Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской Академии наук

Институт Математики
Национальной Академии наук Армении

Российско-Армянский университет

# Седьмое Российско-Армянское совещание

## по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам

## ՄՖ – VII

*Посвящается 75–летию*
*Национальной Академии Наук Армении*

9-15 сентября, 2018 г., Ереван

# Тезисы докладов

Ереван
Издательство “Гитутюн”
2018

УДК 51:06
ББК 22
С 285

**Организаторы:**

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Институт Математики НАН Армении
Российско-Армянский университет

**Организационный комитет:**

Д. В. Трещёв (сопредседатель)
Л. А. Агаловян (сопредседатель)
Н. Б. Енгибарян (зам. председателя)
А. Г. Сергеев (зам. председателя)
Р. Г. Бархударян (зам. председателя)
А. Г. Барсегян (ученый секретарь)
А. В. Комлов (ученый секретарь)
Н. У. Аракелян
И. В. Волович
Е. М. Чирка
А. Х. Хачатрян
Г. А. Карапетян
Л. Г. Арабаджян
Х. А. Хачатрян

**Совещание проводится при содействии:**

Фонда исследовательская математика
Фонда развития науки НАН РА
Фонда Инкубатор Предприятий Армении

http://www.mathnet.ru/conf1298

С 285 Седьмое Российско-Армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам: Посвящается 75 летию Национальной Академии Наук Армении, 9-15 сентября, 2018 г., Ереван: Тезисы докладов.- Ер.: Изд-во “Гитутюн”, 2018. – 84 с.

УДК 51:06
ББК 22

ISBN 978-5-8080-1354-4
© Издательство “Гитутюн” НАН РА, 2018

# Содержание

*Avetisyan K. L.*, On bounded projections on Bloch and Lipschitz spaces over the real ball . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
*Агаловян Л. А.*, О более мощном, чем ньютоново, центральном взаимодействии тел и частиц и проблема черных дыр . . . 6
*Aharonyan N. G.*, Distribution of two random points in convex domain 7
*Aleksanyan S. H.*, Optimal uniform approximation on the angle by the harmonic functions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
*Арабаджян Л. Г.*, Об однородном двумерном интегральном уравнении Винера-Хопфа в консервативном случае . . . . . . . 10
*Aramyan R. H.*, A Flag representation for a $n$-dimensional convex body . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
*Arakelyan A. G., Barkhudaryan R. H.*, A general class of finite difference schemes arising in numerical analysis of Reaction-diffusion systems . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
*Harutyunyan T. N.*, The dependence of solvability of inverse problem on some new properties of spectral data . . . . . . . . . . . 14
*Барсегян А. Г.*, Решение одной задачи береговой рефракции электромагнитных волн . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
*Белошапка В. К.*,Сложность аналитических функций двух переменных . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
*Bogatyrev A. B.*, Vortex textures for doubly periodic planar nanomagnet with inclusions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19
*Даллакян Р. В.*, Об одной задаче М. М. Джрбашяна . . . . . . . 20
*Davydov A. A.*, On invariants of normal forms of second order linear partial equations in the plane . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
*Думанян В. Ж.*, О разрешимости задачи Дирихле с граничной функцией из $L_2$ для эллиптического уравнения второго порядка . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

*Енгибарян Н. Б.*, Некоторые факторизационные соотношения в нормированных кольцах . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
*Isaev A. V.*, Affine rigidity of Levi degenerate tube hypersurfaces . . 27
*Казарян Г. Г.*, Сравнение обобщенно - однородных операторов(многочленов) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33
*Камалян А. Г.,Караханян М. И.*, Операторы типа $\mathcal{L}$-свертки . . . 35
*Караханян М. И., Камалян А. Г.*, Об одной граничной задаче, связанной с уравнением Гельмгольца-Шредингера . . . . . 36
*Karapetyan A. H.*, On restrictions of weighted classes of holomorphic functions in the matrix discs to the unit bidisc . . . . . . . . . 37
*Karapetyan G. A.*, Embedding theorems for multianisotropic Sobolev spaces . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
*Karapetyan G. A., Petrosyan H. A.*, Construction of a approximate solutions of the Dirichlet problem in $\mathbb{R}^n$ for regular hypoelliptic operators . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41
*Клешкова Е. А.*, Аналитические продолжения решения системы алгебраических уравнений . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
*Комлов А. В.*, Аппроксимации Эрмита–Паде для мероморфных функций на компактной римановой поверхности . . . . . . 45
*Куликов В. Р.*, Критерий сходимости интегралов Меллина-Барнса для мономиальной функции решения системы алгебраических уравнений . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
*Кузоватов В. И.*, О некоторых обобщениях формулы Плана . . . 50
*Мкртчян А. Д.*, Продолжимость кратных степенных рядов в секториальную область . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51
*Мурадян М. Г.* , О построении общего решения линейной системы дифференциальных уравнений . . . . . . . . . . . . . 53
*Мышкина Е. К.*, Формулы Варинга для одного вида систем алгебраических уравнений . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56
*Нахапетян Б. С.*, О взаимосвязи энергия-вероятность в моделях классической статистической физики . . . . . . . . . . . 59
*Ohanyan V. K.*, Stochastic Tomography of convex bodies in $\mathbf{R}^n$ . . 60
*Пальвелев Р. В.*, Абелевы модели Хиггса на компактных римановых поверхностях . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
*Пикичян О. В.*, Об одной обратной задаче нелинейной теории переноса излучения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
*Почекутов Д. Ю.*, Торические циклы в дополнении алгебраической кривой в 2-мерном комплексном торе . . . . . . . . . 68

*Саркисян С. О.*, Аналитическая механика микрополярных упругих тонких оболочек . . . 69
*Сергеев А. Г.*, Квантовое исчисление и сингулярные интегральные операторы . . . 71
*Сукиасян Г. С*, Экстремальное свойство триангуляции Делоне и его приложения в математической физике . . . 71
*Трещев Д. В.*, О тяжелой квантовой частице . . . 72
*Федоровский К. Ю.*, Области Каратеодори, аналитическое выметание мер и плохо приближаемые функции в пространствах $L^p$ . . . 72
*Феклистов С. В., Щуплев А. В.*, О голоморфном продолжении функций в торических многообразиях . . . 75
*Хачатрян А. Х.*, О разрешимости некоторых нелинейных задач, возникающих в теории географического распространения эпидемий . . . 76
*Хачатрян Х. А.*, О некоторых классах нелинейных интегральных уравнений в теории географического распространения эпидемии . . . 78
*Хачатрян Х. А., Андриян С. М.*, О разрешимости одного класса нелинейных уравнений с матрицами Теплица . . . 80
*Хачатрян Л. А.*, Нелинейные функционалы, сохраняющие нормальное распределение, и их асимптотическая нормальность 82

## On bounded projections on Bloch and Lipschitz spaces over the real ball

**K. L. Avetisyan**
*Yerevan State University*
E-mail: avetkaren@ysu.am

Over the unit ball $B$ in $\mathbb{R}^n\,(n \geq 2)$, we define Bergman type projection operators $T_\beta\,(\beta > 0)$ with a special Poisson-Bergman type kernel. We prove that operators $T_\beta$ continuously project various weighted and nonweighted spaces such as Bloch and Lipschitz into their harmonic subspaces.

## О более мощном, чем ньютоново, центральном взаимодействии тел и частиц и проблема черных дыр

**Л. А. Агаловян**
*Институт механики НАН РА*
E-mail: lagal@sci.am

Рассмотрен вариант центрального взаимодействия тел, который при коротких расстояниях описывает более мошное, по сравнению с ньютоновым, гравитационное взаимодействие. Выведены условия при которых траектория движения является коническим сечением. Показано, что при таком взаимодействии вторая космическая скорость (escape velocity) существенно больше ньютоновской.

Установлена связь рассматриваемого центрального взаимодействия с гравитационным радиусом "Темного тела" (Черной дыры). Показано, что гравитационный радиус Черной дыры может быть сколь угодно большим, по сравнению с соответствующим радиусом по теории Ньютона. Черная дыра создает возле себя весьма сильное центральное притяжение, для преодоления которого начальная скорость должна быть порядка скорости света. Может существовать счетное множество Черных дыр.

# Distribution of two random points in convex domain

**N. G. Aharonyan**
*Yerevan State University*
E-mail: narine78@ysu.am

In the last century German mathematician W. Blaschke formulated the problem of investigation of bounded convex domains in the plane using probabilistic methods. In particular, the problem of recognition of bounded convex domains $\mathbb{D}$ by chord length distribution. Let $\mathbb{G}$ be the space of all lines $g$ in the Euclidean plane. Random lines generate chords of random length in convex domain $\mathbb{D}$. The corresponding distribution function is called the chord length distribution function

$$F_{\mathbb{D}}(x) = \frac{1}{|\partial\mathbb{D}|}\,\mu\{g \in \mathbb{G} :\, \chi(g) = g \cap \mathbb{D} \leq x\} \tag{1}$$

where $|\partial\mathbb{D}|$ is the perimeter of $\mathbb{D}$, and $\mu$ is invariant measure with respect to the group of Euclidean motions (translations and rotations). The chord length distribution function $F_{\mathbb{D}}(y)$ are independent of the positions of the domains in the plane, thus it coincides for congruent domains. Let $P_1$ and $P_2$ be two points chosen at random, independently and with uniform distribution in $\mathbf{D}$. We are going to find the density function of the distance $\rho(P_1, P_2)$ between $P_1$ and $P_2$. The present problem was stated in [3]. Firstly, we find the distribution function $F_\rho(x)$ of $\rho(P_1, P_2)$. By definition,

$$F_\rho(x) = \frac{1}{\|\mathbf{D}\|^2} \iint\limits_{\{(P_1,P_2):\rho(P_1,P_2)\leq x\}} dP_1\, dP_2, \tag{2}$$

where $dP_i,\ i = 1, 2$ is the Lebesgue measure in the plane $\mathbf{R}^2$ and $\|\mathbf{D}\|$ is the area of $\mathbf{D}$.

We obtain a formula for the density function $f_\rho(x) = F'_\rho(x)$ of the distance $\rho(P_1, P_2)$:

$$f_\rho(x) = \frac{1}{\|\mathbf{D}\|^2}\left[2\pi\, x\, \|\mathbf{D}\| - 2\, x^2\, |\partial\mathbf{D}| + 2\, x\, |\partial\mathbf{D}| \int\limits_0^x F_{\mathbf{D}}(u)\, du\right], \tag{3}$$

where $F_{\mathbf{D}}(\cdot)$ is the chord length distribution function for the domain $\mathbf{D}$. The obtained formula permits to calculate the density function by means of the chord length distribution function of $\mathbf{D}$ (see also [1]). Therefore if we know the explicit form of the chord length distribution function for a domain, using (3) we can calculate density function $f_\rho(x)$ of the distance between two random points in $\mathbf{D}$. In [2] the explicit form of the chord length distribution function is given for any regular polygon. Consequently, density $f_\rho(x)$ can be calculated for any regular polygon by applying the result of [2].

## References

[1] N. G. Aharonyan, V. K. Ohanyan, Calculation of geometric probabilities using Covariogram of convex bodies, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), 53 (2), pp. 112–120, 2018.

[2] H. S. Harutyunyan and V. K. Ohanyan, Chord length distribution function for regular polygons, Advances in Applied Probability, No. 41, 358–366, 2009.

[3] B. Burgstaller and F. Pillichshammer, The average distance between two points, Bull. Aust. Math. Soc., No. 80, 353–359, 2009.

## Optimal uniform approximation on the angle by the harmonic functions

**S. H. Aleksanyan**

*Institute of Mathematics of NAS RA*

E-mail: asargis@instmath.sci.am

In this talk we discuss the problem of the optimal uniform approximation on the angle $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg} z| \leq \alpha/2\}$ by harmonic functions. The approximable function is a harmonic on the interior of $\Delta_\alpha$

and satisfies some conditions on the boundary of $\Delta_\alpha$. The estimations of the growth of the approximating harmonic functions on $\mathbb{R}^2$ depend on the growth of the approximable function on $\Delta_\alpha$ and it's differeentiable properties on the boundary of $\Delta_\alpha$.

