9-я Санкт-Петербургская молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике

17–20 ноября 2025 г.
г. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет, Международный математический институт им. Л. Эйлера

Steklov International Mathematical Center

ОРГАНИЗАТОРЫ

- Санкт-Петербургское отделение математического института имени В.А. Стеклова РАН
- Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера
- Санкт-Петербургский государственный университет
- Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук»
- Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Минобрнауки России, грант на создание и развитие МЦМУ «Санкт-Петербургский международный математический институт имени Леонарда Эйлера» соглашения № 075–15–2025–343, № 075–15–2025–344 и грант на создание и развитие МЦМУ МИАН, соглашение № 075-15-2025-303.

АННОТАЦИИ

Многоточечное штрафование симметричного процесса Леви

Абильдаев Темирлан
ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург,
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
t.abildaev23@gmail.com

Мы рассмотрим одномерный симметричный процесс Леви $\xi(t)$, $t \geq 0$, обладающий локальным временем $L(t, x)$, и построим оператор $\mathcal{A} + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \delta(x - a_k)$, $\mu_k > 0$, где $\mathcal{A}$ – это генератор порождаемой $\xi(t)$ полугруппы, а $\delta(x - a_k)$ – дельта-функция Дирака в точке $a_k \in \mathbb{R}$. Мы покажем, что построенный оператор – это генератор C_0-полугруппы $\{U_t\}_{t \geq 0}$ в $L_2(\mathbb{R})$, действующей по формуле

$$(U_t f)(x) = \mathbf{E} f(x - \xi(t)) e^{\sum_{k=1}^{n} \mu_k L(t, x - a_k)}, \quad f \in L_2(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}),$$

и обобщим формулу Фейнмана-Каца для потенциала типа линейной комбинации дельта-функций с положительными коэффициентами.

Далее мы построим семейство штрафующих мер $\{\mathbf{Q}_{T,x}^{\mu}\}_{T \geq 0}$, определяемых формулой

$$\mathbf{Q}_{T,x}^{\mu} = \frac{e^{\sum_{k=1}^{n} \mu_k L(T, x - a_k)}}{\mathbf{E} e^{\sum_{k=1}^{n} \mu_k L(T, x - a_k)}} \, \mathbf{P}_{T,x},$$

где $\mathbf{P}_{T,x}$ – мера процесса $\xi(t)$, $t \leq T$, и покажем, что при $T \to \infty$ это семейство слабо сходится к некоторому феллеровскому процессу. Мы опишем порождаемую этим процессом полугруппу Фейнмана-Каца и приведём предельную теорему для $\xi(T)$ относительно $\mathbf{Q}_{T,x}^{\mu}$.

Оператор Шредингера с самоподобными свойствами

Андронов Николай Иванович
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
nickandronick@gmail.com

В докладе рассматривается одномерное уравнение Шрёдингера с потенциалом, заданным как бесконечная сумма дельта-функций, расположенных в точках, координаты которых задаются квадратичным полиномом от номера. Задача сводится к анализу семейства разностных уравнений, параметры которых зависят от спектрального параметра исходной задачи. Для этого семейства установлена перенормировочная формула, связывающая решения с большими номерами с решениями с номерами порядка единицы. Эта формула открывает путь к дальнейшему исследованию спектральных свойств исходного оператора.

[1]https://indico.eimi.ru/event/1948/

Вероятность невырождения критического ветвящегося процесса в случайной среде при условии фиксации значения минимума сопровождающего случайного блуждания

Анохина Мария Андреевна
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
anokhina.mary1@gmail.com

Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $\{f_y(s), y \in \mathbb{R}\}$ — семейство производящих функций. Рассмотрим $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S_0 = 0$, где $X_i = \ln f'_{\eta_i}(1)$. Ветвящимся процессом в случайной среде (ВПСС) называют последовательность $Z_0 = 1$, $Z_{n+1} = X_{n+1,1} + \dots + X_{n+1,Z_n}$. Будет рассмотрен случай арифметических случайных величин X_i с $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. В данном докладе будет получено следующее асимптотическое соотношение

$$e^{k_n}\mathbf{P}\left(Z_n > 0 \middle| \min_{i \le n} S_i = -k_n\right) \to C, \quad n \to \infty,$$

где $\{k_n\}$ — некоторая целочисленная последовательность такая, что $k_n/\sqrt{n} \to y > 0$, $k_n \to \infty$, $n \to \infty$, C — некоторая константа.

О невырождении пары ветвящихся процессов в общей случайной среде

Арапов Дмитрий Андреевич
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
dmitrii.arapov@math.msu.ru

В докладе рассматривается модель пары ветвящихся процессов $\{\boldsymbol{Z_n} = \left(Z_{n,1}, Z_{n,2}\right),\ n \in \mathbb{N}_0\}$ с общей случайной средой (ПВПСС). При фиксации последней последовательности случайных величин $\{Z_{n,1},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ и $\{Z_{n,2},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ предполагаются независимыми ветвящимися процессами в изменяющейся среде.

Эта модель имеет довольно естественную биологическую интепретацию. Мы можем представлять себе две популяции, довольно сильно изолированные друг от друга, например, бабочку махаон и павлиноглазку геркулес. Ареалы этих видов не пересекаются. Несмотря на кажущуюся автономность друг от друга, и махаон, и павлиноглазка существуют на одной планете. Процессы планетарного масштаба, например, температурный режим, являются общей “средой” для этих видов живых организмов.

ПВПСС является частным случаем многотипного ветвящегося процесса, в котором, однако, частицы одного типа могут порождать частицы другого, в нашем случае это невозможно. Такое упрощение модели позволяет изучать процесс при гораздо менее жестких условиях.

Мы будем рассматривать критическую ПВПСС $\{\boldsymbol{Z_n}\}$, то есть и процесс $\{Z_{n,1}\}$, и процесс $\{Z_{n,2}\}$ предполагаются критическими. Под невырождением процесса $\{\boldsymbol{Z_n}\}$ мы понимаем невырождение обоих типов частиц. Как и в случае ветвящегося процесса в случайной среде, оказывается, что асимптотически вероятность невырождения ПВПСС к моменту n лишь на мультипликативную константу отличается от вероятности “положительности” двумерного сопровождающего блуждания при $n \to \infty$.

При этом вопросы, связанные с асимптотическим поведением вероятности “положительности” многомерных случайных блужданий подробно исследованы В. Вахтелем и Д. Денисовым в работе [1].

[1] Denisov D., Wachtel V., *Random walks in cones revisited*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. – 2024. – Vol. 60, No. 1. – P. 126–166.

Вероятностное представление решения задачи Коши для дискретного нестационарного уравнения Шрёдингера

Байтеев Руслан Илмирович
ММИ имени Эйлера, г. Санкт-Петербург
altermapper@gmail.com

Изучается одномерное уравнение Шрёдингера на $\mathbb{Z}$, описывающее квантовую эволюцию дискретной волновой функции $u(n,t)$ с непрерывным временем. Задано начальное состояние $\varphi(n)$, и волновая функция имеет стандартную интерпретацию, $|u(n,t)|^2$ является вероятностью наблюдения свободной частицы в момент времени t в точке n. Развивается новый подход к решению эволюционного уравнения, основанный на использовании дискретных аналитических функций и симметричных случайных блужданий.

Energy-casimir метод и нелинейная устойчивость в задачах физики плазмы

Беляева Юлия Олеговна
Российский университет дружбы народов, г. Москва,
Институт прикладной математики и механики, г. Донецк
yilia-b@yandex.ru

Доклад посвящен исследованию некоторых классов стационарных решений уравнений Власова-Пуассона на нелинейную устойчивость. Данная система является моделью кинетики высокотемпературной плазмы. Energy-Casimir метод применяется для случая стационарных решений в полупространстве под действием однородного внешнего магнитного поля.

Об одной гипотезе де Бранжа

Береза Игорь Дмитриевич
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
ibereza@disroot.org

Доклад посвящён аксиоматическому описанию пространств де Бранжа. Сначала будет представлена процедура «искажения» пространств де Бранжа из специального класса, после чего с помощью данной конструкции будет опровергнута гипотеза Л. де Бранжа 1963г. о зависимости аксиомы непрерывности от остальных аксиом де Бранжа, высказанная в [1]. Доклад подготовлен по материалам статьи [2].

[1] L. de Branges, *Some Hilbert spaces of analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – Vol. 106. – P. 445–468.

[2] Bereza I., *On a conjecture of de Branges*, arXiv:2507.12576.

Смешанные объёмы выпуклых оболочек случайных процессов

Болотин Артём Сергеевич
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
bolotin2003@yandex.ru

Пусть $K_1, K_2, ..., K_s$ — выпуклые тела в пространстве $\mathbb{R}^d$. Минковский доказал, что d-мерный объём $\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + ... + \lambda_s K_s)$ при $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s \geqslant 0$ является однородным многочленом степени d:

$$\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + ... + \lambda_s K_s) = \sum_{i_1=1}^{s} ... \sum_{i_d=1}^{s} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_d} V_d(K_{i_1}, ..., K_{i_d}),$$

где функции $V_d(K_{i_1}, ..., K_{i_d})$ считаются симметричными и называются смешанными объёмами.

