + N \int\limits_{t_0-m}^{t_o+1} \| \pounds u(s) \| \, ds$, $\|\cdot\|$ норма в X, $t_o - m \leqslant t \leqslant t_o + 1$. При некоторых условиях на оператор £:D(£,F) $\to$ F справедливо следующее утверждение.

Теорема. £ : D (£,C) $\to$ C , £ : D (£,M^p) $\to$ M^p, £ : D (£,L^p) $\to$ L^p, £: D (£,V^p) $\to$ V^p непрерывно обратима одновременно.

Рассматриваются приложения приведенной теоремы.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ РАЗРЕШАЮЩАЯ ГРУППА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВА

Уразаева А.В., Федоров В.Е. (Челябинск)

kar@csu.ru

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

для системы Соболева [1]

$$v_t(x,t) = [v(x,t), w] - r(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{3}$$

$$\nabla(\nabla \cdot v) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]. \tag{4}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $[\cdot, w]$ – векторное произведение на вектор $w = (0,0,w_3) \in \mathbb{R}^3$, $r = r(x,t) = \nabla p$ – градиент давления. Кроме того, уравнением (4) заменено эквивалентное ему в данной ситуации уравнение несжимаемости $\nabla \cdot v = 0$. Формулой $B : v \to [v, w]$, $w = (0,0,w_3)$, зададим линейный непрерывный оператор $B : (L_2(\Omega))^3 \to (L_2(\Omega))^3$. Пусть

$\mathcal{L} = \{w \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot w = 0\}$, замыкание линеала $\mathcal{L}$ по норме пространства $(L_2(\Omega))^3$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Существует расщепление $(L_2(\Omega))^3 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ – ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : (L_2(\Omega))^3 \to \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим расщеплением ортопроектор, $\Sigma = I - \Pi$. Положим $\mathcal{U} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_r$, $\mathbb{H}_r = \mathbb{H}_\pi$. Используя методы теории вырожденных полугрупп операторов [2], получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует аналитическая разрешающая группа задачи* (2) – (4), *операторы которой имеют вид*

$$U(t) = \begin{pmatrix} \exp(t\Sigma B\Sigma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Pi B \exp(t\Sigma B\Sigma) & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}), \quad t \in \mathbb{C}.$$

Литература

1. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т.18, № 1. С.3-50.

2. *Sviridyuk G.A., Fedorov V.E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

О ПОЧТИЧЕБЫШЕВСКИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ В ПРОСТРАНСТВАХ $C(Q)$

Устинов Г.М. (Екатеринбург)

Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Вопрос о том, содержит ли произвольное сепарабельное пространство $C(Q)$ чебышевское подпространство L, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$ известен давно, но пока не решен. Справедлива следующая

Теорема. *Если метризуемый компакт Q содержит бесконечное множество изолированных точек, то $C(Q)$ содержит такое замкнутое подпространство L, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$, что множество элементов $C(Q)$, имеющих в L единственный ближайший элемент, содержит линейное подпространство E, всюду плотное в $C(Q)$.*

Отметим, что в [1] в частности доказано, что если Q содержит совершенное множество, то $C(Q)$ содержит такие рефлексивные подпространства L, $\dim L = \operatorname{codim} L = +\infty$, для каждого из которых всюду плотно в $C(Q)$ множество M элементов, имеющих в L единственный ближайший элемент.

Литература

1. Гаркави А.Л. О чебышевских и почти чебышевских подпространствах. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28, № 4. С. 799–818.

ИМПУЛЬСНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА НА ЗАДАННОМ ПРОМЕЖУТКЕ ВРЕМЕНИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВЫБОР УПРАВЛЕНИЯ ВТОРОГО ИГРОКА[1]

Ухоботов В.И. (Челябинск)

ukh@csu.ru

Управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$dz = A(t)du + B(t)vdt,\ z \in R^n,\ u \in R^k,\ v \in R^l,\ t \leqslant p. \qquad (1)$$

Здесь $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы соответствующих размерностей; p - момент окончания игры. Задан начальный момент времени $t_0 < p$ и начальное положение z_0. Управление u первого игрока является функцией с ограниченной вариацией. Величина её вариации характеризует количество ресурсов, истраченное на формирование этого управления [1, 2, 3]. Количество ресурсов, потраченное на формирование управления второго игрока, задается интегралом $\int_{t_0}^{t} |v(r)|^2\, dr$, $|v|$ - норма в R^l. Решение системы (1) записывается с помощью обобщенной формулы Коши [2].

Для начального состояния t_0, z_0 и для заданных начальных запасов ресурсов игроков выписаны условия, при выполнении которых первый игрок сможет осуществить окончание $z(p) = 0$ при любом управлении второго игрока. Приводится алгоритм построения управления первого игрока, не использующий информацию об оставшихся запасах ресурсов второго игрока.

Приведены классы игр (1), в которых невыполнение приведенных условий позволяет построить управление второго игрока, гарантирующего условие $z(p) \neq 0$. Разобраны конкретные примеры.

Литература

1. Красовский Н.Н. Об одной задаче преследования // Прикл. матем. и мех. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 244–254.

2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука. 1968. 475 с.

[1]Работа выполнена при поддержке РГНФ (грант № 05-02-85203 а/У).

3. Ухоботов В.И. Линейная дифференциальная игра с ограничениями на импульсы управлений // Прикл. матем. и мех. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 355–362.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ, МОДЕЛИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

Феоктистов В.В. (Москва)

Разработанный метод [1] — метод непрерывных групп для расчета преобразований координат и функций - позволяет свести уравнения движения жидкости и газа к уравнениям переменного типа. Они обобщают ряд уравнений для ранее известных задач, построенных на основе дифференциальных уравнений переменного типа (уравнение Трикоми; Кортевега - де Фриза и другие). Здесь устанавливаются две области, из которых в одной используются уравнения эллиптического типа, а в другой, например, гиперболического типа. Весьма продуктивным оказался метод, базирующийся на уравнениях со сменой направления параболичности в теории нестационарных пограничных слоёв.

В уравнении работы [1] (модельное уравнение которого имеет вид:

$$u^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+t(t-x)\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}xu=0)$$

наличие при производной по t коэффициента, который может менять знак, приводит к развитию неустойчивости, к появлению механизмов заострения и усиления волновых структур. Особенность этого уравнения заключается в том, что наряду с классическими краевыми условиями, необходимо формировать условия на подвижной границе и условия согласования решений на линии вырождения уравнения. В соответствии с этим для дифференциального уравнения получена приближенная система

$$x^{-s}\frac{dY}{dx}=A(x)Y,\quad g\geqslant 1.$$

$A(x)$ - матричная функция , голоморфная для $x>x_0$, обладает асимптотическим разложением по степеням x^{-1}, когда $x\to\infty$ в S, S- сектор с вершиной в начале координат. Тогда в каждом, достаточно узком, подсекторе S система дифференциальных уравнений имеет матричное решение вида:

$$Y(x)=\exp G(x)\cdot x^Q\cdot\hat{Y}(x),$$

$G(x)$ — диагональная матрица, диагональные элементы которой являются полиномами от x, Q — постоянная матрица, $\hat{Y}(x)$ — имеет асимптотическое разложение по степеням x^{-1}. Полученная асимптотика решения задачи Коши в иррегулярной особой точке дает принципиальную возможность построить во многих случаях асимптотическое разложение решения краевой задачи с другими дополнительными условиями и доказать теоремы существования для этих задач.

Литература

1. Феоктистов В.В., Феоктистов П. В. Инвариантные решения нестационарных пограничных слоёв и их связь с нелинейными уравнениями переменного типа // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия "Машиностроение 1997 , N 1. - с. 14 - 22.

ОБ ОЦЕНКАХ ПРОИЗВОДНОЙ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА[1]

Филиновский А.В. (Москва)

flnv@yandex.ru

Пусть $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$, — неограниченная область, замыкание которой не содержит начало координат, с гладкой границей Γ. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения Гельмгольца

$$\Delta v + k^2 v = -h(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$v|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

которая при $h \in L_2(\Omega)$ имеет единственное решение $v(x,k) \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ для всех $k = \omega + i\mu \in \{\operatorname{Im} k > 0\}$. Будем предполагать, что поверхность Γ звездна относительно начала координат, то есть

$$(\nu, x) \leqslant 0, \quad x \in \Gamma, \tag{3}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к Γ. Как установлено в работе (1), при $n \geqslant 2$ справедлива оценка

$$\int_\Omega \left|\frac{dv}{dk}\right|^2 \frac{dx}{r^\gamma} \leqslant C\frac{\omega^2+1}{|k|^2}\int_\Omega |h|^2 r^\gamma\, dx, \quad \gamma > 4, \quad \operatorname{Im} k > 0.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант N 04-01-00618)

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 4$ и область Ω удовлетворяет условию* (3)*. Тогда для решения задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\int_{\Omega} \left(\left| \nabla \frac{dv}{dk} \right|^2 + \frac{1}{r^2 \ln^{2q} r} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \right) \frac{dx}{r^2} \leqslant C \int_{\Omega} \left(\frac{\omega^2}{\mu^2} + r^2 \right) |h|^2 r^2 \, dx,$$

$\mathrm{Im}\ k > 0$*, где $q = 1$ при $n = 4$ и $q = 0$ при $n \geqslant 5$.*

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 6$ и область Ω удовлетворяет условию* (3)*. Тогда для решения задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\int_{\Omega} \left(\left| \nabla \frac{dv}{dk} \right|^2 + \frac{1}{r^2 \ln^{2q} r} \left| \frac{dv}{dk} \right|^2 \right) \frac{dx}{r^4} \leqslant C \int_{\Omega} |h|^2 r^4 \, dx, \quad \mathrm{Im}\, k > 0.$$

где $q = 1$ при $n = 6$ и $q = 0$ при $n \geqslant 7$.

Литература

1. Filinovskii A.V. Stabilization of solutions of wave equation in domains with star-shaped boundaries // Russian J. of Math. Phys. 2001. V. 8. N 4. P. 433 – 452.