The problem of uniform approximation on the sector by the entire functions was investigated by H. Kober [1], M. V. Keldysh [2], S. N. Mergelyan [3], N. U. Arakelian [4] and the other authors.The analog problem in the case for the meromorphic functions was discussed in work [5].

## References

[1] H. Kober, Approximation by integral functions in the complex plane, Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 54, 7-31.

[2] M. V. Keldysh, On approximation of holomorphic functions by entire functions Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1945, 47, 4, 239-241.

[3] S. N. Mergelyan, Uniform approximations to functions of a complex variable (in Russian), Uspekhi Mat. Nauk, 1952, 7, 2(48), 31-122; English transl in Amer. Math. Soc. Transl. (1) 3 (1962), 294-391.

[4] N. U. Arakelian, Uniform approximation by entire functions with estimates of their growth (in Russian), Sibirski Math. Journ., 1963, 4, 5, 977-999.

[5] S. Aleksanyan, Uniform and tangential approximation on an angle by meromorphic functions, having optimal growth, Journal of Contemporary Mathematical Analysis NAS of RA, 2014, 49, 4, 3-16.

# Об однородном двумерном интегральном уравнении Винера-Хопфа в консервативном случае

**Л. Г. Арабаджян**
*АГПУ им. Х. Абовяна*
*Институт математики НАН РА*
E-mail: arabajyan@mail.ru

Доказывается, что для существования неотрицательного ненулевого решения однородного уравнения

$$S(x,y)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty K(x-x',y-y')S(x',y')\,dx'\,dy',\qquad (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,\ (1)$$

где $\mathbb{R}_+\equiv[0,\infty)$, $\mathbb{R}_+^2\equiv\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, с симметрическим ядром $K$:

$$K(-x,y)=K(x,-y)\equiv K(x,y),\qquad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad (a)$$

в консервативном случае

$$0\leqslant K\in L(\mathbb{R}^2),\qquad \iint\limits_{\mathbb{R}^2}K(x,y)\,dx\,dy=1,\qquad (b)$$

достаточно выполение дополнительных условий:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}_+^2}x^n\cdot y^m\cdot K(x,y)\,dx<\infty,\qquad (c)$$

при $n=2$, $m=0$; $n=1$, $m=2$; $n=0$, $m=3$, а также

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+}xK(x,y)\,dx<\infty\quad \text{и}\quad \int\limits_{\mathbb{R}_+}yK(x,y)\,dy<\infty,\qquad (d)$$

для почти всех $y$ и $x$ из $\mathbb{R}$.

При условиях $(a)-(d)$ строится решение $S$ уравнения (1), удовлетворяющее неравенствам

$$x\cdot y+a_1\cdot x+b_1\cdot y+c_1\leqslant S(x,y)\leqslant x\cdot y+a_2\cdot x+b_2\cdot y+c_2,\quad (x,y)\in\mathbb{R}_+^2,$$

где $a_j$, $b_j$, $c_j$ $(j = 1, 2)$ – некоторые неотрицательные константы. При построении указанного решения $S$ существенно используются свойства решений однородных и неоднородных скалярных консервативных уравнений Винера-Хопфа (см. [1]).

Доказанное утверждение дополняет результаты работ [2, 3, 4] по разрешимости многомерных однородных интегральных уравнений Винера-Хопфа в консервативном случае.

Уравнение вида (1) при условиях $(a) - (d)$ возникает в теории переноса излучения в связи с проблемой Милна (см. [2]). В отмеченном случае ядро $K$ уравнения имеет вид

$$K_0(v) = \frac{1}{2\pi \cdot v} \cdot \int_1^\infty \frac{\exp(-tv)}{t \cdot \sqrt{t^2-1}}\, dt,$$

$$K(x-x', y-y') = K_0(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Нетрудно убедиться, что это ядро удовлетворяет условиям $(a)-(d)$.

## Список литературы


[1] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники. Матем анализ, том 22, 1984, 175–244.

[2] S. K. Lam, A. Leonard, Milne's problem for two-dimensional transport in a quarter space. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 11, Issue 6, 1971, 893–904.

[3] Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, О факторизации кратных интегральных операторов Винера-Хопфа. Докл. АН СССР, 291, 1, 1986, 11–14.

[4] Л. Г. Арабаджян, О существовании нетривиальных решений некоторых линейных и нелинейных уравнений типа свертки. Украинский мат. журнал, том 41, 12, 1989, 1587–1595.

## A Flag representation for a $n$-dimensional convex body

**R. H. Aramyan**
*Russian Armenian University*
E-mail: rafikaramyan@yahoo.com

The cosine representation of the support function of a centrally symmetric convex body plays a fundamental role in integral geometry. In this article a new so-called *flag* representation for the support function of an origin symmetric $n$-dimensional convex body in terms of surface curvature functions of the convex body is found. Using the representation we propose a sufficient condition for an origin symmetric $n$-dimensional convex body to be a zonoid. The condition has a local equatorial description.

## A general class of finite difference schemes arising in numerical analysis of Reaction-diffusion systems

**A. G. Arakelyan, R. H. Barkhudaryan**
*Institute of Mathematics NAS RA*
E-mail: rafayel@instmath.sci.am

This talk is devoted to the general class of finite difference schemes developed for a numerical approximation of solutions to a certain type of reaction–diffusion systems with $m$ population densities. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a connected and bounded domain with smooth boundary and $m$ be a fixed integer. We consider the steady-states of $m$ competing species coexisting in the same area $\Omega$. Let $u_i$ denotes the population density of the $i^{\text{th}}$ component with the internal dynamic prescribed by $F_i$.

We call the $m$-tuple $U = (u_1, \cdots, u_m) \in (H^1(\Omega))^m$, *a segregated state* if

$$u_i(x) \cdot u_j(x) = 0, \quad \text{a.e. for} \quad i \neq j,\ x \in \Omega.$$

The problem amounts to minimize

$$E(u_1, \cdots, u_m) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_i(x)|^2 + F_i(x, u_i(x)) \right) dx \qquad (2)$$

over the set

$$S = \{(u_1, \ldots, u_m) \in (H^1(\Omega))^m : u_i \geq 0, u_i \cdot u_j = 0, u_i = \phi_i \quad \text{on} \quad \partial\Omega\},$$

where $\phi_i \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, $\phi_i \cdot \phi_j = 0$, for $i \neq j$ and $\phi_i \geq 0$ on the boundary $\partial\Omega$.

First of all we construct finite difference schemes with standard discretization (uniform and a standard 5 point stencil approximation of Laplacian). These schemes themselves happened to be non-linear and implicit systems.

The main issues for these schemes were discussed in [3, 2, 1, 4], i.e. the schemes solution's existence, uniqueness and convergence.

## References

[1] A. Arakelyan, Convergence of the finite difference scheme for a general class of the spatial segregation of reaction–diffusion systems. Computers and Mathematics with Applications 75, 12 (2018), 4232–4240.

[2] A. Arakelyan, R. Barkhudaryan, A numerical approach for a general class of the spatial segregation of reaction–diffusion systems arising in population dynamics. Computers and Mathematics with Applications 72, 11 (2016), 2823–2838.

[3] A. Arakelyan, R. Barkhudaryan, M.Poghosyan, Numerical Solution of The Two-Phase Obstacle Problem by Finite Difference Method. Armenian Journal of Mathematics 7, 2 (2015), 164–182.

[4] F. Bozorgnia, A. Arakelyan, Numerical algorithms for a variational problem of the spatial segregation of reaction–diffusion systems. Applied Mathematics and Computation 219, 17 (2013), 8863–8875.

## The dependence of solvability of inverse problem on some new properties of spectral data

**T. N. Harutyunyan**
*Yerevan State University*
E-mail: hartigr@yahoo.co.uk

We find some new connections between the eigenvalues and norming constants of Sturm-Liouville problems. Besides, we describe some new properties of norming constants and their influence to constructive solution of inverse Sturm-Liouville problem. Similar connections we find in direct and inverse problems for Dirac systems.

## Решение одной задачи береговой рефракции электромагнитных волн

**А. Г. Барсегян**
*Институт математики НАН РА*
E-mail: anibarseghyan@mail.ru

Изучение распространения электромагнитных волн над бесконечной плоскостью, состоящей из двух однородных полуплоскостей с неодинаковыми электрическими свойствами относится к классическим задачам математической физики. При некоторых упрощениях задача береговой рефракции сводится к интегральному уравнению Гринберга-Фока:

$$f(x) = g(x) + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty K_0(|x-t|)\, f(t)\, dt, \tag{1}$$

где $\alpha \in (-\infty, \infty)$, а $K_0$ -функция Макдональда:

$$K_0(x) = \int_1^\infty e^{-|x|t} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}, \quad x > 0.$$

Известно замкнутое аналитическое решение уравнения типа Винера-Хопфа (1) в неособом случае $\alpha \notin [1, \infty)$, в виде интегралов от быстро осцилирующих функций (см. [1, 2]). Применение полученной формулы в прикладных вопросах проблематично.

Уравнению (1) соответствует следующее нелинейное уравнеие Амбарцумяна (УА):

$$\varphi(s) = 1 + \frac{\alpha\varphi(s)}{\pi}\int_1^\infty \frac{\varphi(p)}{s+p}\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}dp. \qquad (2)$$

И. Н. Минин сделал первые шаги по применению УА к уравнению (1).

В настоящей работе развиваются два способа численно - аналитического решения уравнения (1).

Отдельно рассматриваются: диссипативный случай $0<\alpha<1$; консервативный (критический) случай $\alpha = 1$; суперкритический случай $\alpha > 1$; и случай $\alpha < 0$. Консервативный и суперкритический случаи относятся к особым (сингулярным) случаям уравнения (1).

Первый способ решения уравнения (1) основан на факторизационную трактовку УА (см. [3]) в сочетании с модифицированным методом дискретных ординат из [4]. Аналогичный подход к численно-аналитическому решению некоторых диссипативных и консервативных задач математической физики был применен А. Х. Хачатряном. При $\alpha < 0$ дополнительно привлекаются методы работ [5, 6]. В суперкритическом случае применяется также метод сдвига альбедо в версии работы [7].

Второй способ решения (1) основан на методе усреднения ядра(МУЯ) работы [8]. Применение МУЯ сводит (1) к дискретному уравнению Винера-Хопфа с матрицей $(a_{k-m})_{k,m=0}^{\infty}$, где

$$a_k = \frac{\alpha}{\pi}\cdot\int\limits_{(2k-1)h}^{(2k+1)h} K_0(x)\,dx,$$

а $h$ полушаг дискретизации. Это уравнение решается с применением нелинейных уравнений факторизации бесконечных теплицевых матриц (см. [3]).

Оба подхода позволяют решить уравнение (1) с наперед заданной точностью, используя при этом известные (количественные) априорные оценки погрешности, в банаховых пространствах $L_1(0,\infty)$, $L_2(0,\infty)$, $M(0,\infty)$ и др. Приведено некоторое сравнение двух способов решения с целью контроля точности и выявления степени экономности каждого из методов в вопросе решения уравнения (1).

## Список литературы

[1] В. А. Фок, О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Матем. сб., 1944, том 14 (56), 1-2, 3–50.

[2] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, 1958,том 13, 5(83), 3–120.

[3] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., 1984, том 22, 175–244.

[4] Н. Б. Енгибарян, Э. А. Мелконян, О методе дискретных ординат, ДАН СССР, 1987, том 292 (2), 322-326.

[5] Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян,Об одном уравнении свертки теории фильтрации случайных процессов, Укр. мат. журн. , 2014, 66(8), 1092–1105.

[6] А. Г. Барсегян, Уравнения типа восстановления с вполне монотонным ядром, Известия НАН Армении: Математика, 39:3 (2004), 13–20.

[7] Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, Интегральное уравнение свертки на полупрямой с вполне монотонным ядром, Матем. сб., 187:10 (1996), 53–72.

[8] А. Г. Барсегян, Н. Б. Енгибарян, Приближенное решение интегральных и дискретных уравнений Винера–Хопфа, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55:5 (2015), 836–845.