Мы рассмотрим выпуклые оболочки независимых случайных блужданий с перестановочными приращениями и вычислим их смешанный объём. В качестве следствия получим аналогичный результат для независимых симметричных устойчивых процессов Леви.

Синус-процесс и гауссов мультипликативный хаос

Буфетов Александр Игоревич
Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, г. Москва
bufetov@mi-ras.ru

Мультипликативный хаос рождается в работах Андрея Николаевича Колмогорова: 17 дек. 1940 г. Колмогоров подает в ДАН СССР краткое сообщение "О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении". Через несколько дней, 28 декабря 1940 г., Колмогоров подает в ДАН СССР знаменитую заметку "Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса". Теорию Колмогорова однородной изотропной турбулентности подверг критике Ландау, указавший на необходимость учета сильно хаотического поведения диссипации энергии в турбулентном потоке. В 1961 году в Люмини Колмогоров представил доклад "Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса где ответил на то возражение Ландау, что (в формулировке самого Колмогорова) "изменчивость диссипации энергии должна неограниченно возрастать". Колмогоров и Обухов сформулировали новую гипотезу — о "нормальности распределения логарифма"диссипации энергии в турбулентном потоке.

Лог-нормальной гипотезой Колмогорова и Обухова – сформулированной на физическом уровне строгости – вдохновлены работы Мандельброта о мультипликативных каскадах, а, вслед за ними, Перьера и Жана-Пьера Кахана, давшего теорему существования гауссова мультипликативного хаоса.

Оказалось, что построенный Каханом гауссов мультипликативный хаос возникает в самых разных задачах и, в том числе, как заметил это санкт-петербургский физик Ян Валерьевич Федоров, в задачах теории случайных матриц. Сходимостью к гауссову мультипликативному хаосу в различных матричных моделях занимались многие математики, в частности (список далеко не полон) — Berestycki, Chhaibi, Lambert, , Nikeghbali, Ostrovsky, Simm, Webb.

В лекциях мы начнем с краткого рассмотрения теории Колмогорова и лог-нормальной гипотезы Колмогорова-Обухова, продолжим обсуждением теории Мандельброта-Перьера-Кахана, и перейдем к рассмотрению сходимости к гауссову мультипликативному хаосу случайных голоморфных функций – стохастических произведений Эйлера, отвечающих синус-процессу.

Времена встречи, коалесценции и консенсуса случайных блужданий на случайных графах

Васильев Роман Алексеевич
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
r.a.vasiliev1998@gmail.com

Работа посвящена исследованию времён встречи, коалесценции и консенсуса случайных блужданий на неориентированных случайных графах. Рассматриваются три класса моделей: случайные d-регулярные графы, графы Эрёдша–Рэни $G(n, p)$ и конфигурационные модели со степенными распределениями степеней. Для регулярных и $G(n, p)$ графов доказан экспоненциальный предел для нормированного времени встречи двух независимых блужданий, стартующих из стационарного распределения:

$$\frac{T_{\text{meet}}}{E[T_{\text{meet}}]} \xrightarrow{d} \text{Exp}(1), \quad E[T_{\text{meet}}] \sim \frac{n}{d}.$$

В случае тяжёлых хвостов показано ускорение $E[T_{\text{meet}}] = o(n)$. Из полученных результатов следуют оценки для времени коалесценции и консенсуса: $E[T_{\text{coal}}] \sim \frac{n}{d} \log m$ и $E[T_{\text{cons}}] \sim \frac{n}{d} \log n$. Сравнение с известными работами (Avena et al., Benjamini–Kozma–Wormald, Oliveira) показывает согласование с ранее установленными порядками и уточнение асимптотик для неориентированных моделей.

[1] Avena L., Capannoli F., Hazra R. S., Quattropani M., *Meeting, coalescence and consensus time on random directed graphs*, 2024.

[2] Benjamini I., Kozma G., Wormald N., *The mixing time of the giant component of a random graph*, 2016.

[3] Oliveira R. I., *Mean field conditions for coalescing random walks*, 2013.

Центральная предельная теорема для кулоновского газа при больших температурах

Горбунов Сергей Михайлович
МФТИ, г. Москва

Круговым β-ансамблем называют следующую меру на n-точечных подмножествах единичной окружности

$$d\mathbb{P}^n_\beta(\theta_1,\ldots,\theta_n) = Z^{-1}\prod_{1\le m<l\le n}\left|e^{i\theta_m}-e^{i\theta_l}\right|^\beta\prod_{k=1}^n d\theta_k,\quad \theta_j\in(-\pi,\pi).$$

С физической точки зрения данная мера представляет собой распределение Гиббса системы частиц, взаимодействующих с парным потенциалом $U(\theta_1,\theta_2) = -\ln\left|e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}\right|$ при обратной температуре β. Килип и Стоичу показали [5], что при скейлинге углов $\theta_j\to n\theta_j$ и устремлении $n\to\infty$ данные меры имеют предел — синус-β процесс $\mathbb{P}_\beta$ — меру на бесконечных локально конечных подмножествах прямой.

Теорема. *Пусть $\beta\le 2$. Пусть функция f на действительной оси и ее производная квадратично-интегрируемы. Тогда сумма $\sum_{x\in X} f(x/R)$ значений функции в точках случайного подмножества $X\sim\mathbb{P}_\beta$ за вычетом математического ожидания сходится к гауссовому распределению при $R\to\infty$. Если функция действительно-значная, то сходимость имеет место по метрике Колмогорова-Смирнова со скоростью $1/\sqrt{\ln R}$.*

При $\beta=2$ круговой ансамбль совпадает с радиальной частью меры Хаара на унитарной группе. Соответствующий предельный процесс $\mathbb{P}_2$ является синус-процессом Дайсона. При $\beta=1,4$ точечные процессы $\mathbb{P}^n_\beta$, $\mathbb{P}_\beta$ являются пфаффианными. В общем случае, однако, не существует выражений для корреляционных функций синус-β процесса.

В 1970 году Генри Джек, рассматривая матричные интегралы, ввел семейство симметрических функций [3], параметризуемых разбиениями и параметром β. Макдональд позже дал их алгебро-комбинаторное описание [7], вывел для них аналог формулы Коши и показал их ортогональность относительно кругового β-ансамбля. Цзян и Мацумото использовали [4] результаты Макдональда для поиска точных оценок на моменты сумм степеней координат частиц под круговым β-ансамблем. Наш метод продолжает их рассуждения. В частности, следуя Бородину и Окунькову [1], мы получаем разложение ожиданий мультипликативных функционалов в многочлены Джека, обобщающее теорему Гесселя [2], и используем формулу для математического ожидания размера диаграммы по мере Джека. Полученная оценка выдерживает скейлинговый предел Килипа и Стоичу.

Удивительным образом требование на температуру $\beta\le 2$ следует из экспоненциального роста норм многочленов Джека при $\beta>2$. Это комбинаторное проявление фазового перехода исследуемых мер при $\beta=2$, замеченного еще Валко и Вирагом [8]. Другое его проявление, предположенное Ламбертом [6], это достаточность конечности 1/2-соболевской полунормы для выполнения обобщения теоремы Сеге лишь при $\beta\le 2$. В конструкции Валко и Вирага [8] синус-β процесса спектром случайного дираковского оператора значение $\beta=2$ разделяет случаи предельной точки и предельной окружности соответствующего оператора.

[1] Borodin A., Okounkov A., *A Fredholm determinant formula for Toeplitz determinants*, Integral Equations Operator Theory – 2000. – Vol. 37. – P. 386–396.

[2] Gessel I. M., *Symmetric functions and P-recursiveness*, J. Comb. Theory, Ser. A – 1990. – Vol. 53. – P. 257–285.

[3] Jack H., *A class of symmetric polynomials with a parameter*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A – 1970. – Vol. 69. – P. 1–18.

[4] Jiang T., Matsumoto S., *Moments of traces of circular beta-ensembles*, Ann. Probab. – 2015. – Vol. 43. – P. 3279–3336.

[5] Killip R., Stoiciu M., *Eigenvalue statistics for CMV matrices: From Poisson to clock via random matrix ensembles*, Duke Math. J. – 2009. – Vol. 146. – P. 361–399.

[6] Lambert G., *Mesoscopic central limit theorem for the circular β-ensembles and applications*, Electron. J. Probab. – 2021. – Vol. 26. – P. 1–33.

[7] Macdonald I. G., *Symmetric functions and Hall polynomials*, The Clarendon Press, 2nd ed.(1995).

[8] Valkó B., Virág B., *Continuum limits of random matrices and the Brownian carousel*, Invent. Math. – 2009. – Vol. 177. – P. 463–508.

