

Вторая конференция Математических центров России
Секция «Комбинаторика, дискретная геометрия, случайные
структуры»

7–11 ноября 2022, Москва

А. А. Валуженич. Минимальные носители собственных функций в графе Хэмминга

В данной работе рассматривается следующая экстремальная проблема для собственных функций графов:

Проблема 1. Для данного графа G и его фиксированного собственного значения λ найти минимальную мощность носителя произвольной λ -собственной функции графа G .

Проблема 1 тесно связана с проблемой пересечения комбинаторных объектов и проблемой поиска минимальной мощности комбинаторных трейдов и нуль дизайнов. Во многих случаях такие задачи могут быть рассмотрены как специальный случай Проблемы 1 для соответствующих графов с некоторыми дискретными ограничениями на функции.

В данном докладе мы обсудим последние результаты по Проблеме 1 и ее обобщениям для графа Хэмминга.

К. В. Воробьёв. О полностью регулярных кодах в графах Джонсона

Доклад посвящен вопросу существования полностью регулярных кодов в графах Джонсона $J(n, w)$. В частности, этот вопрос включает в себя гипотезу Дельсарта о несуществовании нетривиальных совершенных кодов в этих графах. Будут представлены новые результаты характеристики полностью регулярных кодов при $w = 3$ и $w = 4$, и кроме того, для $w > 4$ при некоторых спектральных ограничениях на матрицу пересечений кода.

Часть представленных результатов получена в совместных работах с И. Могильных, а также с А. Гаврилюком, С. Горяиновым и Р. Эвансом (см. <https://arxiv.org/abs/2206.15341>).

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

В. А. Воронов. Разбиения множеств на части меньшего диаметра в четырехмерном евклидовом пространстве

Для размерностей $4 \leq n \leq 63$ на данный момент неизвестно, верна ли гипотеза Борсука, утверждающая, что любое компактное подмножество $\mathbb{R}^n$ может быть разбито на $n + 1$ часть строго меньшего диаметра. В размерности 4 было доказано лишь то, что существует разбиение на 9 частей, удовлетворяющее условию. По-видимому, доказательство того, что существует разбиение на 8 частей, находится в пределах досягаемости, однако требует большого объема компьютерных расчетов. Кроме того, представляют интерес минимальных значений $d_{4,k}$, определяемых следующим образом: любое множество единичного диаметра $M \subset \mathbb{R}^4$ заведомо может быть разбито на k частей диаметра не более $d_{4,k}$.

В докладе будут представлены оценки $d_{4,k}$, основанные на результатах В.В. Макеева об универсальных покрывающих множествах. Из некоторого симметричного 14-гранника, описанного около единичной сферы, получено семейство множеств, каждое из которых разбивается на заданное число частей минимального диаметра при помощи оптимизационного алгоритма.

А. И. Голованов. Множества с нечётными расстояниями и равноудалённые вправо последовательности в чебышёвской и манхеттенской метриках

Мы рассматриваем две связанные задачи экстремальной геометрии в n -мерном пространстве $\mathbb{R}_\infty^n$ с максимальной метрикой. В первой задаче мы показываем, что максимальный размер *равноудалённой вправо* последовательности точек в $\mathbb{R}_\infty^n$ есть $2^{n+1} - 1$. Здесь последовательность называется *равноудалённой вправо*, если каждая точка равноудалена от всех последующих. Во второй задаче мы доказываем, что наибольшее число точек в $\mathbb{R}_\infty^n$ с попарно нечётными расстояниями есть 2^n . Также получены частичные результаты для обеих задач в $\mathbb{R}_1^n$.