## Сложность аналитических функций двух переменных

**В. К. Белошапка**

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова*

E-mail: valery@beloshapka.ru

В различных областях математики имеются представления о простоте и сложности объектов теории. Эти определения, в основном, строятся по следующей индуктивной схеме. Имеется некоторая базовая совокупность объектов (простых, нулевой сложности) и элементарных операций. Из них однократным применением операций строятся объекты сложности один, из объектов сложности один - объекты сложности два и т.д. Все, что не может быть построено таким образом за конечное число шагов объявляется обектами бесконечной сложности. При этом самый интересный вопрос это как различать конечную сложность от бесконечной? Т.е. обекты которые попали в данную иерархию от тех, что в неё не попали. К таким вопросам относятся вопросы: "Является ли некая функция элементарной? Представима ли некая функция с помощью радикалов и арифметических действий?"К вопросам этого типа относится следующий вопрос. **В каком смысле функция большего числа переменных сложнее функции меньшего числа переменных?** Этот вопрос, как вопрос о представимости некоторой алгебраической функции *трех* переменных с помощью функций *двух* переменных, фигурирует в списке Д. Гильберта (1900) под номером 13 (проблема о суперпозиции). Гильберт, видимо для придания вопросу полемической остроты, неожиданно разрешил использовать *все непрерывные функции*. Но, как показали Арнольд и Колмогоров (1957), непрерывные функции нескольих переменных - это иллюзия.

Все они представимы в виде не очень сложной суперпозиции функций одного переменного и сложения. При этом ясно, что контекст непрерывных и даже гладких функций совершенно неадекватен вопросу про алгебраическую функцию. А как только мы покидаем непрерывную категорию и попадаем в гладкую, аналитическую или алгебраическую, все вопросы остаются без ответов. Конкретизируем наш риторический вопрос. **В каком смысле аналитические функции двух переменных сложнее аналитических функций одного переменного?** Для его обсуждения зададим иерархию сложностей следующим образом. Простые объекты - это все аналитические функции от $x$ и от $y$. Элементарные операции это подстановка функции в функцию (суперпозиция) и операция сложения (сложение можно заменить, но хотя бы одна бинарная операция необходима). Возникающая при этом совокупность $\mathbf{Cl}$ аналитических функций двух переменных $(x, y)$ *конечной сложности* это предмет весьма увлекательной теории, у которой есть аналитические, геометрические и алгебраические аспекты.

Совокупность $\mathbf{Cl}$ удобно предсталять как объединение возрастающей последовательности дифференциально-алгебраических множеств (т.е. множеств аналитических функций, заданных набором дифференциально-полиномиальных соотношений) $Cl_n$, состоящих из функций сложности не выше $n$. Таким образом, если функция не является *дифференциалльно-алгебраической*, т.е.не удовлетворяет никакому дифференциально-полиномиальному соотношению, то она не попадает в $\mathbf{Cl}$ и имеет бесконечную сложность. Примеры таких функций известны благодаря А.Островскому (1920). Псевдогруппа локально обратимых преобразований $\mathcal{G} = \{z(x, y) \to c(z(a(x), b(y))\}$ (калибровочная псевдогруппа) является структурной псевдогруппой построенной иерархии. Она состоит тех и только тех преобразований, которые не меняют сложности. Калибровочная псевдогруппа позволяет рассматривать сложность как характеристику не функции, а её орбиты (эквивалентные функции имеют одинаковую сложность). Отметим, что все арифметические действия, очевидно, эквивалентны и имеют сложность один.

**Теорема 1** (2017): Размерность стабилизатора функции двух переменных $z(x, y)$ в $\mathcal{G}$ больше единицы тогда и только тогда, когда $z(x, y)$ имеет сложность один или (что то же самое) эквивалентна $(xy)$. При этом размерность стабилизатора равна трем.

Нетрудно показать, что все решения уравнений $u''_{yy} \pm u''_{xx} = 0$ имеют сложность не выше двух, однако имеет место

**Теорема 2** (М.Степанова, 2018): Существует решение уравнения теплопроводности $u'_y = u''_{xx}$ бесконечной сложности. Причем пример такой функции можно предъяить конструктивно в виде ряда экспонент.

Результат Степановой означает, что поле функций конечной сложности это **собственное** подполе поля дифференциально-алгебраических функций (т.е. дифференцильно-алгебраического замыкания поля рациональных функций от $(x, y)$).

## Vortex textures for doubly periodic planar nanomagnet with inclusions

**A. B. Bogatyrev**
*Marchuk Institute of Numerical Mathematics RAS*
E-mail: ab.bogatyrev@gmail.com

We consider periodic states inside a thin film ferromagnetic element with periodic nano-scale array of non-magnetic holes. The starting point is the model [1], which is based on the existence of a well-defined energy hierarchy within a nano-structured magnet with Heisenberg exchange interaction being dominant. From a mathematical point of view the metastable states are the harmonic maps of the domain to the sphere. For the case of a continuous thin film A. A. Belavin and A. M. Polyakov in 1975 and D. Gross in 1978 proposed a series of local solutions with singularities modeling the magnetic vortexes. In the multiply-connected case the solutions are similar, but there are additional constraints on the vortex positions [2, 3]. Here we present the full set of constraints for the infinitely-connected case (thin film with periodic array of inclusions). We parametrize all the metastable states in terms of genus two Riemann surfaces. For 6-parametric shapes of inclusions the exact solutions are given(Joint study with K. L. Metlov).

## References

[1] K. L. Metlov, Magnetization patterns in ferromagnetic nanoelements as functions of complex variable, Phys. Rev. Lett. 105, 107201 (2010).

[2] A. B. Bogatyrev, K. L. Metlov, Topological constraints on positions of magnetic solitons in multiply–connected planar magnetic nano–elements, Phys. Rev. B 95:2, 024403 (2017) arXiv:1609.02509.

[3] A. B. Bogatyrev, Real meromorphic differentials: A language for describing meron configurations in planar magnetic nanoelements, Theoret. and Math. Phys., 193:1 (2017), 1547–1559; arXiv: 1610.04984.

## Об одной задаче М. М. Джрбашяна

**Р. В. Даллакян**

*Национальный политехнический университет Армении*

E-mail: dallakyan57@mail.ru

Пользуясь аппаратом интегродифференцирования Римана - Лиувилля М. М. Джрбашян обобщил класс Р. Неванлинны мероморфных в единичном круге функций, введя в рассмотрение класс $N_\alpha$, $(-1 < \alpha < \infty)$. Фундаментальную роль в этих исследованиях играют произведения $B_\alpha$, которые в специальном случае $\alpha = 0$ превращаются в произведения Бляшке. М. М. Джрбашяном был поставлен следующий вопрос: существует ли произведение $B_\alpha(z, \{a_n\})$,

$-1 < \alpha < 0$, являющееся непрерывной функцией в замкнутом единичном круге? В работе приведен всесторонний анализ этой задачи.

## Список литературы


[1] М. М. Джрбашян Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. Наука, Москва. 1966.

[2] М. М. Джрбашян, В. С. Захарян, О факторизации функций $B_\alpha$. Математические заметки, 1968, т.4, No.1, стр. 3–10.

[3] Р. В. Даллакян, Некоторые задачи о произведениях Джрбашяна. Доклады НАН Армении. 2017, т. 117, No.1, стр. 7–13.


## On invariants of normal forms of second order linear partial equations in the plane


**A. A. Davydov**

*The National University of Science and Technology MISiS*

*Lomonosov Moscow State University*

*International Institute for Applied Systems Analysis*

E-mail: davydov@mi.ras.ru


In 18-th century d'Alembert and Euler proposed forms of wave equation and Laplas equation to describe the motion of the string and the velocity potential of an incompressible fluid, respectively. Main symbol of standard equation $a(x, y)u_{xx} + b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = 0$ with smooth coefficients $a$, $b$, $c$ is reduced to these forms near any point, at which the *discriminant* $D$, $D = b^2 - 4ac$, is positive and negative, respectively, by smooth change of coordinates and multiplication by a smooth nonvanishing function. These forms have no parameters. For a generic triplet $(a, b, c)$ the level $D = 0$ is either empty or is smoothly embedded curve (=*type change line*) in the plane. Near a point of this line the equation is of *mixed type*.

The systematic analysis of such equations was started in [9], where the ideology and motivation for many studies in 20-th century were proposed. In this work Tricomi also grounded a normal form $u_{yy} + yu_{xx}$ for the main symbol of a generic equation near a point with $D = 0$, but his proof had a gap. The correct proof was done in [3]. This form also has no any parameters.

Complete classification of main symbols for such generic equations was in [4]. All new forms in this classification includes real parameter as invariant. The respective model equations were used in applications much earlier [8]. Recently some forms for parametric case were found [2], [5].

In 2007 structural stability of characteristic net for typical linear second order mixed type equation on the plane was proved for a wide class of equations [6]. This result leads to the natural problem on nonlocal normal forms of such equations and on invariants of such forms. The first of such forms (besides Laplas and wave equations) $u_{rr} - (r-1)u_{\phi,\phi} = 0$, was proposed in [7] for the case with Cibrario–Tricomi type behaviour of characteristic near circle $r = 1$ in $r \geq 1$. Such a behaviour also takes place for the equation for small bending of revolution surfaces near the parabolic line and in the theory of momentless steady states of thin elastic shell of revolution, see [1].

The talk is devoted to the theory of normal froms of mixed type partial equation in the plane, recent results in this area and open problems related.

The studies are supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project no. 1.638.2016/FPM.

## References

[1] Bakievich N.I., A theorem of G. Higman, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1968, no. 7, 3 – 9.

[2] Bogaevsky I A, Implicit ordinary differential equations: bifurcations and sharpening of equivalence. Izvestiya: Mathematics, 2014, 78 (6), 1063 – 1078

[3] Cibrario M, Sulla reduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivative parzialy di secondo ordine di tipo misto. Rend. Lombardo, 1932, 65, 889 – 906

[4] Davydov A A, Rosales-Gonzales E, Complete classification of generic linear second-order partial differential equations in the plane, Dokl. Mathematics, 1996, 350(2), 151 – 154

[5] Davydov A A, Trinh Thi Diep L, Normal forms for families of linear equations of mixed type near non-resonant folded singular points. Russian Math. Surveys, 2010, 65 (5), 984 – 986

[6] Grishina Yu A, Davydov A A, Structural Stability of Simplest Dynamical Inequalities. Proc. Steklov Inst. Math., 2007, 256, 80 – 91

[7] Kasten J A, Solvability of the Boundary Value Problem for a Tricomi Type Equation in the Exterior of a Disk. Journal of Mathematical Sciences, 2013, 188(3), 268-272.

[8] Pilija A D, Fedorov V I, Singularities of electromagnetic wave field in cold anisotropic plasma with two-dimensional non-homogeneity. J. Experimental and Theoretical Phys., 1971, 60, 389-400

[9] Tricomi F, Sulle equazioni lineari alle derivate partziali di $2^0$ ordine di tipo misto. Memorie della R.Acc. dei Lincei, S.V., vol.XIV, 1923.

# О разрешимости задачи Дирихле с граничной функцией из $L_2$ для эллиптического уравнения второго порядка

**В. Ж. Думанян**

*Ереванский государственный университет*

E-mail: duman@ysu.am

Исследуется задача Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q$ для общего линейного эллиптического уравнения второго порядка

$$-div\,(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - div(\bar{c}(x)u) + d(x)u = \\ = f(x) - divF(x), \quad x \in Q, \tag{1}$$

$$u|_{\partial Q} = u_0, \tag{2}$$

где $u_0 \in L_2(\partial Q)$, $f \in L_{2,loc}(Q)$, $F = (f_1, \dots, f_n) \in (L_{2,loc}(Q))^n$. Предполагается, что симметрическая матрица $A(x) = (a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = (\xi, A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R_n$ и п. в. $x \in Q$, где $\gamma$ положительная постоянная, а коэффициенты $\bar{b}(x) = (b_1(x), \dots,\ b_n(x))$, $\bar{c}(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области $Q$ функциями.

Получены точные (по порядку роста) ограничения на рост вблизи границы области $Q$ младших коэффициентов уравнения (1) при которых решение из пространства $W^1_{2,loc}(Q)$ обладает свойством $(n-1)$-мерной непрерывности.