Решение спектральной задачи модели Кронига-Пенни с помощью алгоритма Шура

Губкин Павел Васильевич
ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург,
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
gubkinpavel@pdmi.ras.ru

Релятивистская модель Кронига-Пенни описывает одномерный оператор Дирака $\mathcal{D}_Q$ на полупрямой $\mathbb{R}_+$ вида $\mathcal{D}_Q : X \mapsto JX' + QX$, где постоянная матрица J – это квадратный корень из минус единичной матрицы, а потенциал $Q = \sum_{k\geq 0} Q_k \delta_{hk}$ является мерой с носителем на решетке $h\mathbb{Z}_+$ при некотором $h > 0$. Как и в более классических случаях, например, $Q \in L^2(\mathbb{R}_+)$, для такого оператора Дирака можно определить функцию Вейля m_Q и соответствующую функцию Шура $f_Q = \frac{m_Q - i}{m_Q + i}$. Две следующие теоремы позволяют свести спектральную теорию модели Кронига-Пенни к теории ортогональных многочленов на единичной окружности.

Теорема. *Нагрузка Q_0 потенциала Q в нуле выражается через значение $f_Q(\infty) = \lim_{y\to\infty} f_Q(iy)$.*

Теорема. *Функции Шура f_Q и f_{Q_h}, соответствующие потенциалам $Q = \sum_{k\geq 0} Q_k \delta_{hk}$ и $Q_h = \sum_{k\geq 0} Q_{k+1} \delta_{hk}$ связаны шагом классического алгоритма Шура*

$$e^{2ihz} f_{Q_h}(z) = \frac{f_Q(z) - f_Q(\infty)}{1 - \overline{f_Q(\infty)} f_Q(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}_+.$$

В докладе будет показано, как с помощью этого сведения получить явную двустороннюю оценку устойчивости для отображения $Q \mapsto m_Q$. Доклад основан на совместной работе [1] с Романом Бессоновым.

[1] Bessonov R., Gubkin P., *Direct and inverse spectral continuity for Dirac operators*, arXiv:2505.00485.

Пространственно-временная структура простого симметричного ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}$

Гусаров Александр Сергеевич
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
aleksandr.gusarov@math.msu.ru

Рассматривается простое симметричное ветвящиеся случайное блуждание с непрерывным временем по одномерной решетке $\mathbb{Z}$. В этом случае случайное блуждание описывается разностным лапласианом с коэффициентом диффузии $\varkappa > 0$. Также предполагается, что единственный источник ветвления (т. е. точка, в которой частицы могут размножаться и гибнуть) находится в нуле, и его интенсивность (т. е. первая производная производящей функции потомков) предполагается равной $0 < \beta < \infty$. В начальный момент времени $t = 0$ на решетке находится одна частица в точке x. Результаты для численностей частиц в некоторой фиксированной точке $y \in \mathbb{Z}$ при $t \to \infty$ хорошо известны, см., например в [1] и [2]. В докладе показано, как в явном виде установить изменение поведения численностей частиц в зависимости от степенного соотношения между временной и пространственной координатами одномерной решетки.

[1] Яровая Е. Б., *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, МЦНМО (2025).

[2] Смородина Н. В., Яровая Е. Б., *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий*, Теория вероятн. и ее примен. – 2023. – Т. 68, № 4. – С. 779–795.

Гладкость минимальных локально вогнутых функций

Добронравов Егор Петрович
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
yegordobronravov@mail.ru

В теории уравнений в частных производных интересен вопрос о решениях вырожденного уравнения Монжа-Ампера. Вогнутыми решениями вырожденного уравнения Монжа-Ампера являются минимальные локально вогнутые функции. Минимальные локально вогнутые функции так же возникают как функции оптимизирующие интегральные функционалы в теории функций Беллмана. В связи с этим интересен вопрос о структуре и гладкости минимальных локально вогнутых функций. Существенным ограничением существующих работ по данному вопросу — отсутствие свободной границы — куска границы, на котором граничное значение не задаётся, а так же предполагали существование гладкой строго вогнутой мажоранты. Мы разберём, что даже в случае отсутствия данных ограничений минимальная локально вогнутая функция $C^{1,1}$ гладкая внутри области и вплоть до жёсткой границы, а так же обсудим, насколько гладкой может быть минимальная локально вогнутая функция вплоть до свободной границы.

Размерность мер с малым преобразованием Фурье

Добронравов Никита Петрович
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
dobronravov1999@mail.ru

Принцип неопределённости в математическом анализе — это совокупность фактов, утверждающих: функция и её преобразование Фурье не могут быть одновременно малыми. Одним из вариантов принципа неопределённости является теорема о том, что не существует ненулевой функции в $L_p(\mathbb{R}^d)$, если носитель её преобразования Фурье это множество конечной α-хаусдорфовой меры с $\alpha < 2d/p$. Мы доказали, что этот принцип не выполняется в предельном случае. Мы доказали, что для любых $2 < p < \infty$ и $d \in \mathbb{N}$ существует вероятностная мера с компактным носителем μ в $\mathbb{R}^d$, такая, что $\mathcal{H}_{\frac{2d}{p}}(supp(\mu)) = 0$ и $\hat{\mu} \in L_p(\mathbb{R}^d)$.

Здесь $\mathcal{H}_\alpha$ — хаусдорфова мера размерности α.

Стохастическая динамика вблизи критических точек в стохастическом градиентном спуске

Дудукалов Дмитрий Витальевич
Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
d.dudukalov@g.nsu.ru

Доклад посвящён предельным теоремам для аддитивного стохастического градиентного спуска при стремлении шага к нулю. Будут выделены условия, при которых имеет место сходимость (почти наверное или по вероятности) к минимуму функции, из области притяжения которого был запущен процесс, а также условия, при которых такой сходимости не наблюдается. Кроме того, будет рассмотрена стохастическая динамика в случае запуска градиентного спуска из окрестности негладкого максимума.

Асимптотический анализ некоторых интегралов с сильно вырождающимися знаменателями

Елохин Алексей Анатольевич
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Москва,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва
aelokhin@hse.ru

В задаче строго обоснования теории теплопроводности Пайерлса возникает необходимость получения асимптотики для интегралов, имеющих вид $\int \frac{F dx}{\Omega^2+\nu^2}$, при стремлении параметра ν к нулю. Существование такой асимптотики определяется свойствами функции Ω, в частности её поведением в окрестности своих критических точек. В своем докладе я планирую в общих чертах изложить схему получения такой асимптотики для случая, когда критические точки Ω вырождены, а также обсудить связанные с этим трудности.

[1] Elokhin A., *Asymptotics for a class of singular integrals of quotients with highly degenerate denominators*, arXiv:2509.21604.

О ветвящихся случайных блужданиях в однородных и неоднородных случайных средах

Ивлев Олег Евгеньевич
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
`olivlegerr@gmail.com`

Рассматриваются две модели непрерывных по времени симметричных ветвящихся случайных блужданий по многомерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$ в случайных средах. В первой модели представлена однородная ветвящаяся среда, где интенсивности гибели и деления частиц в каждой $x \in \mathbb{Z}^d$ определяются парой неотрицательных случайных величин $(\xi^-(x) = \xi^-(x,\omega), \xi^+(x) = \xi^+(x,\omega))$, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Таким образом, среда (т.е. набор характеристик ветвления в источниках) в первой модели представляет собой совокупность пар случайных величин $(\xi^-(x), \xi^+(x))$, где $x \in \mathbb{Z}^d$. Будем предполагать, что пары $(\xi^-(x), \xi^+(x))$ независимы и одинаково распределены. Математическое ожидание относительно меры $\mathcal{P}$ будем обозначать $\langle\cdot\rangle$. Во второй модели изучается неоднородная ветвящаяся среда, которая определяется единственной парой неотрицательных случайных величин $(\xi^-(0), \xi^+(0))$, задающими интенсивности гибели и деления частиц в нуле соответственно. Цель работы — изучение так называемых "отоженных" моментов $\langle m_n^p\rangle$, $p \geq 1$ локальных и общих численностей частиц для обеих моделей. Получены соответствующие асимптотики для моментов, подтверждающие гипотезу о их виде, выдвинутую в работе [1].

[1] Yarovaya E., *Symmetric branching walks in homogeneous and non homogeneous random environment*, Communications in Statistics-Simulation and Computation – 2012. – Vol. 41, No. 7. – P. 1232–1249.

[2] Albeverio S. et al., *Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment*, Markov Process. Relat. Fields – 2000. – Vol. 6, No. 4. – P. 473–516.

Детерминантные процессы и интерполяция функций по значениям в точках случайной конфигурации

Клименко Алексей Владимирович
Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, г. Москва,
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Москва
`klimenko@mi-ras.ru`

Доклад основан на совместной работе с А. А. Боричевым, А. И. Буфетовым и Ж. Лином.