Г. А. Кабатянский. Кодово-комбинаторный подход к задаче двоичных сжатых измерений или поиск со лжецом

Начнем с выпуклых многогранников, вершины которых берутся из булева куба $B^d = \{0, 1\}^d \subset \mathbb{R}^d$, т.е. будем рассматривать выпуклые оболочки

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{\mathbf{a} \in A} \lambda_{\mathbf{a}} \mathbf{a} : \sum_{\mathbf{a} \in A} \lambda_{\mathbf{a}} = 1, \lambda_{\mathbf{a}} \geq 0 \right\}$$

множеств $A \subset B^d$ мощности не более t . Множество $\mathcal{C}$ вершин d -мерного булева куба B^d будем называть t -независимым, если для любых двух его непересекающихся подмножеств $A, B \subset \mathcal{C}$ таких, что $|A|, |B| \leq t$, их выпуклые оболочки не пересекаются.

Вопрос. Чему равна максимально возможная мощность $m_t(d)$ t -независимого множества в B^d ?

Ответ: $m_t(d) = 2^{c_t d}$, где $c_t = \Omega(t^{-1} \log t)$.

Эта задача является частным случаем задачи о поиске фальшивых монет на точных весах, когда веса фальшивых монет могут быть различны и априори неизвестны. А последняя задача может рассматриваться как задача о нахождении носителя неизвестного t -разреженного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ по результатам линейных измерений, что, в свою очередь, является подзадачей задачи сжатых измерений.

Мы предлагаем новый подход построения *двоичных* матриц измерений, основанный на разделяющих кодах и отличный от RIP-матриц, который позволяет решать перечисленные выше задачи.

Д. В. Карпов. K -планарные графы

Граф называется *k -планарным*, если его можно так изобразить на плоскости, что каждое ребро пересекает не более чем k других. Наверное, впервые появилось такое обобщение планарных графов в работе Рингеля в 1965 году — там были рассмотрены 1-планарные графы и доказано, что любой такой граф имеет правильную раскраску вершин в 7 цветов. Позже

были определены k -планарные графы для всех натуральных k . В работах Рингеля, Паха, Тота, Оре, Бородина и других исследовались вопросы об оценке на количество ребер в таких графах, оценке хроматического числа, различные вопросы об их изображениях на плоскости. В докладе будет рассказано о классических и современных результатах из этой области.

В. С. Кожевников. Максимальные индуцированные подграфы в биномиальном случайном графе $G(n, p)$

При $p = \text{const}$ в случайном графе Эрдёша–Реньи $G(n, p)$ наблюдается эффект двухточечной концентрации наибольшего размера индуцированного подграфа заданного класса для множества различных классов графов: независимых множеств, лесов, деревьев, циклов, графов ограниченной степени, графов с ограниченным числом рёбер и др. При $p \rightarrow 0$ для тех же классов графов имеет место асимптотика наибольшего размера. В нашей работе рассмотрены новые классы графов, а именно, леса и деревья ограниченной степени, для которых также оказывается верна двухточечная концентрация.

Д. А. Колупаев. Гипотеза Эрдёша о паросочетаниях для случая почти совершенных паросочетаний

Задача состоит в нахождении наибольшего числа рёбер в k -однородном гиперграфе на n вершинах, не содержащем $s + 1$ попарно непересекающихся рёбер. Нас будет интересовать случай, когда n довольно близко к $(s + 1)k$. Конкретно, будет показано, что для n , удовлетворяющих неравенству $n < (s + 1)(k + \frac{0.01}{k})$, ответ равен $\binom{(s+1)k-1}{k}$.

Е. В. Константинова. Графы Ноймайера и их конструкции

Исследование симметричных графов является одним из направлений алгебраической теории графов. В 80-х годах прошлого века при изучении дизайнов Арнольд Ноймайер поставил вопрос о существовании рёберно-регулярного неполного графа, содержащего регулярные клики. Положительный ответ на этот вопрос был получен в 2018 году, когда первые две конструкции таких графов были найдены. Графы Ноймайера, не являющиеся сильно регулярными графами, называют точными графами Ноймайера. Первая конструкция таких графов, предложенная в 2019 году, вызвала бурный всплеск интереса к этим графам. В данном докладе делается обзор по существующим конструкциям точных графов Ноймайера с упором на новые результаты, полученные совместно с Р. Дж. Эвансом, С. В. Горяиновым и А. Д. Медных. В частности, в новой работе удалось обобщить полученные ранее конструкции, а также построить новые графы Ноймайера из бесконечной треугольной решётки и других геометрических объектов.