В терминах скалярного произведения в специальном гильбертовом пространстве получены необходимые и достаточные условия существования $(n-1)$-мерно непрерывного решения рассматриваемой задачи Дирихле (1), (2) и установлено, что условия разрешимости задачи (1), (2) имеют вид, аналогичный условиям разрешимости в обычной обобщенной постановке (в $W_2^1(Q)$). В частности, если однородная задача (с равными нулю граничной функцией и правой частью) не имеет нетривиальных решений из пространства $W_2^1(Q)$, то для всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и всех $f$ и $F$ из соответствующих функциональных пространств существует решение неоднородной задачи. Это решение принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$ и для него справедлива оценка

$$\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int\limits_Q r\,|\nabla u|^2 dx \leq$$

$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)} + \int\limits_Q r^3\,(1+|\ln r|)^{\frac{3}{2}}\,f^2 dx + \int\limits_Q r\,(1+|\ln r|)^{\frac{3}{2}}\,|F|^2 dx\right),$$

где $r$-расстояние точки $x \in Q$ до границы $\partial Q$, постоянная $C$ не зависит от $u_0$, $f$, $F$.

При естественных дополнительных ограничениях на коэффициенты при младших членах уравнения (1), для правых частей из $W_2^{-1}(Q)$ полученные необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1),(2) в $W^1_{2,loc}(Q)$-постановке записываются в более простом виде (в терминах исходной задачи). При этом доказано, что если граничная функция $u_0$ допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область $Q$, то решение из $C_{n-1}(\bar{Q})$ является решением из $W_2^1(Q)$ и в этом случае условия разрешимости задачи (1),(2) в $W^1_{2,\,loc}(Q)$-постановке являются также условиями разрешимости той же задачи в $W_2^1(Q)$-постановке.

# Некоторые факторизационные соотношения в нормированных кольцах

**Н. Б. Енгибарян**
*Институт математики НАН РА*
E-mail: yengib@instmath.sci.am

Методы факторизации широко применяются в вопросах изучения и решения линейных алгебраических систем, дифференциальных и интегральных уравнений. Автором и его соавторами разработаны некоторые подходы в данном направлении. Они способствовали получению новых теоретических результатов и конструктивных методов решения рассмотренных классов уравнений в неособом и особом случаях. К их числу относятся: метод нелинейных уравнений факторизации (см. [1]) метод полуобратной факторизации (см.[2]) и методы работ [3, 4].

В докладе представляются указанные методы и их обобщения на нормированные кольца. Приводятся аргументы в пользу применения этих методов в некоторых случаях, представляющих теоретический и прикладной интерес.

## Список литературы

[1] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники. Матем анализ, том 22, 1984, 175–244.

[2] Н. Б. Енгибарян, О факторизации матричных и операторных интегральных уравнений Винера–Хопфа, Изв. РАН. Сер. матем., 82:2 (2018), 33–42.

[3] Б. Н. Енгибарян, О многократной факторизации интегральных операторов типа свертки, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 37:4 (1997), 447–458.

[4] Б. Н. Енгибарян, Н. Б. Енгибарян, Одно преобразование интегральных уравнений, Известия НАН Армении: Математика, 2017, 52(6), 3-11.

## Affine rigidity of Levi degenerate tube hypersurfaces

**A. V. Isaev**
*Mathematical Sciences Institute*
*Australian National University*
E-mail: alexander.isaev@anu.edu.au

We consider connected smooth real hypersurfaces in the complex vector space $\mathbb{C}^n$ with $n \geq 2$. Specifically, we are interested in *tube hypersurfaces*, i.e, locally closed real submanifolds of the form $\mathcal{S} + iV$, where $\mathcal{S}$ is a hypersurface in a totally real $n$-dimensional linear subspace $V \subset \mathbb{C}^n$. One can choose coordinates $z_1, \dots, z_n$ in $\mathbb{C}^n$ such that $V = \{\Im z_j = 0,\ j = 1, \dots, n\}$, so we always identify $V$ with $\mathbb{R}^n$ by means of the coordinates $x_j := \Re z_j,\ j = 1, \dots, n$. Tube hypersurfaces arise, for instance, as the boundaries of tube domains, that is, domains of the form $\mathcal{D} + i\mathbb{R}^n$, where $\mathcal{D}$ is a domain in $\mathbb{R}^n$. We refer to the hypersurface $\mathcal{S}$ and domain $\mathcal{D}$ as the *bases* of the above tubes.

The study of tube domains is a classical subject in several complex variables and complex geometry, which goes back to the beginning of the 20th century. Indeed, already Siegel found it convenient to realize certain symmetric domains as tubes. For example, the familiar unit ball in $\mathbb{C}^n$ is biholomorphically equivalent to the tube domain with the base given by the inequality $x_n > \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_\alpha^2$.

The property that makes tube hypersurfaces interesting from the complex-geometric point of view is that they possess an $n$-dimensional commutative group of CR-symmetries, namely the group of translations $\{z \mapsto z + ib \mid b \in \mathbb{R}^n\}$, where $z := (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Furthermore, any affine automorphism of the base can be extended to an affine CR-automorphism of the tube. In the same way, any affine transformation between the bases of two tubes can be lifted to an affine CR-transformation between the tubes. This last observation, however simple, indicates an important link between CR-geometry and affine geometry by way of tube hypersurfaces. Indeed, they can be viewed either as objects of affine geometry and considered up to affine transformations of the bases or as objects of CR-geometry and considered up to CR-isomorphisms.

There has been a substantial effort to relate the two aspects of the study of tubes. In particular, one would like to understand the interplay between affine equivalence and CR-equivalence for tube hypersurfaces, where $M_1 = \mathcal{S}_1 + i\mathbb{R}^n$ and $M_2 = \mathcal{S}_2 + i\mathbb{R}^n$ are called *affinely equivalent* if there exists an affine transformation of $\mathbb{C}^n$ of the form $z \mapsto Az + b$, with $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{C}^n$, that maps $M_1$ onto $M_2$. Specifically, the following two questions have attracted much attention:
$(*)$ When does local or global CR-equivalence of $M_1$, $M_2$ imply affine equivalence?
$(**)$ For what kinds of tube hypersurfaces can one refine known CR-classification results to deduce affine classifications?

So far, the most comprehensive answers to the above questions have been given for the class of Levi nondegenerate tube hypersurfaces that are *CR-flat*, i.e., have identically vanishing CR-curvature as defined below. For a CR-hypersurface $M$ with Levi form of signature $(p, q)$, where $p + q = n - 1$, $q \leq p$, the condition of CR-flatness means that near its every point $M$ is CR-equivalent to an open subset of the real affine quadric $\Re z_n = \sum_{\alpha=1}^{p} |z_\alpha|^2 - \sum_{\alpha=p+1}^{n-1} |z_\alpha|^2$. Thus, for a fixed signature $(p, q)$ of the Levi form, all CR-flat tube hypersurfaces are pairwise locally CR-equivalent to each other. Nevertheless, the question of classifying them up to affine equivalence is highly nontrivial. Details can be found in monograph [1], which contains an up-to-date exposition of the existing theory. In particular, there are explicit affine classifications for $q = 0, 1, 2$ and an overall understanding of how results of this kind can be obtained in general. Moreover, CR-flat tube hypersurfaces possess remarkable properties. In particular, G. Fels and W. Kaup have discovered a deep connection between such hypersurfaces and commutative algebra by showing that all CR-flat tube hypersurfaces arise, in a canonical way, from real and complex Artinian Gorenstein algebras.

Our aim is to extend these results to classes of CR-flat tube hypersurfaces for which Levi nondegeneracy is not assumed. First of all, one has to ensure that the condition of CR-flatness is well-defined for the CR-structures in question. In general, CR-curvature is introduced in situations when the CR-structures are reducible to absolute parallelisms with values in some Lie algebra $\mathfrak{g}$ as explained below.

Let $\mathfrak{C}$ be a class of CR-manifolds. Then the CR-structures in $\mathfrak{C}$ are said to reduce to $\mathfrak{g}$-valued absolute parallelisms if to every $M \in \mathfrak{C}$ one can assign a fiber bundle $\mathcal{P}_M \to M$ and an absolute parallelism $\omega_M$ on $\mathcal{P}_M$ such that for every $p \in M$ the parallelism establishes an isomorphism between $T_p(M)$ and $\mathfrak{g}$ and for any $M_1, M_2 \in \mathfrak{C}$ the following holds:
(i) every CR-isomorphism $f : M_1 \to M_2$ can be lifted to a diffeomorphism $F : \mathcal{P}_{M_1} \to \mathcal{P}_{M_2}$ satisfying $F^*\omega_{M_2} = \omega_{M_1}$ and
(ii) any diffeomorphism $F : \mathcal{P}_{M_1} \to \mathcal{P}_{M_2}$ satisfying $F^*\omega_{M_2} = \omega_{M_1}$ is a bundle isomorphism that is a lift of a CR-isomorphism $f : M_1 \to M_2$.
In this situation one introduces the $\mathfrak{g}$-valued *CR-curvature form* $\Omega_M := d\omega_M - \frac{1}{2}[\omega_M, \omega_M]$, and CR-flatness means that $\Omega_M$ identically vanishes on $\mathcal{P}_M$.

Reducing CR-structures (as well as other geometric structures) to absolute parallelisms goes back to É. Cartan who showed that reduction takes place for all 3-dimensional Levi nondegenerate CR-hypersurfaces. Since then there have been many developments, all of which require Levi nondegeneracy. In particular, the famous work of Tanaka and, independently, that of Chern and Moser established reduction to absolute parallelisms for all Levi nondegenerate CR-hypersurfaces. On the other hand, reducing the CR-structures of Levi degenerate CR-manifolds has proved to be rather difficult. Despite É. Cartan's approach having been known for over a century and Tanaka's work published almost half a century ago, the first result on reduction to absolute parallelisms for a large class of Levi degenerate manifolds only appeared in 2013 in our paper [4]. Specifically, we considered the class $\mathfrak{C}_{2,1}$ of connected

5-dimensional CR-hypersurfaces that are 2-nondegenerate and uniformly Levi degenerate of rank 1 and showed that the CR-structures in this class reduce to $\mathfrak{so}(3,2)$-valued parallelisms.

As explained in [4], a manifold $M \in \mathfrak{C}_{2,1}$ is CR-flat if and only if near its every point $M$ is CR-equivalent to an open subset of the tube hypersurface over the future light cone in $\mathbb{R}^3$, i.e., to $M_0 := \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,\ \ x_3 > 0\}$. This hypersurface had been extensively studied prior to our work. In particular, it can be realized as part of the boundary of the classical symmetric domain of type $(\mathrm{IV}_3)$, or, equivalently, of type $(\mathrm{III}_2)$.

We are now ready to state our main theorem.

**Theorem 1.** *[2] Let $M$ be a tube hypersurface in $\mathbb{C}^3$ and assume that $M \in \mathfrak{C}_{2,1}$. Suppose further that $M$ is CR-flat. Then $M$ is affinely equivalent to an open subset of $M_0$.*

This theorem can be viewed as an affine rigidity result since it asserts that if a tube hypersurface $M$ in the class $\mathfrak{C}_{2,1}$ locally looks like a piece of $M_0$ from the point of view of CR-geometry, then from the point of view of affine geometry it (globally) looks like a piece of $M_0$ as well. In fact, $M$ extends to a tube hypersurface in $\mathbb{C}^3$ affinely equivalent to $M_0$, which is a complete answer to question $(*)$ in this situation. This surprising fact is in contrast to the Levi nondegenerate case, where the CR-geometric and affine-geometric classifications differ even in low dimensions.

In fact, it turns out that in order to obtain the conclusion of Theorem 1, one does not need to assume that the full curvature form is identically zero; it suffices to require that only two particular coefficients in the expansion of just one of its components vanish.