Детерминантные процессы — это класс случайных точечных полей, то есть вероятностных мер на множестве дискретных подмножеств (их называют конфигурациями) некоторого фазового пространства E, выделяемый особым видом корреляционных функций. Детерминантный процесс может быть построен по сжимающему оператору на пространстве $L^2(E)$. В большинстве известных примеров этот оператор является проектором на некоторое подпространство $H \subset L^2(E)$, причём это подпространство состоит из достаточно регулярных функций, так что корректно определены значения функции в каждой точке пространства E. Тогда можно связать детерминантный процесс (случайную конфигурацию X) с пространством H вопросом об интерполяции функций: определяется ли функция $f \in H$ однозначно по своим значениям в точках (почти любой) конфигурации X? Обсуждению этого вопроса и будет посвящён доклад.

Баланс сил как механизм формирования сообществ в случайных графах

Кобзев Иван Сергеевич
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
kobzev.cmc@yandex.ru

Экспоненциальные модели случайных графов (ERGM) часто страдают от вырожденности при моделировании сетей с сообществами, приводя к формированию либо разреженного графа, либо одной сверхплотной компоненты.

В докладе предлагается механизм, объясняющий спонтанное возникновение сообществ как результат конкуренции двух сил: локального притяжения, формирующего плотные группы, и стабилизирующего отталкивания, препятствующего их слиянию. Этот принцип исследуется на примере минимальной ERGM, где притяжение моделируется через поощрение треугольников, а отталкивание — через штраф за пути длины три.

Формулируется основная теорема о фазовом переходе к состоянию с несколькими стабильными сообществами. Обсуждаются ключевые идеи доказательства и приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие теоретические выводы.

Стационарный частично асимметричный простой процесс исключения через призму одномерных магнитных случайных блужданий: фазовые переходы и смежные аспекты

Коваленко Елизавета Дмитриевна
МФТИ, г. Москва
kovalenko.elizavebeth@gmail.com

Рассматривается модель частично асимметричного простого процесса исключений - PASEP. Из матричного анзаца для стационарного состояния получена алгебра, представляющая собой q-деформацию матричной алгебры полностью асимметричного простого процесса исключений (TASEP). Стационарное решение может быть выражено через q-полиномы Эрмита, допускающие интерпретацию в терминах магнитных случайных блужданий. Ожидается, что фазовый переход в модели PASEP будет соответствовать локализации магнитных случайных блужданий на границе.

[1] Derrida B., Evans M. R., Hakim V., Pasquier V., *Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation*, J. Phys. A: Math. Gen., 1493-1517 (1993).

[2] Valov A., Gorsky A., Nechaev S., *Equilibrium mean-field-like statistical models with KPZ scaling*, Phys. Part. Nucl. – 2021. – Vol. 52, No. 2. – P. 185–201.

[3] Koekoek R., Lesky P. A., Swarttouw R. F., *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer, (2010).

Вероятностно-статистические свойства случайного графа с независимыми весами вершин

Котова Анна Александровна
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
kotann2710@mail.ru

В работе исследуется модель случайного графа, построенного по следующему принципу. Каждой вершине присваивается случайный вес w_i, где w_i — независимые одинаково распределённые случайные величины. Затем, когда веса вершин уже зафиксированы, независимо между каждой парой вершин i, j проводится ребро с вероятностью $f(w_i, w_j)$, где f — заранее выбранная функция (см. [1], [2]).

Для данной модели получены предельные теоремы для распределения степеней вершин и в случае билинейной функции ребра f построены статистические оценки функции распределения весов вершин.

[1] Caldarelli G., Capocci A., Rios P., Muñoz M., *Scale-free networks from varying vertex intrinsic fitness*, Phys. Rev. Lett. – 2002. – Vol. 89, No. 25., 258702.

[2] Stegehuis C., Zwart B., *Scale-free graphs with many edges*, Electron. Commun. Probab. – 2023. – Vol. 28. – P. 1–11.

О методе Л. В. Фирсова определения длины аттического стадия

Краковский Михаил Алексеевич
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
krakovskiyma@my.msu.ru

Работа посвящена статистическому анализу метода Л. В. Фирсова определения длины стадия – базовой единицы расстояний, применявшейся античными географами. Метод Фирсова был подвергнут критике Engels'om, указавшим на существование "больших выбросов" в данных. Наша цель— статистическая проверка гипотезы Л. В. Фирсова о существовании устойчивой меры длины, приблизительно равной 157–158 м, которая могла быть принята в эллинистической научной традиции, с использованием критерия Стьюдента и корреляционного анализа. Полученные результаты подтверждают точность метода Фирсова.

Связь структуры спектра эволюционного оператора ветвящегося блуждания по $\mathbb{Z}$ с конфигурацией источников ветвления

Кротов Михаил Даниилович
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
mikhail.krotov@math.msu.ru

Рассматривается непрерывное по времени ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) по одномерной решетке $\mathbb{Z}$. В начальный момент времени $t = 0$ в произвольной точке $\mathbb{Z}$

имеется одна частица. Детальный подход к описанию моделей ВСБ см., напр., в [1]. Нами рассматриваются конфигурации конечного числа источников ветвления, т.е. таких точек на $\mathbb{Z}$, в которых частицы могут производить конечное число потомков или гибнуть. Предполагается равная интенсивность ветвления частиц в источниках ветвления. Исследуется надкритическое ВСБ, которое характеризуется экспоненциальным ростом численностей частиц в каждой точке решетки. Для него верны предельные теоремы о сходимости нормированных численностей частиц почти наверное, см. [2]. Фазовые переходы в надкритическом ВСБ определяются структурой дискретного положительного спектра эволюционного оператора, т.е. оператора, возникающего в правой части уравнения, описывающего эволюцию первых моментов численностей частиц, см. [3]. В работе изучаются условия существования положительных изолированных собственных значений, а также их поведение в зависимости от некоторых конфигураций источников ветвления и их интенсивностей. В отличие от аналогичных моделей ВСБ по многомерным решеткам, для ВСБ по $\mathbb{Z}$ вычисления представлены в явном виде, что значительно облегчает возможность применения методов численного моделирования.

[1] Яровая Е. Б., *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, Центр прикл. исслед. мех.-матем. ф-та МГУ, М., 104с. (2007).

[2] Смородина Н. В., Яровая Е. Б., *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий*, Теория вероятн. и ее примен. – 2023. – Т. 68, № 4. – С. 779–795.

[3] Яровая Е. Б., *Спектральная асимптотика надкритического ветвящегося случайного блуждания*, Теория вероятн. и ее примен. – 2017. – Т. 62, № 3. – С. 518–541.

Средние расстояния между случайными точками внутри и на границе выпуклого тела

Лотников Алексей Сергеевич
ММИ имени Эйлера, г. Санкт-Петербург,
ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург
alex.lotnikov@gmail.com

В 2019 году А.С. Тарасов и Д.Н. Запорожец выдвинули гипотезу, согласно которой среднее расстояние между двумя случайными точками на границе выпуклого тела не меньше среднего расстояния между двумя случайными точками внутри него. В докладе будет рассмотрен частный случай этой гипотезы для центрально-симметричных плоских тел. Будут представлены полученные в этом направлении результаты, включая точные соотношения между средними расстояниями для описанных фигур, которые являются аналогами формулы Кингмана, связывающей средние расстояния между внутренними точками с длиной случайной хорды. В заключение будут обсуждаться возможные пути ослабления исходной гипотезы для произвольных плоских тел.

[1] Kingman J., *Random secants of a convex body*, J. Appl. Probab. – 1969. – Vol. 6, No. 3. – P. 660–672.

[2] Moseeva T., *Random sections of convex bodies*, Zap. Nauchn. Semin. POMI – 2019. – Vol. 486. – P. 190–199.

[3] Bonnet G., Gusakova A., Thäle C., Zaporozhets D., *Sharp inequalities for the mean distance of random points in convex bodies*, Adv. Math., 326, (2021).

[4] Gorshkov A., Nikitin I., *Mean distance between random points on the boundary of a convex figure*, J. Math. Sci. – 2024. – Vol. 286, No. 5. – P. 798–806.

Математические основы фильтра Калмана

Максимов Владислав Владимирович
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
vladislav.maksimov@math.msu.ru

Фильтр Калмана, безусловно, является одним из самых важных открытий в области прикладной математики в прошлом веке. Про него написано множество инженерных книг, но не так много именно математических. Мы рассмотрим строгую математическую постановку задачи и докажем теорему о существовании и единственности решения задачи оптимального оценивания с помощью аппарата матричнозначных скалярных произведений. Если останется время, то мы обсудим вопросы эффективной численной реализации алгоритма фильтрации.

[1] Kailath T., Sayed A. H. and Hassibi B., *Linear Estimation*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (2000).