Доклад подготовлен при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашения с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-281.

Ф. А. Носков. Осьминоги в булевом кубе: семейства с малыми попарными пересечениями

Мы изучаем следующую проблему. Даны семейства $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_\ell$ подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$ и мы предполагаем, что для различных k, k' и произвольных $F_1 \in \mathcal{F}_k, F_2 \in \mathcal{F}_{k'}$ имеем $|F_1 \cap F_2| \leq t$, где t — некоторая константа. Чему равен максимум произведения мощностей этих семейств? Какова структура экстремального примера?

В этой работе мы находим асимптотику этого произведения и некоторый структурный результат при n стремящемся к бесконечности для константного количества семейств и константного m , а также получаем аналогичный результат и для чуть более общей задачи, где для каждой пары семейств своё максимальное разрешённое пересечение.

Решив эту задачу, мы даём ответ и на следующий вопрос. Пусть дан равномерный гиперграф, ребра которого раскрашены в ℓ цветов. Чему может быть равно произведение числа клик разного цвета?

Ф. В. Петров. Степени вершин двудольного графа и разброс когерентных независимых распределений.

Если A — случайное событие, то условные математические ожидания X, Y его индикатора относительно некоторых подалгебр называются когерентными. Пусть X, Y — когерентные и независимые случайные величины. К. Бурди и Дж. Питман выдвинули гипотезу о максимально возможном разбросе $f(\delta) := \text{prob}(|X - Y| \geq \delta)$ таких случайных величин: $f(\delta) = 1$ при $\delta \leq 1/2$ и $f(\delta) = 2\delta(1 - \delta)$ при $\delta \in (1/2, 1]$. Комбинаторно эта задача по существу эквивалентна такой: каково наибольшее возможное количество пар вершин из разных долей двудольного графа, имеющего по n вершин в каждой доле, степени которых отличаются не менее чем на k . В недавней работе С. Цихомского и докладчика этот вопрос был решён развитием идей из работы Эрдёша, Чена, Руссо и Шелпа о разбросе степеней в произвольном графе.

А. А. Полянский. Оптимизация помогает Твербергу

Ставшая классической знаменитая теорема Тверберга (1966) утверждает, что для любого множества из $(r - 1)(d + 1) + 1$ точки в $\mathbb{R}^d$ найдётся такое разбиение на r подмножеств, что выпуклые оболочки этих подмножеств пересекаются. Одно из доказательств было предложено Рудневым (2001) и основано на оптимизации некоторой функции.

Есть много вариацией теоремы Тверберга. В частности, можно заменять оператор выпуклой оболочки на другие. На докладе будет предложено несколько новых результатов типа Тверберга, которые могут быть доказаны, используя оптимизационный подход.

Доклад основан на двух совместных работах: одна в соавторстве с А. Василевским и О. Пирахмадом, вторая — с П. Барабанчиковой.

Д. С. Протасов, А. Д. Толмачев. Разбиения поверхности тора на части меньшего диаметра

Рассмотрим (X, ρ) — метрическое пространство, где X — некоторое множество, а ρ — метрика, определенная на $X \times X$. Для ограниченного произвольного множества $F \subset X$ и натурального числа $n \in \mathbb{N}$ определим следующую величину:

$$d_n(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \exists F_1, \dots, F_n \subset X : F \subseteq F_1 \cup \dots \cup F_n, \forall i \text{ diam}(F_i) \leq x\}.$$

Другими словами, среди всех покрытий множества F некоторыми n множествами $F_1, \dots, F_n$ мы хотим выбрать покрытия, состоящие из множеств как можно меньшего диаметра.