**Theorem 2.** *[2] Let $M$ be a tube hypersurface in $\mathbb{C}^3$ and assume that $M \in \mathfrak{C}_{2,1}$. Suppose further that certain two coefficients, called $\Theta^2_{21}$ and $\Theta^2_{10}$, in the expansion of a certain component, called $\Theta^2$, of the curvature form $\Omega_M$ vanish identically on $\mathcal{P}_M$. Then $M$ is affinely equivalent to an open subset of $M_0$.*

Our proof of Theorem 2 in [2] is local, and for every $x \in M$ we only utilize the vanishing of $\Theta^2_{21}$ and $\Theta^2_{10}$ on a particular section $\gamma$ of $\mathcal{P}_M$ over a neighborhood of $x$:

$$\begin{cases} \Theta^2_{21}|_\gamma = 0, \\ \Theta^2_{10}|_\gamma = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Each of the two conditions in system (1) can be expressed as a partial differential equation on the local defining function of the hypersurface $M$ near $x$. These equations are quite complicated. The expression for $\Theta^2_{10}|_\gamma$ is especially hard to find, and in our computation of $\Theta^2_{10}|_\gamma$ in [2] some of its terms were only calculated under the simplifying assumption $\Theta^2_{21}|_\gamma = 0$. This was sufficient for our purposes as we were only interested in solving system (1). Indeed, denoting by $\boldsymbol{\Theta}^2_{10}$ the quantity arising from the constrained calculation of $\Theta^2_{10}|_\gamma$, we see that the system of equations

$$\begin{cases} \Theta^2_{21}|_\gamma = 0, \\ \boldsymbol{\Theta}^2_{10} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

is equivalent to (1). Interestingly, if in suitable coordinates the base of $M$ is given locally as the graph of a function of two variables, the second equation in (2) becomes the well-known Monge equation on this function with respect to one of the variables.

To write system (2) more explicitly, recall that $M$ is uniformly Levi degenerate of rank 1 and 2-nondegenerate. Due to Levi degeneracy, the graphing function of $M$ satisfies the homogeneous Monge-Ampère equation. Thus, the detailed form of (2) is

$$\begin{cases} \Theta^2_{21}|_\gamma = 0, \\ \text{The Monge equation w.r.t. one variable: } \boldsymbol{\Theta}^2_{10} = 0, \\ \text{The Monge-Ampère equation,} \end{cases} \tag{3}$$

where we additionally assume that certain quantities responsible for the Levi form to have rank precisely 1 and for 2-nondegeneracy are everywhere nonzero. System (3) is the centerpiece of the proof of Theorem 2. In [2] we explicitly solved (3) and observed that every solution of this system defines a tube hypersurface affinely equivalent to an open subset of $M_0$.

The next theorem establishes a surprising dependence between the two local conditions in (2).

**Theorem 3.** *[3] Let $M$ be a tube hypersurface in $\mathbb{C}^3$ and assume that $M \in \mathfrak{C}_{2,1}$. Fix $x \in M$ and a suitable section $\gamma$ of $\mathcal{P}_M$ over a neighborhood of $x$. Then the condition $\boldsymbol{\Theta}^2_{10} = 0$ implies $\Theta^2_{21}|_\gamma = 0$.*

We stress that although the quantity $\boldsymbol{\Theta}^2_{10}$ was computed in part under the assumption $\Theta^2_{21}|_\gamma = 0$, it is not at all clear *a priori* why the vanishing of $\boldsymbol{\Theta}^2_{10}$ should imply that of $\Theta^2_{21}|_\gamma$. This fact is rather unexpected as it has been believed for some time now that CR-flatness for manifolds in the class $\mathfrak{C}_{2,1}$ should be controlled by two conditions rather than one.

By Theorem 3, system (3) reduces to a system of two equations:

$$\begin{cases} \text{The Monge equation w.r.t. one variable: } \boldsymbol{\Theta}^2_{10} = 0, \\ \text{The Monge-Ampère equation,} \end{cases} \tag{4}$$

where, as before, we additionally assume that certain quantities responsible for the Levi form to have rank precisely 1 and for 2-nondegeneracy are everywhere nonzero. This system is truly remarkable. Indeed, it has a clear geometric meaning as it locally describes all CR-flat tubes in the class $\mathfrak{C}_{2,1}$. Moreover, all solutions of this system can be explicitly found, and every solution yields a tube hypersurface affinely equivalent to an open subset of $M_0$. Next, each of the two equations in (4) has its own geometric interpretation: the classical single-variable Monge equation describes all planar conics, whereas the graphs of the solutions of the Monge-Ampère equation are exactly the surfaces in $\mathbb{R}^3$ with degenerate second fundamental form. Finally—and quite curiously—both equations in (4) happen to be named after Gaspard Monge. It is rather satisfying to see that the invariants constructed in [4] lead to an object so abundantly filled with geometric features. This indicates that the theory of the class $\mathfrak{C}_{2,1}$ is rich and deserves further exploration.

## References

[1] A. V. Isaev, Spherical Tube Hypersurfaces, Lecture Notes in Mathematics 2020, Springer, 2011.

[2] A. V. Isaev, Affine rigidity of Levi degenerate tube hypersurfaces, J. Diff. Geom., 104 (2016), 111–141.

[3] A. V. Isaev, On the CR-curvature of Levi degenerate tube hypersurfaces, Methods Appl. Anal, 23 (2016), 317–328.

[4] A. Isaev and D. Zaitsev, Reduction of five-dimensional uniformly Levi degenerate CR structures to absolute parallelisms, J. Geom. Anal., 23(2013), 1571–1605.

## Сравнение обобщенно - однородных операторов (многочленов)

**Г. Г. Казарян**

*Российско - Армянский университет,*

*Институт математики НАН РА*

E-mail: haikghazaryan@mail.ru

Говорят, что линейный дифференциальный оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$ ) мощнее линейного дифференциального оператора $Q(D)$ (многочлена) $Q(\xi)$ и записивают $P > Q$, если с некоторой постоянной $c > 0$ $|Q(\xi)| \le c[|P(\xi)|1]$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Говорят, что оператор (многочлен) $P$ сильнее оператора (многочлена) $Q$ и записивают $P \succ Q$, если $\tilde{P} > \tilde{Q}$, где $\tilde{R}$ функция Л.Хёрмандера оператора $R$. Если $P > Q > P$ ( $P \succ Q \succ P$ ), то говорят, что $P$ и $Q$ имеют одинаковую мощность(одинаковую силу).

Многочлен $R$ назовают обобщенно - однородным ($\lambda$ - однородным) $\lambda-$порядка $d_R$. если $R(t^\lambda \xi) := R(t^{\lambda_1}\xi_1, ..., t^{\lambda_n}\xi_n) = t^d R(\xi)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$.

Сравнение дифференциальных операторов (многочленов) является важным средством для решения разных задач теории общих дифференциальных уравнений. Например, известно (см. [1]), что если оператор $P(D)$ является гипоэллиптическим, то любой оператор $Q(D)$, имеющий одинаковую с оператором $P(D)$ силу также является гипоэллиптическим. Другой пример такого рода это добавление младших членов к данному (эллиптическому, гипоэллиптическому, гиперболическому, почти гипоэллиптическому и т.д.) оператору, не нарушающих их характер, т.е. сохраняющих их эллиптичность, гипоэллиптичность и т. д. Например, в работе [2] доказана теорема: пусть гипоэллиптический оператор $P(D)$ представляется в виде суммы двух $\lambda$ - однородных операторов: $P(D) = P_0(D)+P_1(D)$, а $R(D)$ $\lambda$ - однородный оператор такой, что $R < P_0$. Тогда оператор $P + R$ также является гипоэллиптическим.

Приведенные и другие примеры, перечень которых можно продолжать, показывают важность нахождения достаточно широких алгебраичеких условий сравнения операторов и, в первую очередь, условия при которых $\lambda$ - однородный многочлен $P$ мощнее или сильнее $\lambda$ - однородного многочлена $Q$.

Для $\lambda$ - однородного многочлена $R$ через $\Re(R)$ обозначим его многогранник Ньютона, через $\Sigma(R)$ множество точек $0 \neq \eta \in \mathbb{R}^n$ таких, что $R(\eta) = 0$, для каждой точки $\eta \in \Sigma(R)$ обозначим $A(\eta, R) := \{\alpha : D^\alpha R(\eta) \neq 0\}$ и положим $\Delta(\eta, R) := \max\limits_{\alpha \in A(\eta,R)} (\lambda, \alpha)$.

Для сравнения мощности $\lambda$ - однородных многочленов доказывается

**Теорема 1.** *Пусть $P$ и $Q$ $\lambda-$однородные многочлены $\lambda-$порядков $d_P$ и $d_Q$ соответственно. Тогда для $Q < P$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий*

*1) $\Sigma(Q) \supset \Sigma(P)$ и $\Re(Q) \subset \Re((P) \cap \{0\});$*

*2) для каждой точки $\eta \in \Sigma(P)$ существует окрестность $U(\eta)$ и постоянная $c = c(\eta) > 0$ такие, что*

$$|Q(\xi)|/|P(\xi)|^{\frac{\Delta(\eta,Q)}{\Delta(\eta,P)}} \leq c \;\; \forall \xi \in U(\eta);$$

$$3)\quad \frac{d_Q}{d_P} \le \frac{\Delta(\eta, Q)}{\Delta(\eta, P)} \quad \forall \eta \in \Sigma(P).$$

Аналогичное предложение доказывается для сравнения силы $\lambda$ - однородных многочленов. Из теоремы 1 и указанной выше теоремы из работы [2] следует

**Теорема 2.** *Пусть гипоэллиптический оператор $P(D)$ представляется в виде суммы двух $\lambda$ - однородных операторов: $P(D) = P_0(D)P_1(D)$, а $Q(D)$ $\lambda$ - однородный оператор такой, что пара многочленовов $P_0$ и $Q$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тагда оператор $P(D)Q(D)$ также гипоэллиптичен.*

## Список литературы


[1] L. H$\ddot{o}$rmander, "The Analysis of Linear Partial Differential Operators". II, Springer - Verlag. 1983.

[2] G.G.Kazaryan and V.N.Margaryan, Criteria for hypoelliptisity in terms of power and strengюh of operators, Proc. Steklov Inst. Maюh., IЯsu 4, 135 - 150, 1981


## Операторы типа $\mathcal{L}$-свертки


**А. Г. Камалян[1], М. И. Караханян[2]**

[1] *Ереванский государственный университет,*

*Институт математики НАН РА*

E-mail: armen.kamalyan@ysu.am, kamalyan_armen@yahoo.com

[2] *Ереванский уосударственный университет*

E-mail: m_karakhanyan@ysu.am


Пусть $\mathcal{L}$ – самосопряженный оператор Штурма-Лиувилля на оси с вещественным потенциалом $p$, удовлетворяющим условию $(1|x|)p \in L_1(\mathbb{R})$, а $U$ оператор приводящий оператор $\mathcal{L}$ к оператору умножения на функцию $\lambda^2$. В случае $p=0$, оператор $U$ совпадает с преобразованием Фурье.

Под оператором $\mathcal{L}$-свертки мы понимаем оператор получаемый заменой преобразования Фурье в определении оператора свертки на оператор $U$. Вводятся понятия операторов $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа, $\mathcal{L}$-Ганкеля. Рассматриваются задачи фредгольмовости и обратимости этих операторов.

Исследование выполнено при поддержке ГКН МОН РАН в рамках совместного научного проекта № YSU-SFU-16/1.

## Об одной граничной задаче, связанной с уравнением Гельмгольца-Шредингера

**М. И. Караханян[1], А. Г. Камалян[2]**

[1] *Ереванский государственный университет*

E-mail: m_karakhanyan@ysu.am

[2] *Ереванский государственный университет,*

*Институт математики НАН РА*

E-mail: armen.kamalyan@ysu.am, kamalyan_armen@yahoo.com

Пусть $\beta \in L^2(\mathbb{R}^1)$, $h_0^+ \in H^{1/2}(\mathbb{R}^1_+)$, $h_1^+ \in H^{-1/2}(\mathbb{R}^1_+)$, $h_0^- \in H^{1/2}(\mathbb{R}^1_-)$, $h_1^- \in H^{-1/2}(\mathbb{R}^1_+)$, $a_0^\pm$, $a_1^\pm$, $b_0^\pm$, $b_1^\pm$, $k$– комплексные числа, $\operatorname{Im} k > 0$, $\Omega^\pm = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \gtrless 0\}$.