ОБ УРАВНЕНИИ ВОЛЬТЕРРА – ФРЕДГОЛЬМА С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ВЕСОМ

Фролова Е.В. (Липецк)
lsn@lipetsk.ru

Различные задачи механики сплошных сред приводятся к уравнению Вольтерра - Фредгольма с частными интегралами $x = Kx + f$, где оператор K определяется равенством

$$(Kx)(t,s) = \int_0^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau + \int_0^1 m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma$$

$$+ \int_0^t \int_0^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\sigma\,d\tau.$$

В заметке уравнение $x = Kx + f$ рассматривается в пространстве $C_h(D) = C_{t^\alpha s^\beta}(D)$ $(0 < \alpha, \beta \in R)$. Здесь $C_h(D)$ - множество измеримых на $D = [0,1] \times [0,1]$ функций x, таких, что hx – непрерывная на D функция. $C_h(D)$ – банахово пространство относительно нормы $\|x\|_{C_h(D)} = \|hx\|_{C(D)}$, пространство $C(D)$ вложено в $C_h(D)$. Отметим, что оператор Харди-Литтльвуда с частными интегралами не действует в $C(D)$, однако действует в $C_{ts}(D)$.

Пусть $\Omega \in \{[0,1],[0,1],D\}$ и $\omega \in \{\tau,\sigma,(\tau,\sigma)\}$. Измеримая на $D \times \Omega$ функция $u(t,s,\omega)$ называется непрерывной в целом, если $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\|u(t_1,s_1,\cdot) - u(t_2,s_2,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon$ при $|t_1 - t_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$, и интегрально ограниченной, если $\|u(t,s,\cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leqslant U < \infty$.

Теорема. Пусть $l(t,s,\tau) = \tau^\alpha s^\beta l_1(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma) = t^\alpha \sigma^\beta \times m_1(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) = \tau^\alpha \sigma^\beta n_1(t,s,\tau,\sigma)$ $(0 < \alpha, \beta \in R)$, где l_1, m_1, n_1 — непрерывные в целом и интегрально ограниченные функции. Тогда оператор K действует из $C_h(D)$ в $C(D)$, а уравнение $x = Kx + f$ однозначно разрешимо в $C_h(D)$ и его решение допускает представление в виде

$$x(t,s) = f(t,s) + \int_0^t r_l(t,s,\tau) f(\tau,s)\, d\tau + \int_0^1 r_m(t,s,\sigma) f(t,\sigma)\, d\sigma$$
$$+ \int_0^t \int_0^s r(t,s,\tau,\sigma) f(\tau,\sigma)\, d\sigma\, d\tau,$$

где r_l, r_m, r — непрерывные в целом и интегрально ограниченные резольвентные ядра оператора K.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В СРЕДЕ 1С:Предприятие

Фукин И.А. (Казань)

Igor.Fukin@ksu.ru

К настоящему времени разработано достаточно много методов решения экстремальных задач вида

$$f(x) \to \min, \tag{1}$$

$$f_i(x) \leqslant 0, i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где $f(x), f_i(x)$ - непрерывные функции. Такая постановка задачи имеет множество экономических приложений, из которых наиболее известным является задача об оптимальном использовании ресурсов. Применение для ее решения методов условной оптимизации сопряжено с необходимостью построения модели (1)-(2), что является самостоятельной проблемой.

В данной работе производственная функция $f(x)$ строится при помощи корреляционно-регрессионного анализа данных учета материально-производственных запасов, готовой продукции, заработной платы. Для этого удобно использовать встроенный язык программирования среды 1С:Предприятие, так как вся необходимая информация легко может быть получена из информационной базы. Функции $f_i(x)$ строятся похожим образом на основании показателей расхода ресурсов.

С течением времени объем информаци о хозяйственной деятельности предприятия растет и формулировка задачи (1)-(2) уточняется.

Для решения задачи (1)-(2) используются методы внутренних и внешних штрафов с аппроксимацией допустимого множества [1]. Эти методы позволяют находить решение с заданной по функционалу точностью.

В результате программа предлагает оптимальный с заданной точностью план производства, позволяет провести анализ чувствительности модели, скорректировать запасы.

Литература

1. Я.И. Заботин, И.А. Фукин *О принципе аппроксимации допустимого множества в методах внутренних и внешних штрафов*// Вестник СПбГУ. Сер. 10, 2006, вып.1. С. 22-29

СУММИРУЕМОСТЬ ПО РИССУ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

Халова В.А. (Саратов)

В пространстве $L[0,1]$ рассматривается оператор

$$Af(x) = (\alpha_1 E + \alpha_2 S)I^n f(x) + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k(x), \ x \in [0,1], \qquad (1)$$

где $I^n f(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$, $(f, v_k) = \int\limits_0^1 f(t) v_k(t)\,dt$, $v_k(t), g_k(x) \in$ $\in C^n[0,1]$, системы функций $\{g_k^{(n)}(x)\}_1^m$ и $\{v_k(t)\}_1^m$ линейно независимые, $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$, $Sf(x) = f(1-x)$, E – единичный оператор. Обозначим через $R_\lambda f$ резольвенту Фредгольма оператора A и пусть $g(\lambda, r)$ – функция, удовлетворяющая следующим условиям: а) $g(\lambda, r)$ непрерывна по λ в круге $|\lambda| \leqslant r$ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < r$ при любом $r > 0$; б) существует такая константа $C > 0$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00003)

что $|g(\lambda, r)| \leqslant C$ при всех $r > 0$ и $|\lambda| \leqslant r$; в) существуют положительные β, β_1 и h такие, что $g(re^{i\varphi}, r) = O(|\varphi|^{\beta})$, если $|\varphi| \leqslant h$, $n = 4n_0$, или $O(|\varphi - \pi|^{\beta})$, если $|\varphi - \pi| \leqslant h$, $n = 4n_0 + 2$, или (при нечетном n) $O(|\varphi - \frac{\pi}{2}|^{\beta})$, если $|\varphi - \frac{\pi}{2}| \leqslant h$, или $O(|\varphi + \frac{\pi}{2}|^{\beta_1})$, если $|\varphi + \frac{\pi}{2}| \leqslant h$ (оценки равномерны по r); г) $g(\lambda, r) \to 1$ при $r \to \infty$ и фиксированном λ.

Тогда при некоторых предположениях относительно оператора (1) спрведлива следующая

Теорема. *Для того чтобы выполнялось соотношение*

$$\lim_{r\to\infty} \Omega_r(f) = \lim_{r\to\infty} \left\| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} g(\lambda, r) R_\lambda f(x)\, d\lambda \right\| = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in D^0$, где D^0 – множество всех непрерывных на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих всем краевым условиям, не содержащим производных.

Данная работа обобщает результат [1] на случай произвольного n.

Литература

1. Гуревич А.П., Хромов А.П. Суммируемость по Риссу спектральных разложений для конечномерных возмущений одного класса интегральных операторов // Известия вузов. Математика. 2001. No 8(471). С. 38-50.

К ВОПРОСУ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Хворост О.Ю., Цалюк З.Б., Цалюк М.В. (Краснодар)
hary70@mail.ru

Изучается неустойчивость тривиального решения систем

$$x = \int\limits_0^t K(t-s)\left[x(s) + g(s, x(s))\right] ds + f(t), \tag{1}$$

$$x' = Ax + \int\limits_0^t K(t-s)\, x(s)\, ds + f(t, x(t)) + \int\limits_0^t G\left[t, s, x(s)\right] ds. \tag{2}$$

Обозначим через $\hat{K}(z)$ преобразование Лапласа ядра K, а через I единичную матрицу.

Теорема 1. Пусть матрица $I-\hat{K}(z)$ не обратима в точках λ_j, $Re\lambda_j \geqslant 0$, $\alpha = \max Re\lambda_j > 0$ и $m+1$ - максимальный порядок полюсов $\left(I-\hat{K}\left(z\right)\right)^{-1}$, лежащих на прямой $Rez=\alpha$. Пусть, далее, $\left\|g\left(t,x\right)\right\| \leqslant q_1\left(t\right)o\left(\left\|x\right\|\right)+q_2\left(t\right)\left\|x\right\|^{1+a}$, $t\geqslant 0$, $\left\|x\right\|\leqslant r$, $a>0$, где $\left(1+t\right)^m q_1 \in L_1\left[0;\infty\right)$, а $\sup\limits_t \int\limits_0^t e^{-a\alpha(t-s)}\left(s+1\right)^{m(1+a)}q_2\left(s\right)ds<\infty$. Тогда тривиальное решение системы (1) неустойчиво.

Теорема 2. Пусть матрица $zI-A-\hat{K}(z)$ не обратима в точках λ_j, $Re\lambda_j\geqslant 0$, $\alpha=\max Re\lambda_j>0$ и $m+1$ - максимальный порядок полюсов $\left(zI-A-\hat{K}\left(z\right)\right)^{-1}$, лежащих на прямой $Rez=\alpha$. Пусть

$$\left\|f\left(t,x\right)\right\|\leqslant q_1\left(t\right)o\left(\left\|x\right\|\right)+q_2\left(t\right)\left\|x\right\|^{1+a},$$

$$\left\|G\left(t,s,x\right)\right\|\leqslant Q_1\left(t,s\right)o\left(\left\|x\right\|\right)+Q_2\left(t,s\right)\left\|x\right\|^{1+a},$$

причем

$q_1\left(t\right)\left(t+1\right)^m+\int\limits_0^t Q_1\left(t,s\right)e^{-\alpha(t-s)}\left(s+1\right)^m ds\in L_1\left[0;\infty\right)$, а функция $q_2\left(t\right)\left(t+1\right)^{m(1+a)}+\int\limits_0^t Q_2\left(t,s\right)e^{-\alpha(1+a)(t-s)}\left(s+1\right)^{m(1+a)}ds$ ограничена. Тогда тривиальное решение системы (2) неустойчиво.

О РЕЗОЛЬВЕНТЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА ПРОСТЕЙШЕМ ГРАФЕ ИЗ ДВУХ РЕБЕР, СОДЕРЖАЩЕМ ЦИКЛ[1]

Хромов А.П. (Саратов)

KhromovAP@info.sgu.ru

Обозначим через Γ граф, состоящий из двух ребер, причем концы одного ребра и один конец другого ребра связаны в один узел (ориентация свободного ребра от узла). Зададим оператор дифференцирования $Ly=y'(x)$, $x\in\Gamma$ и при этом считаем, что $y(x)$ непрерывна на Γ, включая и узел, а на каждом ребре дифференцируема. Тогда уравнение $Ly=\lambda y(x)+f(x)$, $x\in\Gamma$, эквивалентно следующей краевой задаче:

$$y_1'(x)=\lambda y_1(x)+f_1(x),\ y_2'(x)=\lambda d y_2(x)+f_2(x),\ d>0,\ x\in[0,1], \quad (1)$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00003)

$$y_1(0) = y_1(1) = y_2(0). \tag{2}$$

Краевые условия (2) нерегулярны по Биркгофу и резольвента R_λ имеет экспоненциальный рост по λ. Но в нашем случае частичная сумма ряда Фурье по собственным функциям $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\, d\lambda$, где R_λ – резольвента и $f = (f_1, f_2)^T$ (т – знак транспонирования), не зависит от $f_2(x)$. Поэтому за счет выбора $f_2(x)$ можно добиться того, что $R_\lambda f$ уже не имеет экспоненциального роста по λ. Именно имеет место

Теорема. *Пусть N_0 – неотрицательное целое число такое, что $N_0 < d \leqslant N_0 + 1$. Если $f_2(x) = f_1(dx - j)$ при $x \in [jd^{-1}, (j+1)d^{-1}]$ $(j = 0, \ldots, N_0)$, то для второй компоненты $(R_\lambda f)_2$ вектор-функции $R_\lambda f$ имеет место формула:*

$$(R_\lambda f)_2 = \frac{e^{\lambda(dx-j+1)}}{1-e^\lambda}\Big\{\int\limits_0^{dx-j} e^{-\lambda(1+t)} f_1(t)\, dt + \int\limits_{dx-j}^{1} e^{-\lambda t} f_1(t)\, dt\Big\},$$

$x \in [jd^{-1}, (j+1)d^{-1}]$ *(при этом считаем, что $(N_0+1)d^{-1}$ заменяется на 1).*

Тем самым открывается возможность исследования сходимости разложений по собственным функциям методом контурного интегрирования R_λ по λ.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Чадаев В.А. (Грозный)
niipma@mail333.com

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$D^\alpha_{0x} y(t) = f(x, D^\beta_{0x} y(t)), \tag{1}$$

где D^α_{0x} – оператор дробного дифференцирования порядка $0 < \alpha \leqslant 1$ с началом в точке 0 и с концом в точке $x \in]0, l[$ [1], [2] $\beta < \alpha$.

Задача Коши. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию:

$$\lim_{x\to 0} x^{1-\alpha} y(x) = y_0. \tag{2}$$

Обозначим через D множество точек (x, y) из области G, лежащей в $\mathbf{R}^2$:

$$D = \left\{ (x, y) \in G : \, 0 \leqslant x \leqslant l, \, \left| x^{1-\alpha} y(x) - \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \right| \leqslant a \right\}, \tag{3}$$

$a > lM/\Gamma(\alpha + 1)$, $b_1 = y_0 \Gamma(\alpha)$, l, M – постоянные, $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера.

Доказана

Теорема. *Пусть $f(x, z)$ – вещественнозначная, непрерывная в области G функция, удовлетворяющая условию Липшица по z:*

$$|f(x, z_1) - f(x, z_2)| \leqslant N(|z_1 - z_2|) \tag{4}$$

и ограничению

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant l} |f(x, z)| = M < \infty. \tag{5}$$

Тогда решение задачи Коши в области $D \subset G$ существует, непрерывно и единственно.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск: Наука и техника, 1987. - 688 с.

ОБ ОДНОМ СЛЕДСТВИИ ТЕОРЕМЫ ЛЕБЕГА О ПРАВИЛЬНЫХ ТОЧКАХ[1]

Чернов А.В. (Нижний Новгород)

v_sumin@mm.unn.ru

Определение. Систему $\left\{ H[m, \tau] : m \in \mathbf{N}, \tau \in \Pi \right\}$ измеримых множеств будем называть **равномерно регулярно сжимаемой** на измеримом ограниченном множестве $\Pi \subset \mathbf{R}^n$, если 1) $\tau \in H[m, \tau]$ $\forall m \in \mathbf{N}$; 2)$\sup\limits_{\tau \in \Pi} \operatorname{diam}(H[m, \tau]) \to 0$ при $m \to +\infty$; 3) $\forall \tau \in \Pi \; \exists L > 0$: $\forall m \in \mathbf{N} \; \exists$ куб $Q(\tau, r) \supset H[m, \tau]$: $r^n \leqslant L \operatorname{mes}(H[m, \tau])$.

Далее система $\{H[m, \tau]\}$ удовлетворяет данному определению, $\Pi[m, \tau] \equiv H[m, \tau] \cap \Pi$; числа $q, q' \in [1, \infty]$, $p' \in [1, \infty)$ произвольны, а H – любое множество параметров h.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 04-01-00460.

Теорема. Пусть $\Phi(t,y) : \Pi \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ измерима по t и непрерывна по y, и кроме того, 1) $\Big\{y[m,h](.) : m \in \mathbf{N}, h \in H\Big\} \subset L_q^l(\Pi)$ и $\exists \{r_m(.)\} \subset L_q(\Pi)$: $\|r_m(.)\| \to 0$ при $m \to +\infty$, и $\Big|y[m,h](t)\Big| \leqslant r_m(t)$, $\forall m \in \mathbf{N}$, $h \in H$, для п.в. $t \in \Pi$; 2) $\forall y \in L_q^l(\Pi)$ $\Phi(.,y(.)) \in L_{q'}(\Pi)$, причем: $\Big\|\Phi(.,y(.))\Big\| \to 0$ при $\|y\| \to 0$; 3) $F : L_{q'}(\Pi) \to L_{p'}(\Pi)$ – положительный линейный ограниченный оператор.

Тогда $\exists$ $\{m_k\} \to +\infty$ и $\Pi_0 \subset \Pi$, $\mathrm{mes}(\Pi \setminus \Pi_0) = 0$: $\forall \tau \in \Pi_0$, $h \in H$

$$\frac{1}{\mathrm{mes}(H[m_k,\tau])} \int\limits_{\Pi[m_k,\tau]} \Big(F\Big[\Big|\Phi(.,y[m_k,h](.))\Big|\Big]\Big)^{p'} dt \to 0 \text{ при } k \to +\infty.$$

Данная теорема является следствием теоремы Лебега и [1]. Фактически в ней развивается и обобщается конструкция, использованная в [2] при вычислении вариаций функционалов, определенных на решениях начально-краевых задач, описываемых функциональным вольтерровым уравнением в $L_\infty^m(\Pi)$, на случай $L_p^m(\Pi)$, $p \in [1,\infty)$.

Литература

1. А.В. Чернов // "Понтрягинские чтения-XVI": Тезисы докладов. - Воронеж: ВГУ. 2005. С.167-168.

2. В.И. Плотников, В.И. Сумин. Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сиб. матем. журн.-1981.-Т.22, N 6.-С. 142-161.

СВОЙСТВА ЯДЕР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА СЕТИ[1]

Чернышев В.Л. (Москва)

vchern@bmstu.ru

Для компактных гладких многообразий без края известна связь ядра оператора Лапласа, действующего на k-формах с топологическими характеристиками многообразия (см. книгу [1] и ссылки в ней).

Естественно возникает задача: верны ли аналогичные свойства для стратифицированных множеств, в частности для геометрических графов. На последний вопрос дают ответ приведенные ниже утверждения. Функции предполагаются непрерывными на сети. Граф компактен и не содержит висячих вершин.

[1]Работа выполнена при поддержке программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2006 - 2007 г) проект РНП 2.1.1.2381

Утверждение 1. Размерность ядра оператора Лапласа, действующего на 0-формах, определенных на геометрическом графе, равна числу связных компонент графа.

Утверждение 2. Для оператора Лапласа с краевыми условиями в вершинах, которые соответствуют самосопряженному случаю, размерность ядра, при действии на 1-формы, равна первому числу Бетти.

Доказательство в первом случае непосредственно следует из результатов изложенных в [2], а во втором основано на комбинаторных свойствах графа.

Нужно отметить, что утверждение, аналогичное Утверждению 1 было получено в недавно вышедшей работе [3] (см., также исправление к ней [4]) для частного случая так называемых "натуральных"условий трансмиссии.

Литература

[1] Цикон Х., Фрёзе Р., Саймон Б. — *Операторы Шрёдингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии.* М.: Мир, 1990.

[2] Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.. — *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* - М.: Физматлит, 2004.

[3] Kurasov — P. *Inverse spectral problem for quantum graphs.* J. Phys. A: Math. Gen. 38 p. 4901-4915, 2005

[4] Kurasov P. — J. Phys. A: Math. Gen. 39 p. 993, 2006

РАСПАД МЕТАСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В СЛУЧАЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКИ

Чубурин Ю.П. (Ижевск)

chuburin@otf.pti.udm.ru

Рассматриваются операторы Шредингера вида $H_0(k) = -\Delta + V(x)$, $H_\epsilon(k) + \epsilon W(x)$, где ϵ – вещественный параметр, определенные в $L^2(\Omega)$ на блоховских по переменным x_1, x_2 функциях. Здесь $\Omega = [0,1)^2 \times \mathbf{R}$ – ячейка, k – двумерный квазиимпульс, $V(x), W(x)$ – вещественные функции, удовлетворяющие условиям:

$$|W(x)| \leqslant C|V(x)| \leqslant C_1 e^{-a|x_3|}, |V(x)| \leqslant C_2 |W(x)| e^{\epsilon_0 |x_3|},$$

где $a > 0$, а ϵ_0 достаточно мало. (Такие операторы возникают при разложении операторов $H_0 = -\Delta + V(x)$, $H_\epsilon + \epsilon W(x)$, определенных в $L^2(\mathbf{R}^3)$, с периодическими по переменным x_1, x_2 потенциалами $V(x), W(x)$ в прямом интеграле по k пространств $L^2(\Omega)$).