Будем рассматривать поверхность двумерного тора как фактор-пространство $T = \mathbb{R}_2/\mathbb{Z}_2$. Неформально говоря, рассмотрим тор как квадрат со стороной 1, пары противоположных сторон которого “склеены”. Определим метрику ρ_T на поверхности тора так:

$$\rho_T((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(\min(|x_1 - x_2|, 1 - |x_1 - x_2|))^2 + (\min(|y_1 - y_2|, 1 - |y_1 - y_2|))^2},$$

что является кратчайшим расстоянием между точками $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ по поверхности тора (здесь и далее считаем, что $x_1, y_1, x_2, y_2 \in [0, 1]$).

Далее для метрического пространства (T, ρ_T) будем рассматривать величины $d_n(T)$, т.к. поверхность тора есть ограниченное множество.

Оценка величины $d_n(T)$ при различных $n \in \mathbb{N}$ является естественным обобщением и развитием задачи об оптимальных разбиениях плоских множеств, однако в случае тора используется метрическая функция ρ_T , а не стандартная Евклидова метрика, поэтому необходимо применять новые подходы для оценок величин $d_n(T)$.

Авторами получены новые верхние и нижние оценки $d_n(T)$ для различного количества частей разбиения. Кроме того, доказана точная оценка для разбиения поверхности тора на три части. Отдельно отметим, что в данной работе величина $d_n(T)$ исследуется впервые.

А. А. Тараненко. Совершенные раскраски гиперграфов и их спектры

Совершенной k -раскраской гиперграфа назовем такую раскраску его вершин в k цветов, что цвет вершины однозначно задает раскраску инцидентных ей гиперребер. Одним из наиболее простых примеров совершенных раскрасок является трансверсаль в однородном регулярном гиперграфе. Другой важный пример — это накрытия одного гиперграфа другим, сохраняющие отношения инцидентности между вершинами и гиперребрами. В то время как теория совершенных раскрасок графов уже достаточно обширна, аналогичные вопросы для гиперграфов практически не изучены. В этом докладе мы покажем, что многие хорошие алгебраические свойства совершенных раскрасок графов остаются верными и для гиперграфов.

Прежде всего будет получено многомерное матричное уравнение на совершенные раскраски гиперграфов и их параметры. Затем докажем, что собственные числа многомерной матрицы параметров совершенной раскраски обязаны быть собственными числами матрицы смежности гиперграфа. Кроме того, будет доказан аналог теоремы о существовании общего накрытия для гиперграфов. Наконец, в качестве примеров мы вычислим параметры совершенных 2-раскрасок 3-однородных гиперграфов, установим параметры кратных трансверсалей как совершенных раскрасок и найдем все совершенные 2-раскраски для 3-однородного гиперграфа, заданного плоскостью Фано.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00202.

Д. А. Шабанов. О сильном хроматическом числе случайного гиперграфа

Доклад посвящен задаче о сильном хроматическом числе случайного гиперграфа в биномиальной модели $H(n, k, p)$. Напомним, что сильным хроматическим числом гиперграфа H , $\chi_{str}(H)$, называется такое наименьшее число q , что существует раскраска множества вершин гиперграфа в q цветов, в которой в каждом ребре все его вершины покрашены в разные цвета (сильная раскраска). Сильное хроматическое число для плотного случая, т.е., когда $pn^{k-1} \rightarrow +\infty$, было хорошо изучено в работе М. Кривелевича и Б. Судакова (1998). Мы же

концентрируемся на так называемом разреженном случае, когда $p\binom{n}{k} = cn$ и $c > 0$ не зависит от n . Известно, что в такой ситуации сильное хроматическое число $H(n, k, p)$ ограничено. В докладе будут представлены новые оценки пороговой вероятности для свойства сильной q -раскрашиваемости случайного k -однородного гиперграфа и, как следствие, получение результатов о концентрации его значений в одном или двух соседних значениях. Доклад основан на совместной работе с Т. Г. Матвеевой и А. Э. Хузиевой.