Исследуется следующая граничная задача:

Требуется найти функцию $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ такую, что

$$(\Delta + k^2 + \beta(y))u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^- \cup \Omega^+,$$

$$\begin{cases} a_0^+ u(x,+0) + b_0^+ u(x,-0) = h_0^+(x), \\ a_1^+ \dfrac{\partial u(x,+0)}{\partial y} + b_1^+ \dfrac{\partial u(x,-0)}{\partial y} = h_1^+(x) \ \text{ на } \ \mathbb{R}^1_+ \,, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a_0^- u(x,+0) + b_0^- u(x,-0) = h_0^-(x), \\ a_1^- \dfrac{\partial u(x,+0)}{\partial y} + b_1^- \dfrac{\partial u(x,-0)}{\partial y} = h_1^-(x) \ \text{ на } \ \mathbb{R}^1_- \,. \end{cases}$$

Предлагается метод сведения решения этой задачи к решению некоторой векторной краевой задачи Римана.

Исследование выполнено при поддержке ГКН МОН РАН в рамках совместного научного проекта № YSU-SFU-16/1.

## On restrictions of weighted classes of holomorphic functions in the matrix discs to the unit bidisc

**A. H. Karapetyan**
*Institute of Mathematics NAS RA*
E-mail: armankar2005@rambler.ru

Let $n \geq 2$ be an arbitrary natural number. Denote by $M_{2n}$ the space of all complex $2 \times n-$ matrices $\eta = (\eta_{kj})_{1 \leq k \leq 2, 1 \leq j \leq n}$:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \dots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \dots & \eta_{2n} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

For arbitrary matrix $\eta \in M_{2n}$ denote by $\eta^* \in M_{n2}$ its Hermitian conjugate matrix. Further, $I^2$ is the unit $2 \times 2-$matrix from $M_{22}$. The Lebesgue measure in $M_{2n}$ can be written in the following natural way:

$$d\mu_{2n}(\eta) = \prod_{k=1}^{2} \prod_{j=1}^{n} dm(\eta_{kj}), \quad \eta = (\eta_{kj})_{1 \leq k \leq 2, 1 \leq j \leq n}. \tag{2}$$

The domain

$$R_{2n} = \{\eta \in M_{2n} : I^2 - \eta \cdot \eta^* \quad is \quad positive \quad definite\} \tag{3}$$

is called a matrix unit disc (Cartan classical domain of type I).

For $0 < p < \infty, \alpha \geq 0$ denote by $H^p_\alpha(R_{2n})$ the space of all holomorphic functions $f(\eta), \eta \in R_{2n}$, satisfying the condition

$$||f||_{p,\alpha} \equiv \left( \int\limits_{R_{2n}} |f(\eta)|^p \cdot [\det(I^2 - \eta \cdot \eta^*)]^\alpha d\mu_{2n}(\eta) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty. \tag{4}$$

Further, let $U^2=\{(z,w)\in C^2:|z|<1,|w|<1\}$ be the unit bidisc. For $0<p<\infty,\alpha\geq 0,\beta\geq 0$ denote by $H^p_{\alpha,\beta}(U^2)$ the space of all holomorphic functions $g(z,w),(z,w)\in U^2$, satisfying the condition

$$||g||_{p,\alpha,\beta}\equiv$$
$$\equiv\left(\int\limits_{U^2}|g(z,w)|^p\cdot(1-|z|^2)^\alpha\cdot(1-|w|^2)^\beta dm(z)dm(w)\right)^{\frac{1}{p}}< \tag{5}$$
$$<+\infty.$$

**Definition.** *For a function*

$$f\begin{pmatrix}\eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} & \ldots & \eta_{1n}\\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} & \ldots & \eta_{2n}\end{pmatrix}$$

*given in the domain $R_{2n}$, denote by*

$$\tilde{f}(\eta_{11},\eta_{22})\equiv f\begin{pmatrix}\eta_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \eta_{22} & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix} \tag{6}$$

*the restriction of $f$ to the unit bidisc $U^2$.*

**Theorem.** *If $f\in H^p_\alpha(R_{2n})$, then $\tilde{f}$ satisfies the condition*

$$\int\limits_{U^2}|\tilde{f}(\eta_{11},\eta_{22})|^p\frac{\left(1-|\eta_{11}|^2\right)^{\alpha+n+1}\cdot\left(1-|\eta_{22}|^2\right)^{\alpha+n+1}}{(1-|\eta_{11}|^2\cdot|\eta_{22}|^2)^2}dm(\eta_{11})dm(\eta_{22})< \tag{7}$$
$$<+\infty.$$

**Remark.** *Functions from the weighted spaces $H^p_{\alpha+n-1,\alpha+n+1}(U^2)$, $H^p_{\alpha+n+1,\alpha+n-1}(U^2)$, $H^p_{\alpha+n,\alpha+n}(U^2)$ satisfy the condition (7).*

# Embedding theorems for multianisotropic Sobolev spaces

**G. A. Karapetyan**
*Russian-Armenian University*
E-mail: garnik_karapetyan@yahoo.com

**Introduction.** In the proof of all embedding theorems (in particular, see [1]), two cases are distinguished. The first case, when the embedding index is less than one; the second case when the exponent is one, that is the boundary case holds. In previous papers, when embedding theorem proving for functions from multianisotropic spaces (see [2, 3]), we studied the case when the embedding index is less than unity. In this paper we prove embedding theorems for multianisotropic function spaces in the boundary case.

For any parameter $\nu > 0$ and a natural number $k$ denote

$$P(\nu,\xi) = \left(\nu\xi^{\alpha^1}\right)^{2k} + \cdots + \left(\nu\xi^{\alpha^n}\right)^{2k} + \left(\nu\xi^{\alpha^{n+1}}\right)^{2k}.$$

$$G_0(\nu;\xi) = e^{-P(\nu,\xi)}.$$

$$G_{1,j}(\nu,\xi) = 2k\left(\nu\xi^{\alpha^j}\right)^{2k-1} e^{-P(\nu,\xi)}, (j = 1, \dots, n+1).$$

For any function $f$ consider the regularization with the kernel $\hat{G}_0(t,\nu)$:

$$f_\nu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{R^n} f(t)\hat{G}_0(t-x,\nu)dt.$$

The following integral representation holds:

**Theorem 1.** *Let the function $f$ have the Sobolev weak derivatives $D^{\alpha^i} f$, $(i = 1, \dots, n+1)$, where $\alpha^i$ are the vertices of the completely regular polyhedron $\mathfrak{N}$ and $D^{\alpha^i} f \in L_p(R^n)$, $1 \le p < \infty$, $(i = 1, \dots, n+1)$. Then for almost all $x \in R^n$ it has the representation*

$$f(x) = f_h(x) + \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\varepsilon}^{h} d\nu \int\limits_{R^n} D^{\alpha^i} f(t)\hat{G}_{1,i}(t-x,\nu)dt.$$

Let $\mathfrak{N}$ be a completely regular polyhedron, then $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) = \{f : f \in L_p(\mathbb{R}^n), D^{\alpha^i} f \in L_p(\mathbb{R}^n), i = 1, \ldots, M\}$.

The main result of this paper is the following boundary embedding theorem for functions from a multianisotropic space $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ $(p > 1)$:

**Theorem 2.** *Let the numbers $p$ and $q$ satisfy the relations $1 < p \leq q < \infty$ and a multi-index $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ such that*

$$\chi = \max_{i=1,\ldots,I_{n-1}} \left( (\beta, \mu^i) + |\mu^i| \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \right) = 1. \tag{1}$$

*Then $D^\beta W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$, i.e. any function $f \in W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n)$ has weak derivatives $D^\beta f$, belonging to the class $L_q(\mathbb{R}^n)$, and for some constants $C_1, C_2 > 0$ inequality holds*

$$\left\| D^\beta f \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \sum_{i=1}^{M} \left\| D^{\alpha^i} f \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$

## References

[1] O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikloskii, Integral representations of functions and embedding theorems, Nauka, Moscow, 1975 (in Russian), p. 480.

[2] G. A. Karapetyan, Integral representation of functions and embedding theorems for multianisotropic spaces on a plane, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2016 (in press).

[3] G. A. Karapetyan, M. K. Arakelian, Embedding theorems for general multianisotropic spaces, Mathematical notes (in press).

# Construction of a approximate solutions of the Dirichlet problem in $\mathbb{R}^n$ for regular hypoelliptic operators

**G. A. Karapetyan, H. A. Petrosyan**
*Russian-Armenian University*
E-mail: garnik_karapetyan@yahoo.com, heghine.petrosyan@rau.am

**Introduction.** In this paper we consider a Dirichlet problem in a half-space for special (multihomogeneous) regular hypoelliptic equations with zero boundary conditions. Problems of this type appear in the study of multianisotropic processes and the difficulty of their study lies in the fact that the corresponding characteristic polynomial is not generalized homogeneous, as for elliptic or semi-elliptic equations (see [1]), but a multihomogeneous one, and the construction of an approximate solution for such equations is from itself difficult. But, applying special integral representations of functions (see [2]) through vertices of a completely regular Newton polyhedron, it was possible to construct approximate solutions in terms of integral operators. Similar questions in the whole space $\mathbb{R}^n$ were studied in [3]. In this paper we study the question of the solvability of the Dirichlet problem in Sobol'ev spaces in $W_p^{\mathfrak{N}}(\mathbb{R}^n_+)$ $(1 < p < \infty)$.

Consider the differential operator $P(D_x, D_{x_n})$ in $\mathbb{R}^n_+$ with constant real coefficients $a_i$ $(i = 1, \ldots, M)$

$$P(D_x, D_{x_n}) = D_{x_n}^{2m} + \sum_{i=1}^{M} a_i D^{\alpha^i}. \tag{1}$$

Assume that the operator (1) is a regular operator, i.e. there exists a constant number $C > 0$ such that for any $\xi \in \mathbb{R}^n$ inequality holds

$$|P(\xi, \xi_n)| \geq C \left( \sum_{i=1}^{M} \left| \xi^{\alpha^i} \right| + \xi_n^{2m} \right). \tag{2}$$

We also denote by $\chi = \min\limits_{i=1,\ldots,I_{n-2}} \left(|\mu^i| + \frac{1}{2m}\right) - \left(|\mu^1| + \frac{1}{2m}\right) \frac{1}{p}$, where $p > 1$ is some number.

In $\mathbb{R}^n_+$ consider the following Dirichlet problem:

$$\begin{cases} P(D_x, D_{x_n})U = f(x, x_n), \quad x_n > 0,\ x \in \mathbb{R}^{n-1}, & (3)\\ \left.\dfrac{\partial^i U}{\partial x_n^i}\right|_{x_n=0} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1. & (4) \end{cases}$$

In this paper we study the solvability of problem (3)-(4), namely, the following theorems will be proved.

**Theorem 1.** *If $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+)$ $(1 < p < \infty)$ and has a compact support, then $\chi > 1$ problem (3)-(4) has a unique solution $U$ from the class $W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n_+)$, and for some constant $C > 0$ (independent of $f$) we have the estimate*

$$\|U\|_{W_p^{\mathfrak{M}}(\mathbb{R}^n_+)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n_+)}. \tag{5}$$

And when $\chi \leq 1$ the following theorem holds.

**Theorem 2.** *Let $\chi \leq 1$ and $f \in L_p(\mathbb{R}^n_+)(1 < p < \infty)$ with compact support satisfies the following orthogonality conditions: $\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} x^s f(x, x_n)dx = 0$ as $|s| = 0, 1, \ldots, N-1$, where $N$ is a natural number, determined from the inequalities $\chi + N\mu^{i_0}_{min} > 1 > \chi + (N-1)\mu^{i_0}_{min}$, where $\mu^{i_0}_{min} = \min\limits_{j=1,\ldots,n} \mu^{i_0}_j$, and $i_0$ is the index for which $\min\limits_{i=1,\ldots,I_{n-2}} |\mu^i| = |\mu^{i_0}|$. Then for any such function $f$ problem (3)-(4) has a unique solution from the class $W_p^{\mathfrak{m}}(\mathbb{R}^n_+)$, for which the inequality (5) holds.*

## References

[1] G. V. Demidenko, On the correct solvability of boundary value problems in a half-space for quasielliptic equations, Siberian Mathematical Journal, Vol. XXIX, No. 4, (1988).