Оператор $H_0(k)$ может иметь собственные значения на существенном спектре $[k^2, \infty)$. Пусть ψ_0 – нормированный собственный вектор (метастабильное состояние), отвечающий невырожденному собственному значению $\lambda_0 > k^2$ оператора H_0. Справедлива оценка: $|\psi_0(x)| \leqslant Ce^{-\sigma|x_3|}$, где $\sigma > 0$ зависит лишь от λ_0. Будем предполагать, что $|V(x)| \geqslant Ce^{-b|x_3|}$, где $C > 0, 0 < b/2 < a \leqslant b < 2\sigma$.

Обозначим через $\lambda(\epsilon)$ квазиуровень (собственное значение или резонанс) оператора $H_\epsilon(k)$, являющийся возмущением λ_0. Справедливо неравенство: $\mathrm{Im}\lambda(\epsilon) \leqslant 0$ для всех достаточно малых ϵ.

Теорема.*Пусть* $\mathrm{Im}\lambda(\epsilon) < 0$ *для всех достаточно малых* $\epsilon > 0$. *Тогда*

$$(e^{-iH_\epsilon t}\psi_0, \psi_0) = e^{-i\lambda(\epsilon)t} + O(\epsilon^2)$$

равномерно по $t > 0$.

В доказательстве используется явное выражение (допускающее продолжение в окрестности точек существенного спектра) резольвенты оператора H_ϵ через главную и регулярную части невозмущенного оператора H_0. (Используемый обычно при доказательстве подобных формул метод спектральной деформации не применим для операторов в ячейке).

В некоторых случаях подобное утверждение справедливо и для вырожденного собственного значения λ.

О СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ[1]

Шалтыко Д.Г. (Саратов)

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ краевую задачу:

$$l[y] = y^{(n)} - \lambda y = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = \ldots = y^{(k-1)}(0) = y(\alpha) = y(1) = \ldots = y^{(k-1)}(1) = 0, \tag{2}$$

где $n = 2k + 1$, $k = 2æ$, $0 < \alpha < 1$.

Теорема 1.*Краевая задача (1) - (2) имеет бесконечное множество собственных значений, которые можно разложить в две серии:*

$$\lambda_{j,1} = -\left(\frac{j\pi}{\alpha \sin \frac{2æ+1}{n}\pi} + O\left(\frac{1}{j}\right)\right)^n$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003)

$$\lambda_{j,2} = -\left(\frac{(2j+1)\pi e^{i\frac{\pi}{n}}}{2(1-\alpha)\sin\frac{2æ}{n}\pi} + O\left(\frac{1}{j}\right)\right)^n$$

При этом все собственные значения, достаточно большие по модулю, простые.

Предположим, что $\varphi_{j,1}(x)$, $\varphi_{j,2}(x)$ - системы собственных функций, соответствующие этим собственным значениям, а $\psi_{j,1}(s)$, $\psi_{j,2(x)}$ - биортогональные к ним системы функций.

Теорема 2. *Предположим, что $f(x)$ из $L_2[0,1]$ и $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$,причем $f_1(x)$ удовлетворяет условиям: а) f_1 аналитична на $[0,b]$ $(\alpha < b)$; б) $f_1, l[f_1], \ldots$ удовлетворяют условиям в 0 и α; в) f_1 ортогональна $\{\psi_{j,2}(x)\}$; г) справедливо*

$$\frac{d^p}{dx^p} l^q[f_1] = O\left(\left(\frac{1+\epsilon}{(b-\epsilon-x)\cos\frac{k}{n}\pi}\right)^{nq+p}(nq+p)!\right)$$

а $f_2(x)$ удовлетворяет условиям: д) f_2 аналитична на $[a,1]$ $(a < \alpha)$; е) $f_2, l[f_2], \ldots$ удовлетворяют условиям в 1 и α; ж) f_2 ортогональна $\{\psi_{j,1}(x)\}$ и выполняется г).Тогда $f(x)$ разлагается на (a,b) в равномерно сходящийся ряд Фурье.

О ПОЛУГЛОБАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1]

Шананин Н.А. (Москва)

nashananin@inbox.ru

В открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ рассмотрим уравнение с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами

$$(P(x,D)\ u =) \sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle\leqslant m} a_\alpha(x)\ D^\alpha u = f, \quad D_j \ = \ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}. \qquad (1)$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ - неотрицательный целочисленный мультииндекс, $\langle\varrho,\alpha\rangle = \varrho_1\alpha_1 + \varrho_2\alpha_2 + \ldots + \varrho_n\alpha_n$,- взвешенный порядок D^α, веса ϱ_k - натуральные числа $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\mu = \min_j \varrho_j$. Предположим, что ξ-квазиоднородные порядков $l = m, \ldots, m-\mu+1$ составляющие $p_l(x,\xi) = \sum_{\langle\varrho,\alpha\rangle = l}\ a_\alpha(x)\ \xi^\alpha$ полного символа оператора P вещественнозначны.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 06-01-00253.

Положим $\Lambda(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^{1/\varrho_j}$. Пусть $H^s(\mathbb{R}^n)$ - пространство обобщённых функций $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, преобразование Фурье $\widetilde{u}(\xi)$ которых $\Lambda^s \widetilde{u} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ и $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ - соответствующее локальное пространство функций на (Ω). Пусть K - компакт в Ω. Тогда

Теорема. *Если K не содержит проекции ни одной полной интегральной кривой векторного поля $\sum_{j|\varrho_j=\mu} \left(\frac{\partial p_m}{\partial x_j} \partial_{\xi_j} - \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j} \partial_{x_j} \right)$, принадлежащей множеству $\{(x,\xi) \mid p_m(x,\xi) = 0,\ \xi \neq 0\}$, то*

(I) *множество обобщённых решений с компактным носителем однородного сопряжённого уравнения $N(K) = \{v \in \mathcal{E}'(K) \mid P^* v = 0\}$ есть конечномерное подпространство в $C_0^\infty(K)$, ортогональное образу $P\mathcal{D}'(\Omega)$;*

(II) *для любой $f \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, ортогональной к $N(K)$, существует функция $u \in H^{s+m-\mu}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, которая является решением уравнения* (1) *в некоторой окрестности K.*

Литература

[1] Н. А. Шананин, О разрешимости на компактных подмножествах дифференциальных уравнений с вещественнозначным главным пучком символов. Матем. сб., т. 197, вып. 2, 2006, 137-160.

ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ДИХОТОМИИ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Шафранов Д.Е. (Челябинск)

shafr@math.susu.ac.ru

Пусть Ω_n- n-мерное риманово компактное ориентированное многообразие без края. Рассмотрим для фиксированного $k = 0, 1, \ldots, n$ пространство $\mathcal{H}_k^0$ пополненое по норме, соответствующей скалярному произведению $(\alpha, \beta)_0 = \int\limits_{\Omega_n} \alpha \wedge *\beta$, где $\alpha, \beta \in H^k-$ линейные гладкие k-формы определенные на Ω_n. Зададим так же $\mathcal{H}_k^1$ и $\mathcal{H}_k^2$.

Обозначив $\mathcal{U} = \mathcal{H}_k^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{H}_k^0$ и определив формулами $L = \lambda - \Delta$, $M = \alpha\Delta$, где Δ-оператор Лапласа-Бельтрами, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ редуцируем, тем самым, уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной

$$(\lambda - \Delta) u_t = \alpha \Delta u, \tag{1}$$

к линейному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{2}$$

Пространство $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ и $\mathcal{U}^1$ фазовое пространство, т.е. задача Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (2) разрешима, если $u_0 \in \mathcal{U}^1$.

Как показано в [2], в зависимости от $\lambda \in R \setminus \{0\}$ оно имеет вид $\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U} : (u, \varphi_l)_0 = 0, \lambda = \lambda_l\}$, если $\lambda \in \sigma(\Delta) \setminus \{0\}$; $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}$, если $\lambda \notin \sigma(\Delta)$. Здесь λ_l собственные значения, а φ_l собственные функции оператора Δ. Проводя аналогии с [1] можно доказать:

Теорема 1. Множества $\mathcal{U}^r = \{u \in \mathcal{U}^1 : u = \sum\limits_{\lambda<\lambda_k} u_k\varphi_k, u_k \in R\}$ и $\mathcal{U}^l = \left\{u \in \mathcal{U}^1 : (u, \varphi_k)_0 = 0, \lambda < \lambda_k\right\}$ являются соответственно устойчивым и неустойчивым инвариантными пространствами уравнения (1), причем $\mathcal{U}^r$ конечномерно.

Теорема 2. Для любых $\lambda \in R \setminus \{0\}$ и $\alpha \in R_+$ решения уравнения (1) имеют экспоненциальную дихотомию.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева/Г.А. Свиридюк, А.В. Келлер//Изв. ВУЗ. Математика.- 1997.- № 5.- С.60-68.

2. Свиридюк, Г.А. Задача Коши для уравнения Баренблатта-Желтова-Кочиной на гладком многообразии/Г.А. Свиридюк, Д.Е. Шафранов//Вестн. Челяб. ун-та. Сер. мат., мех., информ.- 2003.- № 3.- С.171-177.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО КОШИ ОТОБРАЖЕНИЙ K- ПРОСТРАНСТВ С РЕГУЛЯТОРОМ

Щербин В.М. (Воронеж)

Определим интеграл методом Коши от отображения $f : [a, b] \to X$, где $[a, b]$ – порядковый отрезок в кольце X. По поводу терминологии K-пространств см. [1].

Возьмем элементы $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$.

Такие элементы всегда существуют и точку $\xi_i^{(n)} \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ составим сумму $S_n(f, T^n)\xi^{(n)}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$; Здесь $T^{(n)}$ набор элементов $x_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Если при $n \to \infty \quad Sup(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}) \to 0$ с регулятором "u", $S_n(f, T^{(n)}\xi^{(n)}) \to S(f)$ с регулятором "v", тогда $S(f)$ назовем (u, v) - интеграл Коши от $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначим $(u, v) \int_a^b f(x)dx$. Можно показать, что (u, v) интеграл Коши существует, если $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такие, что $| f(x') - f(x'') | < \varepsilon$ при $| x' - x'' | < \delta$ и независимо от положения точек x', x'' на $[a, b]$.