[2] https://github.com/rlabbe/Kalman-and-Bayesian-Filters-in-Python

[3] Матасов А.И., *Основы теории фильтра Калмана.*

О законе повторного логарифма для случайных блужданий по многомерной решётке

Низамова Элина Ильсуровна
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
elina.nizamova@math.msu.ru

В работе устанавливается функциональный закон повторного логарифма для симметричного непрерывного по времени случайного блуждания по многомерной решетке. Описание модели случайного блуждания с конечной дисперсией скачков см., напр., в [2]. Нами данный закон доказан в чуть более сильном предположении, чем существование конечной дисперсии скачков случайного блуждания, а, именно, при существовании момента порядка $2 + \epsilon$, $\epsilon > 0$. При доказательстве основного результата используются функциональные законы повторного логарифма для дискретных случайных блужданий и винеровского процесса в сочетании с теоремой о сильной аппроксимации винеровским процессом из [1] и [3]. Предложенный подход позволил преодолеть трудности, возникающие при переходе от дискретного времени к непрерывному. Основной результат является обобщением классического закона повторного логарифма для непрерывных по времени случайных блужданий.

[1] Булинский А. В., *Новый вариант функционального закона повторного логарифма*, Теория вероятн. и ее примен. – 1980. – Т. 25, № 3. – С. 502–512.

[2] Яровая Е. Б., *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, Центр прикл. исслед. мех.-матем. ф-та МГУ, М. (2007).

[3] Bashtova E., Shashkin A., *Strong Gaussian approximation for cumulative processes*, Stoch. Proc. Appl. – 2022. – Vol. 150. – P. 1–18.

О минимальной интегральной энергии мажорант винеровского процесса

Никитин Сергей Евгеньевич
ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург
nikitin97156@mail.ru

В докладе рассматривается асимптотическое поведение (на длинных интервалах времени) минимальной интегральной энергии

$$|h|_T^{\psi} := \int_0^T \psi(h'(t))\mathrm{d}t$$

для мажорант винеровского процесса $W(\cdot)$, удовлетворяющих ограничениям $h(0) = r$, $h(t) \geq W(t), 0 \leq t \leq T$.

Результаты значительно обобщают асимптотические оценки, полученные ранее для случая кинетической энергии $\psi(u) = u^2$, причём оказывается, что этот случай, где минимальная энергия растёт логарифмически, является пограничным между двумя другими режимами.

Мартингальные преобразования и минимальные бивогнутые функции

Новиков Михаил Игоревич
ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург,
Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №24-71-10011
Novikov.3.14@yandex.ru

Доклад будет посвящен точным оценкам математического ожидания величины $f(\psi_\infty)$, где f — произвольная функция, а ψ_∞, опуская детали, можно описать, как предельное значение мартингального преобразования индикатора события. Мы обсудим, как такого рода задача может быть полностью сведена к вычислению минимальной бивогнутой функции, расскажем про связь с пространством BMO и приведём примеры конкретных неравенств, которые можно получить таким образом. В качестве основного результата будет представлен точный критерий минимальности бивогнутой функции, заданной в полосе $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x - y| \leq 1\}$.

Финальный продукт случайной рекуррентной последовательности

Оберган Фёдор Владимирович
Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва
oberganfedor@mail.ru

Рассмотрим модель случайной рекуррентной последовательности $(Y_n,\ n \geq 0)$, которая задается соотношением $Y_{n+1} = A_nY_n + B_n$, где коэффициенты A_n – положительные независимые одинаково распределенные случайные величины, а B_n может зависеть от $(A_k, B_k,\ 0 \leq k < n)$ при любом $n > 0$. Эта модель была введена и активно исследовалась А.В. Шкляевым ([1]). Изучение подобных последовательностей вызывает интерес, поскольку некоторые типы ветвящихся процессов, такие как ветвящийся процесс в случайной среде с иммиграцией и без, двуполый ветвящийся процесс в случайной среде, представимы в виде таких последовательностей. Вероятности больших уклонений для таких ветвящихся процессов в случайной среде исследовались с помощью случайных рекуррентных последовательностей в [2] и [3]. В докладе будет представлена полученная автором теорема о больших уклонениях для n-ой частичной суммы U_n ряда, членами которого являются элементы случайной рекуррентной последовательности.

Также в докладе будут рассмотрены модели финальных продуктов случайной рекуррентной последовательности. Отметим, что для ветвящихся процессов финальный продукт исследовался в [4]. Пусть $(Y_n,\ n \geq 0)$ – определенная выше целочисленная, неотрицательная рекуррентная последовательность, а $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, которую назовем случайной средой. При фиксации среды рассмотрим последовательность независимых величин $C_{i,j}$, распределенных согласно g_{ζ_i}, где $\{g_y(s),\ y \in \mathbb{R}\}$ – некоторое семейство вероятностных производящих функций. Потребуем также, чтобы при любом фиксированном $k \geq 0$ случайные величины $\big(C_{k+1,i},\ i > 0\big)$ не зависели от $\big(Y_j,\ j \leq k\big)$. Локальным финальным продуктом случайной рекуррентной последовательности $(Y_k,\ k \geq 0)$ при фиксированном $n \geq 0$ назовем случайную величину $L_n = \sum_{i=1}^{Y_n} C_{n+1,i}$, а случайную величину $F_n = \sum_{m=0}^{n} L_m$ назовем общим финальным продуктом при фиксированном $n \geq 0$.

Автором будут представлены теоремы о больших уклонениях для финальных продуктов L_n и F_n, которые позволяют исследовать предельное поведение не только самих ветвящихся процессов, но и некоторых аддитивных функционалов от них. Интерпретация полученных результатов и примеры их применения к ветвящимся процессам в случайной среде также будут отражены в докладе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 24-11-00037) в Математическом институте имени В.А. Стеклова Российской академии наук.

[1] Шкляев А. В., *Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. I*, Дискрет. матем. – 2019. – Т. 31, № 4. – С. 102–115.

[2] Шкляев А. В., *Большие уклонения ветвящегося процесса в случайной среде. II*, Дискрет. матем. – 2020. – Т. 32, № 1. – С. 135–156.

[3] Шкляев А. В., *Большие уклонения ветвящегося процесса с частицами двух полов в случайной среде*, Дискрет. матем. – 2023. – Т. 35, № 3. – С. 125–142.

[4] Ватутин В. А., *Системы поллинга и многотипные ветвящиеся процессы в случайной среде с финальным продуктом*, Теория вероятн. и ее примен. – 2010. – Т. 55, № 4. – С. 644–679.

Динамическое построение GFF на графе

Панов Даниил Романович, Мозоляко Павел Александрович
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
panovdan2003@gmail.com

Около 13 лет назад Х. Хеденмальм и П. Ниеминен опубликовали статью [1], в которой динамически построили гауссовское свободное поле на областях комплексной плоскости из белого шума при помощи вариационной формулы Адамара. Мы покажем, что аналогичный результат можно получить и в дискретном контексте, на графах, при этом будет получен дискретный аналог формулы Адамара. Как и в непрерывном случае, эта конструкция дает удобное представление гауссовского поля, из которого легко получаются некоторые его известные свойства.

[1] Hedenmalm H., Nieminen P. J., *The Gaussian free field and Hadamard's variational formula*, Probab. Theory Relat. Fields – 2014. – Vol. 159. – P. 61–73.

Универсальные локально–линейные ядерные оценки для производной регрессионной функции

Петренко Сергей Сергеевич
Новосибирский Государственный Универститет, г. Новосибирск
s.petrenko@g.nsu.ru

Рассматривается задача непараметрической регрессии, состоящая в оценивании производной регрессионной функции, когда значения регрессионной функции с точностью до случайных погрешностей наблюдаются в некотором известном наборе детерминированных или случайных точек (наборе регрессоров). Решению этой задачи, в том числе методами ядерного сглаживания, посвящена обширная литература. В докладе будут приведены условия состоятельности и ассимптотической нормальности нового класса локально-линейных ядерных оценок, при этом используется более общее и обладающее рядом преимуществ условие на регрессоры, чем известные ранее в этой задаче.

Отметим, что в работах предшественников модели с детерминированными или случайными регрессорами рассматриваются отдельно. При этом в первом случае относительно регрессоров требуется некоторое условие регулярного заполнения области задания регрессионной функции, а во втором – та или иная форма слабой зависимости регрессоров. В докладе набор регрессоров представляет собой случайные величины в схеме серий, а в качестве параметра серии выступает объем наблюдений. Последнее позволяет включить в рассмотрение в качестве частного случая и модели с детерминированными регрессорами. При изучении асимптотических свойств новой ядерной оценки относительно набора регрессоров требуется лишь, чтобы эти величины с высокой вероятностью образовывали измельчающееся разбиение области задания регрессионной функции. Данное условие в терминах плотных данных является по существу необходимым для восстановления регрессионной функции и ее производных. Оно универсально относительно стохастической природы регрессоров и позволяет в едином подходе рассматривать модели с детерминированными и случайными регрессорами, но без требования регулярности или слабой зависимости. Наконец, данное простое и наглядное условие позволяет оценить интересующую нас функцию без использования информации и характере зависимости регрессоров, что особенно важно для практических приложений.