[2] G. A. Karapetyan, Integral representation of functions and embedding theorems for $n$-dimensional multianisotropic spaces with one vertex of anisotropicity, Siberian Math. Journal, v.58, n.3, (2017), 445-460.

[3] G. A. Karapetyan, H. A. Petrosyan On the solvability of regular hypoelliptic equations in $R^n$, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, (in press).

## Аналитические продолжения решения системы алгебраических уравнений

**Е. А. Клешкова**[1]
*Сибирский федеральный университет*
E-mail: ekleshkova@gmail.com

В докладе речь пойдёт о методе аналитического продолжения алгебраических функций (мономов решений систем уравнений) с помощью рядов Пюизо и интегралов Меллина—Барнса гипергеометрического типа. В случае общего алгебраического уравнения этот метод описан в статье [1], где приведён полный список степенных рядов, центрированных в нуле, являющихся аналитическими продолжениями выделенной ветви решения уравнения. Идея метода состоит в том, что каждый шаг непосредственного аналитического продолжения реализуется в пересечении областей

$$\mathrm{Log}_{10}^{-1}(D') \cap \mathrm{Arg}^{-1}(D''),$$

где $D'$ – образ области сходимости ряда при логарифмическом проектировании, а $D''$ – аргументальная проекция области сходимости интеграла Меллина—Барнса. Если ряд сходится в поликруге $\mathrm{Log}^{-1}(D')$, а интеграл Меллина—Барнса, представляющий мономиальную функцию координат решения системы, сходится в секториальной области $\mathrm{Arg}^{-1}(D'')$, при этом, пересечение этих областей не пусто, то степенной ряд продолжается в указанную секториальную область.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор 14, Y26.31.0006)

Рассмотрим систему $n$ триномиальных уравнений

$$y^{\omega^{(i)}} + x_i y^{\xi^{(i)}} - 1 = 0,\ i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

от $n$ неизвестных $y = (y_1, \ldots, y_n)$, где наборы показателей $A^{(i)} := \{\omega^{(i)}, \xi^{(i)}, \overline{0}\} \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant}$ фиксированны, а все коэффициенты $x := (x_1, \ldots, x_n)$ переменные. Предположим, что матрица $\omega$, составленная из вектор-столбцов $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(n)}$ невырождена. Рассмотрим моном $\widehat{y}(x) := y_1(x) \cdot \ldots \cdot y_n(x)$ координат ветви решения системы (1) $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$, выделенной условием $y_i(0) = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Исследуем разложение функции $\widehat{y}(x)$ в ряды Пюизо, центрированные в нуле, представляющие аналитические продолжения ряда Тейлора указанной ветви решения системы (1), полученного ранее в [2].

**Теорема 1.** *Для любого набора из $n$ пар $\mu^{(i)},\ \nu^{(i)} \in A^{(i)}$ показателей системы (1) с условием невырожденности матрицы*

$$\varkappa = \left(\varkappa_j^{(i)}\right) := \left(\mu_j^{(i)} - \nu_j^{(i)}\right)$$

*существует ряд Пюизо, представляющий мономиальную функцию $\widehat{y}(x)$, носитель которого имеет вид*

$$S = \left\{(m_1, \ldots, m_n) : m_i = -\langle \gamma_i, k\rangle - |\varkappa_i^{-1}|,\ k \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}\right\},$$

*здесь $\gamma_i$– $i$-я строка матрицы $\Gamma := \omega^{-1} \cdot \varkappa$, $|\varkappa_i^{-1}|$ – сумма элементов строки с номером $i$ матрицы $\varkappa^{-1}$.*

Метод нахождения носителей рядов Пюизо основан на свойстве полиоднородности решения системы. Исследуемые ряды представляют ветвь многозначной алгебраической функции с ветвлением на множестве нулей дискриминанта системы. Следовательно, образующие конусов носителей рядов определяют нормальные векторы к гиперграням многогранника Ньютона дискриминанта системы (1).

Результаты, представленные в докладе, получены совместно с И.А. Антиповой и В.Р. Куликовым.

## Список литературы


[1] И. А. Антипова, Е. Н. Михалкин, Аналитические продолжения общей алгебраической функции с помощью рядов Пюизо. Тр. МИАН, 2012, 279, 9-19.

[2] В. Р. Куликов, В. А. Степаненко, О решениях и формулах Варинга для системы $n$ алгебраических уравнений от $n$ неизвестных. Алгебра и анализ. 2014, 26, 5, 200-213.


## Аппроксимации Эрмита–Паде для мероморфных функций на компактной римановой поверхности


**А. В. Комлов**

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН*

E-mail: komlov@mi.ras.ru


В докладе мы рассмотрим задачу восстановления значений многозначной алгебраической функции с помощью полиномов Эрмита–Паде 1-го рода.

Более точно. Пусть $\mathfrak{R}$ — компактная риманова поверхность, $\pi : \mathfrak{R} \to \widehat{\mathbb{C}}$ — $(m+1)$–листное голоморфное разветвленное накрытие сферы Римана $\widehat{\mathbb{C}}$, $m \geqslant 1$, и $\Sigma$ — множество критических значений проекции $\pi$. Пусть $f$ — мероморфная функция на $\mathfrak{R}$ и, функции $1, f, f^2, \dots, f^m$ независимы над полем рациональных функций $\mathbb{C}(z)$. Пусть $\circ$ — произвольная точка на $\mathfrak{R}$, которая не является критической точкой проекции $\pi$. Без потери общности считаем, что $\circ \in \pi^{-1}(\infty)$, и обозначим $\boldsymbol{\infty}^{(0)} := \circ$. Предположим, что нам известен росток функции $f$ в точке $\boldsymbol{\infty}^{(0)}$. Точнее, предположим, что мы знаем тейлоровское разложение в окрестности $\infty$ ростка $f_\infty(z) := f(\pi_0^{-1}(z))$, где $\pi_0$ — биголоморфное ограничение $\pi$ на окрестность точки $\boldsymbol{\infty}^{(0)}$.

Наша цель восстановить значения исходной функции $f$ по ростку $f_\infty$ как можно в большей области на $\mathfrak{R}$. Для удобства предположим, что росток $f_\infty(z)$ голоморфен в $\infty$ и $\infty \notin \Sigma$. Определим *полиномы Эрмита–Паде 1-го рода* $Q_{n,0}, \dots, Q_{n,m}$ порядка $n \in \mathbb{N}$ для набора ростков $[1, f_\infty, \dots, f_\infty^m]$ в точке $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ следующим образом: $\deg Q_{n,j} \leqslant n$, $j = 0, \dots, m$, по крайней мере один из $Q_{n,j} \not\equiv 0$ и в $\infty$ выполнено следующее асимптотическое соотношение:

$$Q_{n,0}(z) + \sum_{j=1}^{m} f_\infty^j(z) Q_{n,j}(z) = O\left(\frac{1}{z^{m(n+1)}}\right) \quad \text{при } z \to \infty.$$

Следуя Наттоллу (см. [1]), определим разбиение римановой поверхности $\mathfrak{R}$ на листы. Рассмотрим на $\mathfrak{R}$ функцию $u(\mathbf{z})$ — гармоническую в $\mathfrak{R} \setminus \pi^{-1}(\infty)$ и имеющую в точках множества $\pi^{-1}(\infty)$ логарифмические особенности следующего вида:

$$u(\mathbf{z}) = -m \log|z| + O(1), \quad \mathbf{z} \to \boldsymbol{\infty}^{(0)},$$
$$u(\mathbf{z}) = \log|z| + O(1), \quad \mathbf{z} \to \pi^{-1}(\infty) \setminus \boldsymbol{\infty}^{(0)},$$

где $z = \pi(\mathbf{z})$. Для точки общего положения $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus (\Sigma \cup \infty)$ ее прообраз $\pi^{-1}(z)$ состоит из $m+1$ различных точек на римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Пусть $u_0(z), \dots, u_m(z)$ — значения функции $u$ в этих точках, упорядоченные по неубыванию:

$$u_0(z) \leqslant u_1(z) \leqslant \cdots \leqslant u_{m-1}(z) \leqslant u_m(z). \tag{1}$$

Если $j$-е и $(j1)$-е неравенства в (1) строгие, мы включаем во множество $\mathfrak{R}^{(j)}$ ($j$-й лист поверхности $\mathfrak{R}$) точку $\mathbf{z}^{(j)} \in \pi^{-1}(z)$ такую, что $u(\mathbf{z}^{(j)}) = u_j(z)$. (В противном случае, ни одна точка из множества $\pi^{-1}(z)$ в $\mathfrak{R}^{(j)}$ не включается.) Через $F_j$, $j = 1, \dots, m$, обозначим множество тех точек $z$, в которых $j$-е неравенство в (1) обращается в равенство.

**Теорема.** *Пусть* $w_{n,1}(z), w_{n,2}(z), \dots, w_{n,m}(z)$ — $m$ *решений алгебраического уравнения*

$$w^m + \frac{Q_{n,m-1}(z)}{Q_{n,m}(z)} w^{m-1} + \cdots + \frac{Q_{n,1}(z)}{Q_{n,m}(z)} w + \frac{Q_{n,0}(z)}{Q_{n,m}(z)} = 0. \tag{2}$$

*Тогда для любого компакта* $K \in \mathbb{C} \setminus F_m$ *имеем*

$$\{w_{n,1}(z), w_{n,2}(z), \dots, w_{n,m}(z)\} \xrightarrow{\text{cap}} \{f(\mathbf{z}^{(0)}), f(\mathbf{z}^{(1)}), \dots, f(\mathbf{z}^{(m-1)})\}, \quad z \in$$

Символ $\xrightarrow{\text{cap}}$ означает сходимость по (логарифмической) емкости.

Таким образом с помощью решений уравнений (2) мы асимптотически восстанавливаем значения функции $f$ на первых $m$ листах разбиения Наттолла поверхности $\mathfrak{R}$ (то есть на всех листах кроме последнего) вне прообраза компакта $F_m$.

Доклад основан на совместной работе с Р. В. Пальвелевым, С. П. Суетиным и Е. М. Чиркой [2].

## Список литературы

[1] J. Nuttall, Hermite–Padé approximants to functions meromorphic on a Riemann surface, Journal of Approximation Theory. 1981. V. 32:3. P. 233–240.

[2] А. В. Комлов, Р. В. Пальвелев, С. П. Суетин и Е. М. Чирка, Аппроксимации Эрмита–Паде для мероморфных функций на компактной римановой поверхности, УМН. 2017. т. 72:4. С. 95–130.

# Критерий сходимости интегралов Меллина-Барнса для мономиальной функции решения системы алгебраических уравнений

**В. Р. Куликов**[1]

*Сибирский федеральный университет*

E-mail: v.r.kulikov@mail.ru

Х. Меллин в 1921 году привел интеграл Меллина-Барнса [1], представляющий решение $y(x)$ приведенного алгебраического уравнения вида

$$y^n + x_1 y^{n-1} + \ldots + x_{n-1} y - 1 = 0.$$

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18-31-00193.

Этот интеграл имеет непустую область сходимости, она определяется условиями на аргументы $\theta_j = \operatorname{Arg} x_j$. Полная область сходимости такого интеграла была получена сравнительно недавно в статье И.А. Антиповой [3].

В настоящей статье речь идет об аналогичных исследованиях в многомерной ситуации. Рассмотрим систему алгебраических уравнений вида

$$y^{\omega^{(j)}} + \sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} x_\lambda^{(j)} y^\lambda - 1 = 0,\ j = 1,\ldots,n, \tag{1}$$

где $\Lambda^{(j)} \subset \mathbb{Z}^n$, а $\omega = (\omega^{(1)}|\ldots|\omega^{(n)})$ — невырожденная $n\times n$-матрица. Также введем обозначение $\Lambda := \bigsqcup_{j=1}^{n} \Lambda^{(j)}$ для дизъюнктной суммы множеств $\Lambda^{(j)}$. Мощность множества $\Lambda$ обозначим $N$. Множество коэффициентов системы (1) пробегает векторное пространство $\mathbb{C}^\lambda \cong \mathbb{C}^N_x$, в котором координаты точек $x = (x_\lambda)$ индексируются элементами $\lambda \in \Lambda$. Группу координат, соответствующую индексам $\lambda \in \Lambda^{(i)}$ мы выделяем записью $x_\lambda^{(i)}$, при этом отождествляя $\mathbb{C}^\Lambda$ с пространством $\mathbb{C}^{\Lambda^{(1)}} \times \ldots \times \mathbb{C}^{\Lambda^{(n)}}$.