Для таких функций и интегралов Коши легко показать, что

(u, v) – производная от $(u, v) \int_a^x f(t)dt = f(x)$. По поводу (u, v)-производной см. [2].

Литература

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.Физматлиз, 1961 -407 с.

2. Соболев В.И. , Щербин В.М. О дифференцировании отображений K-пространств // Докл. АН СССР – 1975, – 225, № 5. – С. 1020-1022.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МЕДЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ СО СМЕНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Щетинина Е.В. (Самара)

schetinina_k@mail.ru

Разнотемповые системы обыкновенных дифференциальных уравнений используются для моделирования процессов различной природы. Поэтому создание различных методов качественного исследования такого рода систем является в настоящее время актуальной задачей.

Работа посвящена исследованию неавтономных быстро-медленных систем, у которых соответствующая линейная быстрая подсистема не удовлетворяет условию экспоненциальной дихотомии. Было показано, что если ввести в систему дополнительную управляющую функцию медленных переменных, то система имеет медленное интегральное многообразие [1].

В работе исследуются свойства полученного медленного интегрального многообразия. Показано, что в окрестности этого многообразия наблюдается эффект, близкий к эффекту затягивания потери устойчивости в сингулярно возмущенных системах [2]. Изучаются задачи приближенного построения функции управления и медленного интегрального многообразия. Построены алгоритмы нахождения коэффициентов асимптотических разложений этих функций и найдены оценки погрешностей асимптотических приближений.

Литература

1. Щетинина Е.В. Интегральные многообразия и затягивание потери устойчивости. — Известия РАЕН ММИУ. 2004. — Т.8, № 3-4. — С. 82-105.

2. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23, № 12. — С. 2060–2067.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С СИНГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

Юрко В.А. (Саратов)
yurkova@info.sgu.ru

Исследуются сингулярные дифференциальные уравнения вида

$$-\frac{d}{dt}\Big(p_2(t)\frac{dz}{dt}\Big) + p_1(t)z(t) = \lambda p_0(t)z(t), \quad t \in (a,b). \tag{1}$$

Здесь λ – спектральный параметр, а комплекснозначные функции $p_k(t)$ имеют нули и/или особенности на концах интервала (a,b). Точнее,

$$p_k(t) = (t-a)^{s_{k0}}(b-t)^{s_{k1}}p_{k0}(t),$$

где s_{km} – вещественные числа, $p_{k0}(t) \in C^2[a,b]$, $p_{00}(t)p_{20}(t) \neq 0$, $p_{00}(t)/p_{20}(t) > 0$ при $t \in [a,b]$. Пусть $s_{2m} < s_{0m}+2$, $s_{2m} \leqslant s_{1m}+2$, $m = 0,1$, т.е. мы рассматриваем случай так называемых регулярных особенностей. Так как решения уравнения (1) могут иметь особенности на концах интервала, и так как значения решений и их производных на концах интервала вообще говоря не определены, то важным является вопрос о том, как ввести сингулярные двухточечные краевые условия в общем виде.

Мы описываем общий метод построения двухточечных сингулярных краевых условий и даем постановки соответствующих краевых задач. Установлены свойства спектра краевых задач для уравнения (1) с сингулярными краевыми условиями. Доказана теорема о полноте собственных и присоединенных функций этого класса краевых задач в соответствующих весовых банаховых пространствах. При исследовании обратной задачи используется метод спектральных отображений, изложенный в [1]. Предлагаемый подход к постановке и исследованию краевых задач с сингулярными краевыми условиями является достаточно универсальным и может быть применен и для других классов сингулярных операторов, например, для дифференциальных операторов высших порядков и систем, для случая наличия особенностей и точек поворота внутри интервала, для пучков дифференциальных операторов.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 04-01-00007.

Литература

1. Yurko V.A., Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series. VSP, Utrecht, 2002.

ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ-СОБОЛЕВА В ШАРЕ

Антоненкова О.Е. (Брянск)
anto-olga@yandex.ru

Пусть $B_n = \{z = (z_1, ..., z_n) \in C^n : \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} |z_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < 1\}$, S_n - граница шара B_n, $H(B_n)$ - множество голоморфных в B_n функций, $H^p(B_n)$, $0 < p < +\infty$ - класс Харди в шаре. Пусть далее $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ - однородное разложение функции $f \in H(B_n)$, обозначим $\tilde{R}^\alpha f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(k+1)^\alpha f_k(z)$. $H^p_\alpha(B_n)$, $0 < \alpha < +\infty$ - пространство Харди-Соболева в B_n, т.е. $H^p_\alpha(B_n) = \{f \in H(B_n) : \|\tilde{R}^\alpha f\|_{H^p(B_n)} < +\infty\}$, $0 < p \leqslant +\infty$. Оператор Теплица с символом h: $T_h(f)(z) = \int\limits_{S_n} \frac{f(\zeta)h(\zeta)}{(1-<z,\zeta>)^n} d\sigma(\zeta)$, где $\zeta \in S_n$, $z \in B_n$. Верно утверждение

Теорема 1. Пусть $h \in H^1(B_n)$, $1 < p < +\infty$, тогда следующие утверждения равносильны: 1) $T_{\bar{h}}$ действует в пространстве $H^p_\alpha(B_n)$; 2) $h \in H^\infty(B_n)$.

Утверждение о том, что если $h \in H^\infty(B_n)$, то $T_{\bar{h}}$ действует в пространстве $H^p_\alpha(B_n)$ доказано ранее Александровым А.Б. [1].

Пусть $0 < p, q < +\infty$, $\alpha > -1$, $A^{p,q}(\alpha) = \{f \in H(B_n) :$ $\|f\|_{A^{p,q}(\alpha)} = \Big[\int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \Big(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta)\Big)^{\frac{q}{p}} dr\Big]^{\frac{1}{q}} < +\infty\}$, где $d\sigma(\zeta)$ - нормированная мера Лебега на S_n. Пусть $A^{p,q}_\alpha(B_n) = \{f \in H(B_n) : \|\tilde{R}^\alpha f\|_{A^{p,q}(\alpha)} < +\infty\}$, где $0 \leqslant \alpha < +\infty$, $0 < p, q < +\infty$.

Теорема 2. Пусть $h \in H^1(B_n)$, $1 < p, q < +\infty$, тогда следующие утверждения равносильны: 1) $T_{\bar{h}}$ действует в пространстве $A^{p,q}_\alpha(B_n)$; 2) $h \in H^\infty(B_n)$.

В случае поликруга аналогичные результаты получены в [2], [3].

Литература

1. Александров А.Б. Теория функций в шаре// Итоги науки и техники. - 1985. - Т. 8. - С. 115-186.

2. Шамоян Ф.А., Арутюнян А.В. Теплицевы операторы в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций//

ДАН Арм. ССР - 1990. - Т. 91. - N 4. - С. 147-151.
3. Шамоян Ф.А., Часова Н.А. О теплицевых операторах в пространствах Харди-Соболева// Инт. пр. и спец. функции. - 2003. - Т. 4. - N 1. - С. 46-54.

ОБ ОДНОЙ АЛГЕБРЕ ОПЕРАТОРОВ

Балабошкина О.С., Пуляев В.Ф. (Краснодар)
BalOles@mail.ru

Пусть $w > 0$ — фиксированное число. Обозначим через W пространство функций вида $K(t,\, s) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i2\pi nt}{w}} K_n(t-s)$, где

$K_n(t) \in L_1(R)$ и $\|K\|_W = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K_n(t)|\, dt < \infty$.

Теорема 1. Пусть измеримая функция $P(t,\, s)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $P(t+w,\, s+w) = P(t,\, s)$ для любых $t,\, s \in R$;

2) при каждом $t \in R$ функция $P(t,\, s)$ суммируема по s на R и

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |P(t+h,\, s) - P(t,\, s)|\, ds = 0;$$

3) для любых $t,\, s \in R$ существуют $P'_t(t,\, s)$, $P'_s(t,\, s)$, удовлетворяющие условию 2).

Тогда $P(t,\, s)$ принадлежит пространству W.

Интегральные операторы вида

$$(\widetilde{K}x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,\, s)x(s)\, ds,\ t \in R, \tag{1}$$

где $K(t,\, s) \in W$, переводят пространства $L_p(R)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в себя и являются линейными непрерывными операторами. Произведение $\widetilde{K} \circ \widetilde{D}$ таких операторов с ядрами $K(t,\, s) \in W$, $D(t,\, s) \in W$ представляет собой интегральный оператор, ядро которого определяется формулой $F(t,\, s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,\, \tau)D(\tau,\, s)\, d\tau$ и принадлежит пространству W, причем $\|F\|_W \leqslant \|K\|_W \|D\|_W$.

Теорема 2. Множество $\Omega = \{cI + \widetilde{K},\, c \in R\}$, где $\widetilde{K}$ оператор вида (1), с естественными операциями и нормой $||cI + \widetilde{K}||_\Omega = |c| + \|K\|_W$ является (некоммутативной) банаховой алгеброй.

На $S^1 = \{\xi \in C : |\xi| = 1\}$ определим операторнозначную функцию $K(\xi) = \sum\limits_{p=-\infty}^{\infty} \xi^p \widetilde{K}_p$, где $(\widetilde{K}_p x)(t) = \int\limits_0^w K(t,\, s - pw) x(s)\, ds$ действуют в пространстве $C[0,\, w]$.

Теорема 3. Пусть функция $K(t,\, s) \in W$ удовлетворяет условию 3) теоремы 1. Тогда если функция $K(\xi)$ не имеет собственных чисел на S^1, то оператор $(I - \widetilde{K}) \in \Omega$ обратим во всех пространствах $L_p(R)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $(I - \widetilde{K})^{-1} \in \Omega$.