Метод обрыва степенного ряда для SIS-модели с различными скоростями миграции восприимчивых и инфицированных

Подолин Дмитрий Алексеевич
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Москва
`d-podolin@mail.ru`

Рассмотрим следующую модификацию SIS-модели распространения заболевания:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + V\frac{\partial S}{\partial x} = -\beta SI + \gamma I, \quad \frac{\partial I}{\partial t} + U\frac{\partial I}{\partial x} = \beta SI - \gamma I. \tag{1}$$

В системе (1) $S(x,t)$ представляет линейную плотность восприимчивых к заболеванию, а $I(x,t)$ – линейную плотность инфицированных. В момент времени $t = 0$, восприимчивые начинают мигрировать вдоль оси x с постоянной скоростью V, а инфицированные – в том же направлении с постоянной скоростью U. Естественно предположить, что восприимчивые перемещаются быстрее инфицированных, поэтому $V > U$.

Используя безразмерные переменные, получаем нормированную систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{x}} = -\bar{S}\bar{I} + \bar{I} \\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{t}} + \bar{U}\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{x}} = \bar{S}\bar{I} - \bar{I} \end{cases}, \quad \bar{U} = \frac{U}{V} < 1. \tag{2}$$

Для решения задачи Коши применяем метод обрыва степенного ряда. Решения ищутся в виде степенных рядов:

$$S(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(t)x^k, \quad I(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(t)x^k. \tag{3}$$

Подставляя ряды (3) в систему (2) и обрывая на порядке N, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $S_k(t)$ и $I_k(t)$.

Для проверки точности используем точное решение типа Бейтмана:

$$I(x,t) = \frac{1-U}{1+e^{-2x+(1+U)t}}, \quad S(x,t) = U + (1-U)\frac{e^{-2x+(1+U)t}}{1+e^{-2x+(1+U)t}}. \tag{4}$$

Количественный анализ показывает значительное улучшение точности с увеличением N. Метод демонстрирует сходимость и применимость для решения SIS-модели с миграцией.

[1] Brauer F., Driessche P., Wu J., eds. *Mathematical epidemiology*, Springer Berlin, Heidel berg, (2008).

Рассеяние и излучение акустических волн в дискретных волноводах с несколькими цилиндрическими выходами на бесконечность

Сморчков Данил Сергеевич
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
st076101@student.spbu.ru

Дискретный волновод – это граф G, состоящий из нескольких дискретных полуцилиндров, соединенных конечным числом вершин и ребер. Под дискретным цилиндром мы понимаем граф, периодический при сдвиге на заданный вектор и имеющий конечную ячейку периодичности. На графе G рассматривается уравнение вида $-\mathrm{div} a\nabla u - \mu u = f$, где заданная функция f и неизвестная функция u – это функции на множестве V вершин графа, а div и ∇ – разностные аналоги соответствующих дифференциальных операторов. Спектральный параметр μ предполагается вещественным и фиксированным. Весовая функция a определена на множестве ребер, является положительной и удовлетворят экспоненциальной стабилизации на бесконечности.

Собственные функции непрерывного спектра определяются как ограниченные решения однородной задачи, не принадлежащие $\ell_2(V)$. Мы строим базис собственных функций непрерывного спектра, удовлетворяющий асимптотике на бесконечности: $Y_j^+ = u_j^+ + \sum_{k=1}^{\Upsilon} S_{j,k} u_k^- + o(1)$. Здесь $u_1^+, \ldots, u_\Upsilon^+$ обозначают *приходящие волны*, а $u_1^-, \ldots, u_\Upsilon^-$ – *уходящие*. Матрица $S = ||S_{j,k}||$ называется *матрицей рассеяния*.

Мы описываем корректную постановку задачи с *естественными условиями излучения* $u = c_1 u_1^- + \ldots + u_\Upsilon^- + o(1)$. Коэффициенты c_j считаются по формуле $c_j = i(f, Y_j^-)_V$, где $(\cdot,\cdot)_V$ – это расширение скалярного произведения в $\ell_2(V)$, а $Y_1^-, \ldots, Y_\Upsilon^-$ – другой базис собственных функций непрерывного спектра, связанный с предыдущим соотношениями $Y_j^- = \sum_{k=1}^{\Upsilon} (S^{-1})_{j,k} Y_k^+$.

Доклад основан на результатах, полученных совместно с А.С. Порецким.

Условные меры совершенных мер совершенны

Соколов Игорь Вячеславович
МФТИ, г. Москва
sokolov.igor506@yandex.ru

Главный результат доклада – условная мера детерминантного точечного процесса, совершенного в смысле Г.И. Ольшанского [1], также является совершенной. Доклад основан на совместной работе с А.И. Буфетовым.

[1] Olshanski G., *Determinantal point processes and fermion quasifree states*, arXiv:2002.10723v2.

[2] Bufetov A. I., *Quasi-Symmetries of Determinantal Point Processes*, arXiv:1409.2068.

[3] Bufetov A. I., Yanqi Qiu, and Alexander Shamov. *Kernels of conditional determinantal measures and the proof of the lyons-peres conjecture*, arxiv:1612.06751, 2018.

[4] Bufetov A. I., *Conditional measures of determinantal point processes*, arxiv:1411.4951, 2016.

Характеристический полином случайной унитарной матрицы: вероятност-

ный подход

Сологубова Ксения Александровна
МФТИ, г. Москва
shushasl@mail.ru

Рассматривается работа Бургада, Хьюза, Никегбали и Йора, в которой предлагается новый подход к изучению характеристического полинома случайной унитарной матрицы. Ранее для анализа его распределения использовались сложные аналитические методы, такие как интеграл Сельберга и плотность Вейля. Авторы предлагают более простой и наглядный вероятностный подход, основанный на рекурсивном построении меры Хаара.

Основной результат работы — построение двух эквивалентных представлений характеристического полинома: как произведение независимых случайных величин и как сумма независимых случайных величин, если рассмотреть его логарифм.

Мы разбираем, как такие представления позволяют получить новые, более простые доказательства известных фактов. В частности, мы останавливаемся на новом доказательстве центральной предельной теоремы Китинга-Снейта, которое использует только классические результаты теории вероятностей, такие как многомерная ЦПТ, и позволяет избежать громоздких вычислений.

О моделировании каталитических ветвящихся случайных блужданий

Сусорова Марина Александровна
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
susorovama@gmail.com

Настоящий доклад посвящён компьютерному моделированию непрерывных по времени каталитических ветвящихся случайных блужданий (КВСБ) на одномерных и двумерных решётках.

В то время как классические исследования подобных систем, как правило, сосредоточены на их асимптотическом поведении при больших временах [1], данная работа сфокусирована на численном анализе эволюции процессов на конечных временных интервалах. Ключевой задачей является анализ пространственно-временной динамики плотности частиц и её распределения по узлам решётки, что требует применения специализированных алгоритмов.

Основным результатом работы является разработка и сравнительный анализ двух альтернативных вычислительных подходов — рекурсивного и нерекурсивного алгоритмов, — позволяющих проводить детальное моделирование КВСБ. В докладе будут представлены принципы реализации этих методов, обсуждены их вычислительные особенности, а также продемонстрированы результаты моделирования, включая серии визуализаций и анимации, наглядно иллюстрирующие динамику систем.

[1] Булинская Е. Вл., *Вероятностно-геометрические свойства пространственного ветвящегося случайного блуждания*, Докторская диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Москва (2024).

[2] Ермишкина Е. М., Яровая Е. Б., *Моделирование ветвящихся случайных блужданий по многомерной решетке*, Фундам. и прикл. матем. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 37–56.

Предельные теоремы для класса максимальных ветвящихся процессов

Талпа Григорий Андреевич
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
`grigorii.talpa@math.msu.ru`

Пусть $\{X_{i,j}\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин с функцией распределения F. Зададим рекуррентно последовательность $\{M_n\}$:

$$M_0 = 1, \quad M_n = \max(X_{n,1}, \dots, X_{n,M_{n-1}}), \quad n \geq 1.$$

Процесс $\{M_n\}$ называется максимальным ветвящимся процессом(МВП) и был впервые введен в работе [1], где также изучалась вероятность его невырождения. По аналогии с классическими ветвящимися процессами Гальтона–Ватсона(ВП) можно сказать, что в МВП в каждом поколении выживают потомки только одной частицы – той, у которой их больше всего.

Добавим в модель случайную среду. Зафиксируем последовательность н.о.р. случайных величин $\{\eta_i\}$ и будем рассматривать $\{X_{i,j}\}$ с функцией распределения F_{η_i}, где $\{F_y\}$ – некоторое семейство функций распределения. Процесс, определяемый по аналогии с $\{M_n\}$, но в случайной среде, называется максимальным ветвящимся процессом в случайной среде(МВПСС) и был впервые введен в статье [2].