ОЦЕНКА ТРУДОЕМКОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИТЕРАЦИОННОГО ШАГА ПО θ-НОРМИРОВАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ СПУСКА

Габидуллина З.Р. (Казань)

Zulfia.Gabidyllina@ksu.ru

В области разработки методов выпуклого программирования всегда особое внимание уделяется созданию эффективных методов с пошаговой адаптацией различных параметров.

В адаптивных методах ([1], [2]) величина шагового множителя регулируется прежде всего за счет θ-нормированности направления спуска.

Определение 1 [2]. Вектор $s \neq \mathbf{0}$ назовем θ-нормированным направлением спуска ($\theta > 0$) для функции f в точке $x \in D$, если выполняется неравенство: $\langle f'(x), s\rangle + \theta \|s\|^2 \leqslant 0$.

Определение 2 [1]. Пусть функция $f(x)$ определена на выпуклом множество $D \subseteq R_n$ и существует такая константа $\kappa > 0$, что для всех $x, y \in D$, $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) - \alpha(1-\alpha)\kappa \|x - y\|^2.$$

Тогда будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет на D условию А.

В [1], [2] показано, что класс функций, удовлетворяющих условию А, достаточно широк, в частности, шире класса $C^{1,1}(D)$.

Пусть $\beta \in (0, 1)$, $\eta = 1 - \beta$, s — θ-нормированное направление спуска, $\hat{i}$ — первый индекс $1 = 1, 2, \ldots$, при котором выполняется неравенство

$$f(x) - f(x + \eta^i s) \geqslant \eta^i \beta \theta \|s\|^2. \quad (1)$$

Положим $\mu = \eta^{\hat{i}}$. Следующая лемма доказывает численную реализуемость метода выбора шага из условия (1).

Лемма 1. *Если* s — θ*-нормированное направление спуска функции* f *в точке* x*, то для каждого* $\beta\in(0,1)$ *существует* $\bar\mu=\bar\mu(\beta)>0$ ($\bar\mu=(1-\beta)\xi$, $\xi=\begin{cases}\theta\kappa^{-1}, & \text{если } \theta<\kappa,\\ 1, & \text{если } \theta\geqslant\kappa\end{cases}$) *такое, что для всех* $\mu\in(0,\bar\mu]$ *выполняется* $f(x)-f(x+\mu s)\geqslant\mu\beta\theta\|s\|^2$.

Следующая лемма доказывает не только ограниченность снизу величины шага, но и позволяет оценить трудоемкость ее вычисления.

Лемма 2. *Пусть* 1) $0<\theta<\kappa$, $\beta\in(0,1)$, 2) $\hat{i}$ — *первый индекс* $i=1,2,\ldots$, *при котором выполняется неравенство* (1), $\mu=\eta^{\hat{i}}$; *тогда имеет место оценка* $\mu>\theta\kappa^{-1}(1-\beta)^2>0$.

Из леммы 2 следует, что $(1-\beta)^{\hat{i}-2}>\theta\kappa^{-1}\Rightarrow\hat{i}<2+\log_{1-\beta}\theta\kappa^{-1}$. Тогда неравенство (1) будет выполненно не более чем за конечное число дроблений параметра η.

Литература

1. Габидуллина З.Р. Адаптивный метод с регулировкой шага для решения задачи условной оптимизации // Исследования по прикладной математике. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та. – 1992. – Вып. 18. – С. 30–38.

2. Габидуллина З.Р. Адаптивные методы с регулировкой шага для решения задач псевдовыпуклого программирования. – Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1994. – 125 с.

О СИСТЕМАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ОДНОМЕРНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ И ОГРАНИЧЕННЫМИ ЯДРАМИ

Калитвин А.С. (Липецк)

kalitvin@mail.ru

При исследовании систем с существенно распределенными параметрами могут быть использованы системы интегро-дифференциальных уравнений Барбашина вида

$$\frac{\partial x_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}(t,s)x_j(t,s)+\int_c^d k_{ij}(t,s,\sigma)x_j(t,\sigma)\,d\sigma\right]+f_i(t,s)\quad(1)$$

($i=1,\ldots,n$), где $t\in[a,b]$, $s\in[c,d]$, а интеграл понимается в смысле Лебега [1]. Система (1) с начальным условием $x_i(t_0,s)=\varphi_i(s)$ ($i=1,\ldots,n$) сводится подстановкой $x_i(t,s)=\int_{t_0}^t y_i(\tau,s)\,d\tau+\varphi_i(s)$

$(i = 1, \dots, n)$ к частному случаю системы интегральных уравнений Вольтерра с одномерными частными интегралами

$$
\begin{aligned}
&y_i(t,s) = g_i(t,s) + \sum_{j=1}^{n} \Big[\int_{t_0}^{t} l_{ij}(t,s,\tau) y_j(\tau,s)\, d\tau + \\
&+ \int_{s_0}^{s} m_{ij}(t,s,\sigma) y_j(t,\sigma)\, d\sigma + \int_{t_0}^{t} \int_G n_{ij}(t,s,\tau,\sigma) y_j(\tau,\sigma)\, d\tau d\sigma \Big] \\
&\equiv g_i(t,s) + \sum_{j=1}^{n} (L_{ij} + M_{ij} + N_{ij}) y_j(t,s)
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

$(i = 1, \dots, n)$, где $t \in [a,b]$, $s \in [c,d]$, $G = [c,d]$ или $G = [s_0, s]$, l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} — заданные измеримые по совокупности переменных вещественные функции, $g_1, \dots, g_n$ — заданные непрерывные вещественные функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Пусть $D = [a,b] \times [c,d]$ и $C^n(D)$ — пространство непрерывных на D вектор-функций со значениями в R^n.

Теорема. *Если функции l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ ограничены и операторы L_{ij}, M_{ij}, N_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ действуют в пространстве непрерывных на D функций, то при любых непрерывных на D функциях $g_1, \dots, g_n$ система (2) имеет единственное решение в $C^n(D)$ и оно может быть получено методом итераций.*

Литература

1. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabreiko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. - New York: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ГЛАДКИХ ФУНКЦИЯХ

Катрахов В.В., Емцева Е.Д. (Владивосток)
emtseva@mail.ru, katrakhov@mail.ru

При натуральных и дробных значениях соответственно рассматривается оператора вида

$$S_{\lambda g(r)} = \frac{(-1)^{\lambda}}{(\lambda-1)!} D_r^{\lambda} \int_r^1 (ch\rho - chr)^{\lambda-1} g(\rho) sh\rho d\rho, \qquad (1)$$

где $\lambda \in N$,

$$S_{\lambda g(r)} = \frac{(-1)^{[\lambda]}}{\Gamma(\lambda')\Gamma(\lambda)} D_r^{[\lambda]} \int_r^{\rho} sh\rho \int_r^{\rho} (t-r)^{\lambda'-1} (ch\rho - cht)^{\lambda-1} dt d\rho, \qquad (2)$$

где $\lambda = [\lambda] - \lambda',\ 0 < \lambda < 1,\ \lambda \in N$.

Для введенных операторов получено разложение

$$S_\lambda = (E + K) sh^\lambda,$$

где E – тождественный оператор, и доказана лемма

Лемма 1. *Оператор S_λ, определенный при целых λ по формуле (1), а при дробных λ по формуле (2), допускает расширения по непрерывности со множества $\dot{C}^\infty[0,1)$ до ограниченного оператора, действующего из пространства $L_{2,\lambda}(0,1)$ в пространство $L_2(0,1)$, причем имеет место оценка вида*

$$\|S_\lambda f\|_{L_2(0,1)} \leqslant a^\lambda \|f\|_{L_2,\lambda}(0,1),$$

где $a > 0$ – некоторая абсолютная постоянная.

Здесь через $L_{2,\lambda}(0,1)$ обозначено весовое лебегово пространство с нормой

$$\|f\|_{L_{2,\lambda}(0,1)} \equiv \|f sh^\lambda\|_{L_2(0,1)}.$$

Более подробное изложение введенных операторов и некоторые их приложения представлены в работах [1,2].

Литература

1. Катрахов. Т.Т., Емцева Е.Д. Об одном классе операторов преобразования// Препринт № 5. – 2005. – 8 с.

2. Катрахов Т.Т., Емцева Е.Д. Некоторые операторы преобразования и функциональные пространства // Препринт (в печати) . – 2006. – 10 с.

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ ДИСТАНЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Климова Е.Н. (Самара)

elena_klimova@mail.ru

Тестирование, обучение с использованием глобальной сети Интернет - актуальная, бурно развивающаяся, перспективная форма образования. Использование технологий дистанционнго образования позволяет создать электонные интерактивные учебники и сложные тестинговые системы.

В Самарской государственной академии путей сообщения, являющейся официальным региональным представителем Центра тестирования в МГУ "Гуманитарные технологии планируется создание Центра тестирования. На базе этого центра предполагается проведение компьютерных тестов трех видов: предметных (образовательных) тестов по основным предметам школьной программы, профориентационных тестов - результаты в форме ранжирования профессий по близости к склонностям испытуемого, психологических тестов - интеллектуальных и личностных. Также планируется проведение компьютерного репетиционного и демонстрационного тестирования Единого Государственного Экзамена. Тесты обладают высокими психометрическими свойствами: репрезентативностью норм (широкой базой для калибровки шкалы), надежностью, валидностью, достоверностью.

Используются особые возможности компьютерных тестов: рандомизация вариантов, регистрация времени реакции, управление временем, возможность адаптивного тестирования, он-лайн контроль достоверности, имитационные тесты. Благодаря созданию подобных центров значительно расширяется спектр предоставляемых образовательных услуг.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Лепчинский М.Г. (Челябинск)
mmyth@mail.ru

Рассматривается полулинейная эллиптическая краевая задача

$$Lu(x) + g_0(x, u(x)) = 0,\ x \in \Omega \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где нелинейность g_0 борелева и может иметь разрывы первого рода по фазовой переменной, причем g_0 удовлетворяет условию подлинейного роста

$$|g_0(x, u)| \leqslant b|u|^r + a(x), \quad 0 \leqslant r < 1,\ b > 0,\ a \in L_q(\Omega).$$

Предполагается, что ядро $N(L)$ оператора L нетривиально и 0 – наименьшее его собственное значение.