В данной работе рассматривается случай, когда функция распределения имеет вид

$$F_y(x) = 1 - \frac{c(y)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty.$$

В зависимости от значения величины $\mathbf{E} \ln c(\eta)$ процессы классифицируются как надкритические, критические и докритические. Для данного семейства функций $\{F_y\}$ (при некоторых дополнительных ограничениях) получена асимптотика вероятностей невырождения $\mathbf{P}(M_n > 0) \sim c/\sqrt{n}$ в критическом случае, а также установлены центральная предельная теорема и асимптотика вероятностей больших уклонений в надкритическом случае.

[1] Lamperti J., *Maximal branching processes and long range percolation*, J. Appl. Probab. – 1970. – Vol. 7, No. 1. – P. 89–96.

[2] Лебедев А. В., *Максимальные ветвящиеся процессы в случайной среде*, Информ. и её примен. – 2018. – Т. 12, № 2. – С. 35–43.

Уравнение Колмогорова–Чепмена и его связь с марковским свойством процесса

Филичкина Елена Михайловна
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
elena.filichkina1999@yandex.ru

В докладе рассматриваются примеры процессов, удовлетворяющих уравнению Колмогорова–Чепмена, но не являющихся марковскими. Один из первых таких примеров был предложен Феллером в [1], где рассматривается процесс с тремя и более состояниями. На основе примера Бернштейна о попарно независимых величинах, которые не являются независимыми в совокупности, можно также построить примеры процессов с двумя состояниями. Показано, что уравнение Колмогорова-Чепмена неоднозначно определяет немарковский процесс. А также установлено, что для невырожденного гауссовского процесса с непрерывной ковариационной функцией выполнение уравнения Колмогорова–Чепмена для его переходных плотностей эквивалентно марковости процесса.

[1] Feller W., *Non-Markovian processes with the semigroup property*, Ann. Math. Statist., 30 (1959).

Энтропийный анализ распределений устойчивых процессов Леви

Хамзин Виктор Олегович
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург,
ММИ имени Эйлера, г. Санкт-Петербург
viktorkhamzinwork@gmail.com

mm-энтропией метрического пространства с мерой называется величина, показывающая, какое число шаров одинакового радиуса необходимо взять, чтобы покрыть множество нужной меры. Она была определена еще в классической работе К.Шеннона [2], но до недавнего времени практически не изучалась. А. М.Вершик и М. А.Лифшиц в работе [1] нашли значение mm-энтропии банахова пространства с гауссовской мерой. Доклад будет посвящен последним результатам, полученным в негауссовском случае: мы рассмотрим пространство траекторий α-устойчивого процесса Леви и найдем его mm-энтропию.

[1] Вершик А. М., Лифшиц М. А., *О mm-энтропии банахова пространства с гауссовской мерой*, Теория вероятн. и ее примен. – 2023. – Т. 68, № 3. – С. 532–543.

[2] Шеннон К., *Математическая теория связи*, В кн.: *Работы по теории информации и кибернетике*, М.: Изд-во иностр. лит. – 1963. – С. 243–332.

На что нужно умножить ограниченную случайную величину, чтобы ограниченной стала также и её мартингальная квадратичная функция?

Целищев Антон Сергеевич
ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург
celis_anton@pdmi.ras.ru

Ответ на вопрос из заголовка очевиден — на 0. Поэтому опишем задачу несколько подробнее.

Пусть f — функция на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с фиксированной дискретной фильтрацией $(\mathcal{F}_n)$, $0 \leq f \leq 1$ п.в. Хорошо известно, что мартингальная квадратичная функция $S(f)$ в таком случае лежит во всех пространствах L^p, $1 < p < \infty$, но ограниченной она быть не обязана.

Тем не менее, мы покажем, как *явно построить* другую функцию ("мультипликатор") m, такую что $0 \leq m \leq 1$, у произведения $m \cdot f$ мартингальная квадратичная функция уже ограничена: $\|S(m \cdot f)\|_\infty \leq C$, но при этом это произведение "не слишком мало": $\mathbb{E}(f) \geq c\mathbb{E}(m \cdot f)$.

Случай фильтрации с непрерывным временем, а также случай дискретной диадической фильтрации были рассмотрены ранее Питером Джонсом и Паулем Мюллером. Мы немного расскажем об истории этой задачи, а также о двух подходах к её решению для случая произвольной дискретной фильтрации: конструктивном, при котором для функции m можно написать более-менее явную формулу, и совершенно не конструктивном, который позволяет добиться большего, но имеет свои недостатки.

Новые результаты о распределении Миттаг-Леффлера

Чернышенко Екатерина Глебовна
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
ekaterina.chernyshenko@math.msu.ru

В стохастических моделях с тяжелыми хвостами распределение Миттаг-Леффлера часто выступает в качестве предельного закона. На примере трех различных случайных процессов демонстрируется, что имеет место сходимость почти наверное к данному распределению. В частности, в модели, известной как процесс китайского ресторана (см. [1]), анализируются случайные разбиения конечного множества $1, 2, ..., n$. При устремлении размера множества n к бесконечности, количество образующихся блоков разбиения почти наверное сходится к случайной величине, имеющей распределение Миттаг-Леффлера, что установлено в работе [4]. Затем рассматривается аналогичная модель для непрерывного времени - процесс Юла чистого рождения (см. [2]). В данной модели окрашивание частиц подчиняется следующему алгоритму: исходно в системе присутствует единственная частица, обладающая уникальным цветом. Каждая вновь появляющаяся частица с заданной вероятностью либо наследует цвет своей родительской частицы, либо приобретает абсолютно новый цвет, ранее не существовавший в популяции. В [2] установлено, что при стремлении t к бесконечности, число образовавшихся различных цветов сходится почти наверное к величине, имеющей распределение Миттаг-Леффлера. Мы продемонстрируем, как распределение Миттаг-Леффлера описывает предельное распределение времени пребывания в начальной точке для симметричного однородного случайного блуждания по одномерной решетке в условиях бесконечной дисперсии скачков (см. [3]). Затем мы усилим этот результат, доказав сходимость почти наверное.

[1] Pitman J., *Exchangeable and partially exchangeable random partitions*, Probab. Theory Relat. Fields – 1995. – Vol. 102. – P. 145–158.

[2] Pitman J., *Combinatorial stochastic processes*, Lect. Notes in Math. 1875. Springer, Berlin (2006).

[3] Апарин А. А., Попов Г. А., Яровая Е. Б., *О распределении времени пребывания случайного блуждания в точке многомерной решетки*, Теория вероятн. и ее примен. – 2021. – Т. 66, № 4. – С. 657–675.

[4] Bercu B., Favaro S., *A martingale approach to Gaussian fluctuations and laws of iterated logarithm for Ewens-Pitman model*, Stoch. Proc. Appl. – 2024. – Vol. 178. – P. 1–19.

Предельная теорема для количества частиц второго типа в ветвящемся процессе с мутациями в одном гене

Швайков Михаил Дмитриевич
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
mikhail.shvaikov@math.msu.ru

В докладе будет рассматриваться схема серий для бесконечнотипного ветвящегося процесса. На каждом этапе фиксируется число n – длительность существования ветвящегося процессса, а также зависящие от n вероятности p_n и q_n. Каждая частица при рождении может с заданной вероятностью p_n изменить свой тип на следующий, более высокий, или с вероятностью q_n на предыдущий, более низкий. Процесс начинается с одной частицы первого типа, которая имеет математического ожидание числа потомков $\mu_1 > 1$. Частицы каждого типа независимы и одинаково распределены, но частицы более высокого типа имеют большее математическое ожидание числа потомков: $\mu_{i+1} > \mu_i$, $i \in \mathbb{Z}$. Всегда считается, что $q_n = o(1), n \to \infty$, исследуется предельное распределение количества частиц каждого типа в зависимости от порядка малости p_n.

Подобный процесс (в случайной среде) описан в работе В.А. Ватутина [1], однако его модель отлична от исследуемой, в частности он рассматривает конечное число типов, и частицы могут лишь повысить свой тип. В литературе встречаются смежные проблемы. В частности, Marek Kimmel и David E. Axelrod рассматривают (см. [2]) общие свойства бесконечнотипных ветвящихся процессов с геномом (вероятности p_n и q_n можно интерпретировать как мутацию гена). Встречаются статьи (см. [3]), в которых исследуются двуполые процессы подобного вида. В свою очередь в данном докладе рассматривается специфическая задача исследования моментов первого появления частиц каждого типа и изучения их предельного распределения.

В настоящей работе выясняется, что при значениях $p_n \sim C\mu_1^{-n}$, при $n \to \infty$, где C – это некоторая константа, можно свести задачу к процессу, в котором значения типов могут только увеличиваться. Показывается, что за некоторое конечное время до завершения процесса появляются частицы второго типа, и количество частиц второго типа в этом случае имеет некоторое невырожденное распределение, кроме того, выводится явный вид этого распределения.

Список литературы:

[1] Vatutin V. A., *The structure of the decomposable reduced branching processes. I. Finite-dimensional distributions*, Theory Probab. Appl. – 2015. – Vol. 59, No. 4. – P. 641–662.

[2] Kimmel M., Axelrod D. E., *Branching processes in biology*, Springer New York, NY, (2015).