Обобщенным решением задачи (1)-(2) будем называть функцию $u \in W_q^2(\Omega)$, удовлетворяющую граничному условию (2) и для почти всех $x \in \Omega$ включению

$$-Lu(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))],$$

$g_-(x,u) = \liminf_{s\to u} g_0(x,s)$, $g_+(x,u) = \limsup_{s\to u} g_0(x,s)$.

Мы предлагаем условие, гарантирующее существование обобщенных решений, которое естественным образом распространяет условие K.C. Chang [1] на случай неограниченных нелинейностей.

Теорема 1. Пусть нелинейность g_0 удовлетворяет соотношению

$$\lim_{||\psi||\to\infty, \psi(x)\in N(L)} \frac{1}{||\psi||^{2r}} \int_\Omega dx \int_0^{\psi(x)} g_0(x,s)ds = +\infty.$$

Тогда при некоторых дополнительных ограничениях на точки разрыва g_0 краевая задача (1)-(2) имеет обобщенное решение $u_0 \in W_q^2(\Omega)$.

Литература

[1] Chang K.C. Variational Methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations // J. Math. Anal. and Appl. - 1981. - v.80. - №1. - p.102-129

ОБ УРОВНЯХ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Сметанина М.С. (Ижевск)

chuburin@otf.pti.udm.ru

В пространстве $L^2(\mathbf{R})$ рассматривается одномерный оператор Шредингера $H = -d^2/dx^2 + V$ с нелокальным потенциалом $V = \epsilon W(x) + \lambda_1(\cdot,\varphi_1)\varphi_1 + \lambda_2(\cdot,\varphi_2)\varphi_2$, где ϵ, λ_1, λ_2 вещественные параметры, функции $W(x), \varphi_1 = \varphi_1(x), \varphi_2 = \varphi_2(x)$ экспоненциально убывают при $\mid x \mid\to\infty$. В работе [1] изучался более простой случай одномерного возмущения потенциала $W(x)$.

Под резонансом E оператора H будем понимать полюс ядра резольвенты данного оператора на втором листе соответствующей римановой поверхности. Уровнем E назовем собственное значение или резонанс оператора H.

Введем обозначения

$$\Delta = (1+\lambda_1(R_0(E)\varphi_1(y),\varphi_1(x))(1+\lambda_2(R_0(E)\varphi_2(y),\varphi_2(x))-$$

$$-\lambda_1\lambda_2(R_0(E)\varphi_1(y),\varphi_2(x))(R_0(E)\varphi_2(y),\varphi_1(x)),$$

$$b_i = (\varphi_i(x), \sqrt{W(x)}),\ i=1,2,\ d = 1/2\int_{\mathbf{R}} W(x)dx.$$

Теорема. Пусть $\Delta \neq 0$. Для всех достаточно малых ϵ существует единственный уровень E оператора H в окрестности нуля, для которого справедлива следующая формула:

$$\sqrt{E} = \epsilon(d + \frac{\lambda_1 a_{11} b_1 + \lambda_2 a_{12} b_2}{2ic}) + O(\epsilon^2).$$

Здесь a_{11}, a_{12}, c - это явно выписываемые интегралы, содержащие функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ и $W(x)$ (выражения не приводятся из-за их громоздкости).

Литература

1. Сметанина М.С., Чубурин Ю.П. Об уровнях оператора Шредингера для кристаллической пленки с нелокальным потенциалом. Теор. и матем. физика. Т. 140. N 2. 2004. С. 297-302.

ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ, ИЛЛЮСТРИРОВАНИЯ И ПРОВЕРКИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Томова А.В. (Варна, Болгария)

mailto:anna_bg_2000@yahoo.com

Предлагается для обсуждения короткая аннотация научно – исследовательского труда объема 300 страниц под упомянутым уже заголовком "Применение современных информационных технологий для получения, иллюстрирования и проверки математических результатов". Труд содержит 12 глав, включая Ввод и Литературу на болгарском языке. В докладе предполагается обзор данной книги.

ДЕКОМПОЗИЦИЯ И РЕКОНСТРУКЦИЯ ДИСКРЕТНОГО ЦИФРОВОГО СИГНАЛА НА ОСНОВЕ БАЗИСОВ ВСПЛЕСКОВ И ФОРМИРОВАНИЕ ФИЛЬТРОВ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Феоктистов В.В., Феоктистова О.П. (Москва)

apmath@bmst.ru

Кратномасштабный анализ (КМА) — это последовательность $\{V_j\}_{j \in Z}$ замкнутых в $L^2(\mathbb{R})$ подпространств, удовлетворяющая условиям [1]:

1. $\ldots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \ldots, \quad \overline{\bigcup_{j \in Z} V_j} = L^2(R), \quad \bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\};$

2. $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}t) \in V_0, \quad f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t-k) \in V_0, \quad k \in Z;$

3. $\exists\, \varphi$, $\varphi \in V_0$, такая, что последовательность $\{\varphi(t-k)\}_{k\in Z}$ образует ортонормированный базис в пространстве V_0.

Из определения следует, что последовательность $\{\varphi_{jk}\}_{j,k\in Z}$, $\varphi_{jk} = 2^{j/2}\varphi(2^j t - k)$, образует ортонормированный базис в пространстве V_j.

Генератором, который приводит в действие алгоритмы декомпозиции и реконструкции дискретного цифрового сигнала, является уравнение масштабирования:

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in Z} h_k\varphi(2t-k), \quad h_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\cdot\overline{\varphi(2t-k)}\,dt,\ \sum_{k\in Z} h_k^2 = 1.$$

Представим V_{j+1} в виде ортогональной суммы $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, где W_j - пространство всплесков. Зная КМА, порождаемый масштабирующей функцией φ, построим для W_j ортонормированный базис всплесков [1]: $\psi_{jk} = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$.

Для декомпозиции сигнала f из L^2 построим проекцию f на V_0:

$$\tilde{f} = \textstyle\sum_{k\in Z} c_k\varphi(t-k) = \sum_{k\in Z} c_k\varphi_{0k}(t).$$

В качестве всплеска ψ, определяющего базисы сдвигов $\psi_{jk} = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$ в пространствах W_j, возьмем функцию

$$\psi(t) = \textstyle\sum_{k\in Z}(-1)^{k-1}h_{1-k}\varphi(2t-k).$$

Используя условие ортонормированности базисов, определим коэффициенты декомпозиции

$$c_{jk} = \textstyle\sum_{n\in Z} c_{(j+1),n}\overline{h}_{n-2k},\ d_{jk} = \sum_{n\in Z} c_{(j+1),n}h_{1-n+2k}$$

и формулу реконструкции

$$c_{j+1,k} = \textstyle\sum_{n\in Z}(-1)^{1-k}c_{jn}\overline{h}_{1-k+2n} + \sum_{n\in Z} c_{jn}h_{k-2n}.$$

В работе проведен одновременный анализ временных и частотных свойств сигнала.

Литература

[1] Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков. // УМН. 1998, т. 53, вып. 6(324), С.53–127.

О МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ О ЗАМКНУТОСТИ ОБЪЕДИНЕНИЯ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

Фомин В.И. (Тамбов)

В целях экономии времени предлагается после доказательства свойства $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$ [1, с. 58] распространить его методом математической индукции на конечное число множеств:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} M_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{M_i}. \qquad (1)$$

Тогда теорема о замкнутости объединения $M = \bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$ замкнутых множеств M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ превращается в простое следствие свойства (1): $\overline{M} = \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{M_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i = M \Rightarrow M$ замкнуто, и нет необходимости проводить доказательство этой теоремы [1, с. 61]. Доказательство свойства (1) можно предложить в качестве упражнения для домашнего задания, ибо к моменту изучения элементов функционального анализа студенты уже ознакомлены с применением метода математической индукции в школьном курсе математики или в других разделах вузовского курса математики, например, в математическом анализе.

Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976. - 544 с.

О СЛУЧАЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Фомин В.И. (Тамбов)

В банаховом пространстве E рассматривается уравнение

$$u^{(n)} + A_1 u^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1} u' + A_n u = f(t), \;\; 0 \leqslant t < \infty, \qquad (1)$$

где $A_i \in L(E)$, $1 \leqslant i \leqslant n$; $f(t) \in C([0,\infty); E)$. Если правая часть уравнения (1) имеет специальный вид, то, как и в скалярном случае, можно указать его частное решение, не прибегая к методу Лагранжа. Пусть $f(t) = e^{\Lambda_0 t} S_m(t)$, где $\Lambda_0 \in L(E)$, $S_m(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} s_i t^{m-i}$ – многочлен действительной переменной t с векторными коэффициентами $s_i \in E$, $0 \leqslant i \leqslant m$, $s_0 \neq \Theta$, и выполняются следующие условия: а) $A_k \Lambda_0 = \Lambda_0 A_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$; б) оператор Λ_0 не является корнем характеристического операторного многочлена $P(\Lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \Lambda^{n-k}$, где $A_0 = I$; в) оператор $P(\Lambda_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k \Lambda_0^{n-k}$ имеет ограниченный обратный. Тогда уравнение (1) имеет частное решение вида $u_* = e^{\Lambda_0 t} Q_m(t)$, где $Q_m(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} q_i t^{m-i}$, $q_0 =$

$[P(\Lambda_0)]^{-1}s_0$, $q_i = [P(\Lambda_0)]^{-1}\left[s_i - \sum\limits_{j=1}^{i} C_{m-i+j}^{j} P^{(j)}(\Lambda_0)\, q_{i-j}\right]$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $P^{(j)}(\Lambda_0) = j! \sum\limits_{k=0}^{n-j} C_{n-k}^{j} A_k \Lambda_0^{n-j-k}$, $0 \leqslant j \leqslant n$; $P^{(j)}(\Lambda_0) = 0$, $j > n$. Если оператор Λ_0 является корнем кратности r многочлена $P(\Lambda)$: в формуле для u_* нужно записать дополнительный множитель t^r.