[3] González M., Hull D. M., Martínez R., Mota M., *Bisexual branching processes in a genetic context: the extinction problem for Y-linked genes*, Math Biosci, (2006).

О вероятностях позднего вырождения в надкритических процессах с ветвлением

Шкляев Александр Викторович
Математический институт имени В.А. Стеклова, г. Москва,
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
ashklyaev@gmail.com

Надкритический ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, как правило, вырождается в самом начале, в противном случае размножаясь с экспоненциальной скоростью. Однако, что случится, если мы потребуем, чтобы процесс выродился в отдаленный момент, то есть позднее n, где n неограниченно растет?

Оказывается (и это достаточно простой факт), что вероятность такого события имеет порядок ca^n для некоторых констант c и a, а условное поведение траектории процесса при этом совпадает с поведением невырождающегося докритического процесса.

Для ветвящихся процессов в случайной среде аналогичный вопрос значительно более сложен. Прежде всего, надкритический случай распадается на три различных подтипа, из которых родственное описанному выше поведению, демонстрирует лишь один – так называемый строго надкритический процесс. Однако, и его изучение оказывается достаточно сложным, первые результаты в этом направлении получены лишь в 2024 году В.И. Афанасьевым ([1]) в частном случае, когда распределение числа потомков одной частицы является геометрическим.

На наш взгляд, проблема заключается в том, что обусловенный поздним вырождением процесс, рассматриваемый до момента n, представляет собой не докритический ветвящийся процесс в случайной среде, а некоторую другую марковскую цепь, являющуюся, впрочем, положительно возвратной. Соответственно, его исследование требует скорее не работы с производящими функциями, а опоры на хорошо развитую теорию предельных теорем для марковских цепей.

Используя общую теорию R-положительности (см. [2]), удается обобщить результат В.И. Афанасьева на общее распределение числа потомков, накладывая на него лишь моментные условия.

Более конкретно, показано, что вероятность позднего вырождения ветвящегося процесса в случайной среде также имеет вид cR^n для некоторых констант R, c. Известно, что в случае геометрического количества потомков одной частицы

$$R = \mathbf{E}\frac{1}{\mu},$$

где μ – случайная величина, обозначающая среднее число потомков одной частицы при фиксации среды, а c – некоторая константа.

В докладе мы обсудим описанные выше результаты, а также мотивацию к исследованию задачи о позднем вырождении надкритических процессов.

[1] Афанасьев В. И., *Сильно надкритический ветвящийся процесс в случайной среде при условии отдаленного вырождения*, Дискрет. матем. – 2024. – Т. 36, № 1. – С. 3–14.

[2] Ferrari P. A., Kesten H., Martínez S., *R-positivity, quasi-stationary distributions and ratio limit theorems for a class of probabilistic automata*, Ann. Appl. Probab. – 1996. – Vol. 6, No. 2. – P. 577–616.

Скорость сходимости в предельных теоремах о локальном времени пребывания случайного блуждания в точке $\mathbb{Z}^d$

Юшкова Ольга Владиславовна
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
olga.ushkova@math.msu.ru

В [1] были доказаны предельные теоремы о распределении времени пребывания случайного блуждания в точке в зависимости от размерности решетки в предположении конечной дисперсии и при условии, приводящем к бесконечной дисперсии скачков. В данной работе доказаны теоремы об оценке скорости сходимости к полученным предельным распределениям методом Стейна в метрике Вассерштейна. С помощью дискретной аппроксимации времени пребывания, асимптотических свойств переходных вероятностей случайного блуждания и обобщенных гипер-функций Эйри, рассмотренных в [2-3], получены новые результаты при различных предположениях о дисперсии скачков случайного блуждания.

В случае конечной дисперсии скачков и размерности $d = 1$ оценка скорости сходимости к полунормальному распределению равна $O(t^{-1/2})$. В случае же бесконечной дисперсии скачков в размерности $d = 1$ при значении параметра $\alpha \in (1, 2)$ имеет место сходимость к распределению Миттаг-Леффлера, и при условии $\frac{\alpha}{\alpha-1} \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $O(t^{1/\alpha-1})$.

[1] Aparin A. A., Popov G. A., Yarovaya E. B., *On the sojourn time distribution of a random walk at a multidimensional lattice point*, Theory Probab. Appl. – 2022.

[2] Mainardi F., *On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1994).

[3] Cinque F., Orsingher E., *General Airy-type equations, heat-type equations and pseudo-processes*, J. Evol. Equ. (2025).

Новое условие однозначной определенности распределения абсолютно непрерывной случайной величины своими моментами

Яковенко Максим Анатольевич
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
maksim.iakovenko@math.msu.ru

Рассматриваются две случайные величины: $X \sim F$ со значениями в $\mathbf{R}$ и $Y \sim G$ со значениями в $\mathbf{R}_+$. Предполагается, что F и G абсолютно непрерывны с плотностями f и

g соответственно. Все моменты случайных величин X и Y предполагаются конечными. В работе [1] вводятся условия на плотности f и g таким образом, чтобы выполнялось условие Карлемана, из которого немедленно вытекает M-детерминированность случайных величин X и Y. Данные условия на плотности могут быть ослаблены, что приводит к обобщению результата. Демонстрируются явные примеры плотностей для граничных случаев.

[1] Wei Y., Zhang R., *A new moment determinacy condition for probability distributions*, Теория вероятн. и ее примен. – 2025. – Т. 70, № 1. – С. 155–168.

Характеризация геометрического распределения по его сильным рекордам

Яковлев Богдан Владимирович
Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург
bogdanrnd1@gmail.com

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – набор независимых одинаково распределенных случайных величин (распределенных как X), где $P(X_1 < n) < 1$ для любого n.
Пусть

$$L(0) = 1,$$

$$L(n+1) = min\{j > L(n) | X_j > X_{L(n)}\}.$$

Определим $R_n(X) = X_{L(N)}$ как $n-$тый сильный рекорд и $geom(\beta)$ – геометрическое распределение с носителем натуральные числа с 0.
Пусть $A_k(\beta)$ – распределение, которое порождает $k-$тый рекорд распределения $geom(\beta)$.
Тогда справедливы результаты:
1) Пусть $k \geq 2$, X – случайная величина с носителем натуральные числа с 0, тогда

$$R_k(X) \sim A_k(\beta_1), \quad R_{k-1}(X) \sim A_{k-1}(\beta_2),$$

$$\beta_1 = \beta_2, X \sim geom(\beta_1).$$

2) Описан класс распределений X таких, что $R_1(X) = A_1(\beta)$ для фиксированного β.

Адаптивный критерий хи-квадрат для гипотезы принадлежности семейству сдвига-масштаба

Якупов Руслан Альбертович
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва
ruslan.iakupov@math.msu.ru

Классический критерий хи-квадрат используется для проверки гипотезы согласия наблюдаемого распределения с теоретическим в случае дискретных (категориальных) распределений. Для применения критерия к непрерывным распределениям на $\mathbb{R}$ обычно выполняют дискретизацию: множество наблюдений разбивается на несколько блоков, и подсчитываются частоты попадания в каждый из них. Однако в стандартной постановке границы блоков задаются заранее, до получения выборки. Это приводит к тому, что критерий фактически проверяет не исходную гипотезу о совпадении распределений, а лишь совпадение вероятностей попадания в заранее выбранные блоки. При этом возможные локальные особенности или аномалии реальных данных могут не отражаться в выбранном разбиении.

В настоящей работе рассматривается вариация критерия хи-квадрат, в которой используется *адаптивное* построение разбиений выборки. Границы блоков первоначально определяются по квантилям, после чего рассматриваются различные объединения этих блоков. Такой подход позволяет учитывать структуру данных и сохранять чувствительность критерия к форме эмпирического распределения. Проверяется гипотеза принадлежности наблюдаемого распределения параметрическому семейству сдвига-масштаба.

Построение критерия проводится следующим образом. Сначала выборка разбивается на N блоков по эмпирическим уровням i/N. Далее для полученного дискретизированного распределения подбираются параметры сдвига и масштаба методом максимального правдоподобия. Функция правдоподобия в этом случае строится на основе частот попадания наблюдений в блоки и отражает степень согласия эмпирических и теоретических вероятностей. Максимизация этой функции позволяет определить параметры, при которых теоретическое распределение наилучшим образом описывает наблюдаемые данные.

После этого строится сама статистика критерия. Для заданного числа блоков N рассматриваются все возможные объединения этих блоков по k ячеек. Для каждого такого набора вычисляется статистика хи-квадрат, характеризующая отклонение эмпирических частот от теоретических. Итоговая статистика критерия представляет собой сумму всех полученных значений по различным разбиениям на k ячеек.

Основным результатом работы является получение предельного распределения построенной статистики. Показано, что статистика имеет предельное взвешенное хи-квадрат распределение. Этот результат позволяет использовать предложенную конструкцию в качестве асимптотического критерия проверки принадлежности распределения семейству сдвига-масштаба.