О ЯДРАХ ПУАССОНА ДЛЯ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Ярославцева В.Я. (Липецк)

Пусть $E_{n+2}^{+} = \{x = (x', x_{n+1}, t), x' = (x_1, x_2, ..., x_n), x_{n+1} > 0, t > 0\}$. $L\left(x, D, P_{x_{n+1}}\right)$ и $M_j\left(x', D, P_{x_{n+1}}\right)$ — линейные дифференциальные операторы порядков $2m$ и m_j соответственно, в которых по переменной x_{n+1} действует оператор. $P_{x_{n+1}} = \frac{1}{sh^{2\nu} x_{n+1}} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} sh^{2\nu} x \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \nu^2$, где ν — фиксированный действительный параметр.

Рассматривается краевая задача

$$L\left(x, t, D, P_{x_{n+1}}\right) u(x) = 0, \quad x \in E_{n+1}^{+}, \tag{1}$$

$$M_j\left(x', D, P_{x_{n+1}}\right) u(x', x_{n+1}, t)\,|_{t=0} = g_j\left(x', x_{n+1}\right), \quad j = 1, 2, ..., m. \tag{2}$$

Предполагается, что дифференциальный оператор L является собственно р-эллиптическим, а операторы $M_j, j = 1, 2, ..., m$ образуют нормальную дополнительную по отношению к L систему. Функции $g_j(x', x_{n+1})$ — бесконечно дифференцируемы и имеют компактный носитель.

Теорема. Функция

$$u(x', x_{n+1}, t) = \sum_{j=1}^{m} \Phi_v \int\limits_{\infty}^{\infty} \widetilde{K}_j(x' - y, x_{n+1} - \alpha, t) \Phi_v^{-1} g_j(y, \alpha) dy d\alpha$$

является решением задачи (1) – (2) в пространстве $C_{\text{чет.},0}^{\infty,v}$, где $\widetilde{K}_j$ — четная комбинация ядер Пуассона регулярной эллиптической задачи в полупространстве, а Φ_v и Φ_v^{-1} - операторы преобразования [1].

Строятся ядра Пуассона краевой задачи (1)-(2), а также аналоги так называемых присоединённых ядер Пуассона $H_{jg}(x', x_{n+1}, t)$.

Показывается, что функции $H_{jq}(x', x_{n+1}, t)$ при $x_{n+1} > 0$ и $t \geqslant 0$ всюду, кроме начала координат, удовлетворяют неравенству

$$\left|D^k\ P^r_{x_{n+1}}\ H_{jq}\right| <$$

$$< C\left(sh^2\frac{x_{n+1}}{2}\right)^{\upsilon} \cdot \left(\left|x'\right|^2 + x^2_{n+1} + t^2\right)^{\frac{m_j+q-k-2r}{2}} \cdot \left(1 + \left|\log(P)\right|\right).$$

Здесь P обозначает точку области E^+_{n+2}, а константа С зависит от k, r, υ, q и постоянной эллиптичности.

Литература

1. Ярославцева В.Я. Операторы преобразования на полупрямой//Понтрягинские чтения –XIII. Тез. докл., Воронеж, 2002. С. 166.

НОВЫЕ ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ВЫПУКЛЫХ И ВОГНУТЫХ ОПЕРАТОРОВ

Бахтин И.А. (Воронеж)

В вещественном банаховом пространстве E с конусом K приводятся новые теоремы существования положительных неподвижных точек вогнутых и выпуклых операторов. Не предполагается, что конус $K \subset E$ обладает свойством нормальности.

1. Определение. *Положительный, монотонный, u-измеримый на конусе K оператор A называется u-вогнутым, если для любых элементов $x \in K \backslash 0$ и числа $t \in (0,1)$ существует число $\eta = \eta(x,t) > 0$, такое, что $Atx \geqslant (1+\eta)tAx$.*

Теорема 1. *Пусть*

1) u-вогнутый оператор A вполне непрерывен на конусе K;

2) существуют элементы $x_0 > 0,\ y_0 > 0$, такие, что $Ax_0 \leqslant x_0,\ Ay_0 \leqslant y_0$;

3) выполняется равенство

$$\lim_{x \in W, \|x\| \to \infty} \|x\|_u = +\infty,$$

где $\|x\|_u$ – u-норма элемента x, а W – множество положительных собственных векторов оператора A.

Тогда существует элемент $x_* > 0$, такой, что $Ax_* = x_*$.

2. Определение. *Положительный, монотонный, u-измеримый на конусе K оператор A называется u-выпуклым,* *если для любых элементов $x \in K\backslash 0$ и числа $t \in (0,1)$ существует число $\eta = \eta(x,t) > 0$, такое, что $Atx \leqslant (1-\eta)tAx$.*

Теорема 2. *Пусть*

1) u-выпуклый оператор A вполне непрерывен на конусе K;

2) существуют элементы $x_0, y_0 \in K(u)$, такие, что $Ax_0 \leqslant x_0$, $Ay_0 \geqslant y_0$, где $K(u)$ – множество элементов, соизмеримых с u;

3) множество W положительных собственных векторов оператора A образует замкнутую непрерывную ветвь бесконечной длины;

4) выполняются равенства:

$$\lim_{x\in W, \|x\|\to 0} \|x\|_u = 0; \quad \lim_{x\in W, \|x\|\to 0} \|x\|_u^* = +\infty;$$

где $\|x\|_u^* = sup\{t \geqslant 0 | x \geqslant tu\}$.

Тогда существует элемент $x_* > 0$, такой, что $Ax_* = x_*$.

Литература

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. - М.: Физматлиз, 1962. - 396 с.

О НЕКОТОРЫХ НЕСТЕПЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ[1]

Гриднев А.В. (Москва)

gridnev_a@mail.ru

Рассматривается третье уравнение Пенлеве

$$\ddot{w} = \frac{\dot{w}^2}{w} - \frac{\dot{w}}{t} + \frac{aw^2+b}{t} + cw^3 + \frac{d}{w}, \quad bd \neq 0, \tag{1}$$

где t — комплексная переменная, $w(t)$ — неизвестная функция, a, b, c и d — комплексные параметры.

Решается следующая задача.

З а д а ч а. В случае общего положения (когда все параметры a, b, c и d не равны нулю) в окрестности особой точки $t = 0$ найти все нестепенные разложения решений вида

$$w = \gamma_r t^r + \sum_s \gamma_s t^s, \quad r \in R, \quad s > r, \quad s \in \mathbf{K}, \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант N 06-01-00715)

где γ_r, γ_s — ряды по убывающим степеням $\ln t$, $\mathbf{K}$ — дискретное множество на вещественной прямой без точек накопления.

Результатом исследования является следующая теорема.

Т е о р е м а. Уравнение (1) в окрестности точки $t = 0$ имеет два семейства формальных разложений решений вида (2):

$$w = t\left[-\frac{b}{2}(\ln t)^2 + c_1 \ln t + \sum_{s=0}^{\infty} c_{-s}(\ln t)^{-s}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{2k+1} t^{2k+1},$$

где c_1 — произвольная постоянная, остальные c_{-s} однозначно определены, γ_{2k+1} — ряды по убывающим степеням $\ln t$;

$$w = \frac{1}{t}\left[\frac{2}{a}(\ln t)^{-2} + c_{-3}(\ln t)^{-3} + \sum_{s=4}^{\infty} c_{-s}(\ln t)^{-s}\right] + \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{2k+1} t^{2k+1},$$

где c_{-3} — произвольная постоянная, остальные c_{-s} однозначно определены, γ_{2k+1} — ряды по убывающим степеням $\ln t$.

Литература

1. А.Д. Брюно. Сложные разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Доклады академии наук, Т. 406, No. 6, 2006. P. 730–733.

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ КЛАССА Γ^*[1]

Иохвидов Е.И. (Воронеж)

Рассматриваются линейные операторы, действующие в пространстве Крейна H:

$$H = H_+ \oplus H_-, \quad H_\pm = P_\pm H, \quad P_\pm^2 = P_\pm^* = P_\pm \quad P_+ + P_- = I$$

с индефинитной метрикой $[x, y] = (Jx, y), \quad J = P_+ - P_-, \quad x, y \in H$.

Определение 1 *Говорят, что линейный оператор A принадлежит классу Γ, если* $\ker(P_+ + P_- A) = \{0\}$.

Для всякого оператора $A \in \Gamma$ имеет смысл преобразование Потапова-Гинзбурга $B = \delta(A) = (P_- + P_+ A)(P_+ + P_- A)^{-1}$, при этом $B \in \Gamma$.

[1]Исследование поддержано грантом РФФИ 05-01-00203

Определение 2 *Символы* $\epsilon_-(M)$ *и* $\epsilon_+(M)$ *обозначают инфимум и супремум линеала* $M \subset H$*, т.е. величины:*

$$\epsilon_-(M) = \inf\{\frac{[x,x]}{||x||^2} \mid \quad x \in M, \quad x \neq 0\},$$

$$\epsilon_+(M) = \sup\{\frac{[x,x]}{||x||^2} \mid \quad x \in M, \quad x \neq 0\}.$$

Эти величины всегда удовлетворяют условиям

$$-1 \leqslant \epsilon_-(M) \leqslant 1 \text{ и } \quad -1 \leqslant \epsilon_+(M) \leqslant 1.$$

Теорема 1 *Пусть выполнены условия:*
1) $A \in \Gamma$.
2) *Оператор* $B = \delta(A)$ *ограничен.*
3) $\epsilon_-(R_A) > \frac{||B||^2-1}{||B||^2+1} \quad (\equiv \sigma)$.
Тогда, во-первых, имеет место неравенство $\epsilon_+(D_A) + \sigma \geqslant 0$*, во-вторых, исходный оператор* A *ограничен, и при этом имеет место оценка:*

$$||A|| \leqslant \sqrt{\frac{\epsilon_+(D_A) + \sigma}{\epsilon_-(R_A) - \sigma}}.$$

Замечание 1. *Один из двух крайних случаев* $\epsilon_-(R_A) = -1$ *исключается самим условием 3. Если же* $\epsilon_-(R_A) = 1$*, то условие 3 выполняется автоматически. В общем случае* $\epsilon_-(R_A) \in (-1;1)$ *смысл условия 3 заключается в том, что норма оператора* B *не должна быть слишком большой.*

Именной указатель