Множество $\Lambda$ также будем трактовать как матрицу

$$\Lambda = \left(\Lambda^{(1)},\ldots,\Lambda^{(n)}\right) = \left(\lambda^1,\ldots,\lambda^N\right),$$

столбцами которой являются векторы $\lambda^k = \left(\lambda_1^k,\ldots,\lambda_n^k\right)$ из показателей мономов системы (1). Здесь имеется ввиду, что блок $\Lambda^{(i)}$ матрицы $\Lambda$ соответсвтует $i$-му уравнению системы (1), а нумерация столбцов $\lambda^k$ внутри каждого из блоков $\Lambda^{(i)}$ произвольная, но фиксированная. Также, обозначим $\overline{\Lambda^{(j)}} = (\Lambda^{(j)}|\omega^{(j)})$.

Нас будет интересовать ветвь решения $y(x) = (y_1(x),\ldots,y_n(x))$ системы (1) с условием $y(0) = (1,\ldots,1)$, которую назовем *главным решением*. Следуя работам [2], [4], моному $y^\mu = y_1^{\mu_1}\ldots y_n^{\mu_n}$ главного решения $y = y(x)$ данной системы поставим в соответствие интеграл Меллина-Барнса:

$$y^{\mu} \to \frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^N} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\omega^{-1}\mu - \omega^{-1}\Lambda u)}{\Gamma(\omega^{-1}\mu - \omega^{-1}\Lambda u + \chi u + I)} Q(u) x^{-u} du, \qquad (2)$$

здесь $u = (u_1, \ldots, u_N)$ — $N$-вектор, а $\Gamma(u) = \Gamma(u_1) \cdot \ldots \cdot \Gamma(u_N)$, а $Q(u)$ — многочлен выражаемый определителем.

Интеграл (2) получается формальным вычислением преобразования Меллина для $y^{\mu}(x)$ с помощью линеаризирующей замены переменных.

**Теорема 1.** *Интеграл* (2) *имеет непустую область сходимости тогда и только тогда, когда все определители* $(\overline{\lambda^{(1)}}| \ldots |\overline{\lambda^{(n)}})$, *где* $\overline{\lambda^{(j)}} \in \overline{\Lambda^{(j)}}$, *имеют один и тот же знак.*

В доказательстве сформулированной теоремы используется результат Л. Нильсон, М. Пассаре и А.К. Циха (см. [5, раздел 4.4.1]) о множестве сходимости интеграла Меллина-Барнса. Кроме того важную роль в доказательстве играет теорема о разбиении пространства $\mathbb{R}^n$ на многогранные углы [6, с. 134].

## Список литературы

[1] H.J. Mellin, Résolution de l'équation algébrique générale a l'aide de la fonction gamma, C.R.Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 172(1921), 658–661.

[2] И. А. Антипова, Выражение суперпозиции общих алгебраических функций через гипергеометрические ряды, Сиб. матем. журн., 44:5 (2003), 972–980.

[3] И. А. Антипова, Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений, Матем. сб., 198:4 (2007), 3–20.

[4] В. А. Степаненко, О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций, Вестн. Красноярск. гос. ун-та, 2003, 1, 35–48.

[5] Т. М. Садыков, А. К. Цих, Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных, - М.: Наука, 2014. - 408 с.

[6] В. В. Прасолов, Задачи и теоремы линейной алгебры,– Новое изд., перераб. – М.: МЦНМО, 2015. – 576 с.

## О некоторых обобщениях формулы Плана

**В. И. Кузоватов**

*Сибирский федеральный университет*

E-mail: kuzovatov@yandex.ru

Классическая формула Плана [1] выражает сумму значений в целых точках голоморфной и ограниченной (для всех значений $z$, для которых $x_1 \leq \operatorname{Re} z \leq x_2$, $x_1, x_2$ – целые числа) функции $\varphi(z)$ через некоторые интегралы:

$$\frac{1}{2}\varphi(x_1) + \varphi(x_1+1) + \varphi(x_1+2) + \ldots + \varphi(x_2-1) + \frac{1}{2}\varphi(x_2) =$$
$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(z)\, dz + \frac{1}{i}\int\limits_0^{\infty} \frac{\varphi(x_2+iy) - \varphi(x_2-iy) + \varphi(x_1-iy) - \varphi(x_1+iy)}{e^{2\pi y}-1}\, dy.$$

Данная формула имеет существенное значение при нахождении функционального соотношения [2] для классической дзета-функции Римана.

В работе получено [3] некоторое обобщение приведенной классической формулы Плана. Доказанное обобщение формулы Плана может быть использовано при получении функционального соотношения для дзета-функции корней некоторого класса целых функций [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-31-00019).

## Список литературы


[1] E. T. Whittaker, G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.

[2] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford Univ. Press, Oxford, 1951.

[3] В. И. Кузоватов, Об одном обобщении формулы Плана, Известия вузов. Математика, 2018, №5, 41-51.

[4] A. M. Kytmanov, S. G. Myslivets, On the zeta-function of systems of nonlinear equations, Siberian Math. J., 48(5), 2007, 863-870.


# Продолжимость кратных степенных рядов в секториальную область


**А. Д. Мкртчян**

*Сибирский федеральный университет*

E-mail: alex0708@bk.ru


Для кратного степенного ряда с центром в начале координат рассматривается вопрос о его аналитической продолжимости в секториальную область. Условие продолжимости формулируется в терминах свойств мероморфной функции, интерполирующей коэффициенты ряда. Для рядов одного переменного указанный вопрос исследовался в статьях Е. Линделефа, Н. Аракеляна и др.

Рассмотрим $n$-кратный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} f_k z^k, \tag{1}$$

где $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$. Мы говорим, что функция $\varphi(\zeta)$ интерполирует коэффициенты степенного ряда ((1)), если

$$\varphi(k) = f_k \text{ для всех } k \in \mathbb{N}^n \subset \mathbb{C}^n.$$

Комплексные переменные $\zeta_j$ запишем в виде $\zeta_j = \xi_j i\eta_j$, таким образом $\xi$ — это векторы вещественного подпространства в $\mathbb{C}^n$, а $\eta$ — векторы мнимого подпространства.
Мы предполагаем, что на мнимом подпространстве интерполирующая функция $\varphi$ допускает оценку $|\varphi(i\eta)| \leq \tilde{g}(\eta)$ с кусочно-афинной функцией

$$\tilde{g}(\eta) = \sum_{m=1}^{p} \varepsilon_m |a_m^1 \eta_1 + ... + a_m^n \eta_n + a_m^0|. \tag{2}$$

Вместе с ней рассмотрим кусочно-линейную функцию

$$g(\eta) = \sum_{m=1}^{p} \varepsilon_m |a_m^1 \eta_1 + ... + a_m^n \eta_n| + \pi \sum_{k=1}^{n} (\eta_k - |\eta_k|), \quad \varepsilon_m = \pm 1 \tag{3}$$

которая имеет изломы (точки нелинейности) на множестве гиперплоскостей

$$a_m^1 \eta_1 + ... + a_m^n \eta_n = 0, \ m = 1, ..., p \ \text{ и } \ \eta_k = 0, \ k = 1, ..., n.$$

Эти гиперплоскости разбивают $R^n$ на конусы, которые определяют веер. Обозначим $\pm\mu_1, ..., \pm\mu_d$ - одномерные образующие этого веера. С помощью их определяется двойственный к вееру многогранник

$$P = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : (\pm\mu_\nu, \alpha) \geq g(\pm\mu_\nu)\}, \ \nu = 1, ..., d.$$

**Теорема.** *Пусть интерполирующая функция $\varphi(\zeta)$, голоморфная в $(-\delta + \mathbb{R}_+)^n + i\mathbb{R}^n$, удовлетворяет условиям*

$$1) \ \log|\varphi(re^{i\theta})| \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} ((\pi - \delta)|\sin\theta_j| + b\cos\theta_j)\, r_j + C \ \textit{ в } \mathbb{R}^n_{\geq 0} + i\mathbb{R}^n; \ \textit{ для } b \in \mathbb{R}_+;$$
$$2) \ \log|\varphi(\xi + i\eta)| \leq \tilde{g}(\eta) \ \textit{ в } \ \zeta \in [-\delta, 0]^n + i\mathbb{R}^n.$$

*Тогда сумма ряда аналитически продолжается в секториальную область $Arg^{-1}(P^o)$, где $P^o$— внутренность многогранника $P$.*

# О построении общего решения линейной системы дифференциальных уравнений

**М. Г. Мурадян**

*Армянский государственный экономический университет*

E-mail: maxim_muradyan@yahoo.com

Пусть фундаментальная система решений линейной системы с постоянными коэффициентами состоит из $m$ решений, стремящихся к нулю в $\infty$ и $k$ решений – неограниченных в $\infty$. Такую систему удобно записывать в форме

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= Ax + By \\ -\frac{dy}{d\tau} &= Cx + Dy\,, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ – матрицы размерности $m \times n$, $m \times k$, $k \times m$ и $k \times k$ соответственно. $x(\tau)$ и $y(\tau)$ $m$-мерные и $k$-мерные вектор-функции соответственно.

Из-за неустойчивости, построение общего решения системы (1) сопряжено известными трудностями. В докладе предлагается способ преодоления этих трудностей.

Наряду с (1) рассматривается матричная система

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= AX + BY \\ -\frac{dY}{d\tau} &= CX + DY\,, \end{aligned} \tag{2}$$

относительно матриц-функций $X$ и $Y$, размерности $m \times m$ и $k \times m$ соответственно. Следующие две задачи для уравнения (2) однозначно разрешимы.

**Задача a.** *Уравнение* (2) *рассматривается на полуоси* $[0; \infty]$, *к нему просоеденены условия* $X(0) = I$ *(*$I$ *– единичная матрица),* $Y(\tau) \to 0$, *при* $\tau \to \infty$.

**Задача b.** *Уравнение (2) рассматривается на $(-\infty; r]$, $r > 0$, к нему просоеденены условия $Y(r) = I$, $X(\tau) \to 0$, при $\tau \to -\infty$.*

Пусть $X^+(\tau)$, $Y^+(\tau)$ – решение задачи a, а $X^-(\tau)$, $Y^-(\tau)$ – решение задачи b. С задачами a и b тесно связаны следующие матричные уравнения относительно матрицы $\rho$:

$$\rho A + D\rho + \rho B\rho + C = 0, \tag{3}$$

$$A\rho + \rho D + \rho C\rho + B = 0. \tag{4}$$

**Лемма 1.** *Матричное уравнение (3) имеет такое решение $\rho^+$ (размерности $k \times m$), что $X^+(\tau)$ определяется из задачи Коши*

$$\frac{dX}{d\tau} = (A + B\rho^+)X, \qquad X(0) = I, \tag{5}$$

*причем $X^+(\tau) \to 0$, при $\tau \to \infty$.*

**Лемма 2.** *Матричное уравнение (4) имеет такое решение $\rho^-$ (размерности $m \times k$), что $Y^-(\tau)$ определяется из задачи Коши*

$$-\frac{dY}{d\tau} = (D + C\rho^-)Y, \qquad Y(r) = I, \tag{6}$$

*причем $Y^-(\tau) \to 0$, при $\tau \to -\infty$.*

**Теорема.** *Общее решение системы (1) на промежутке $[0; r]$ представляется в виде*

$$\begin{aligned} x(\tau) &= X^+(\tau)u + \rho^- Y^-(\tau)v, \\ y(\tau) &= \rho^+ X^+(\tau)u + Y^-(\tau)v, \end{aligned} \tag{7}$$

*где $u$ и $v$ произвольные векторы размерности $m$ и $k$ соответственно.*

На основании сказанного можно сформулировать следующий способ построения общего решения системы (1).

1) Из матричных уравнений (3) и (4) определяются матрицы $\rho^+$ и $\rho^-$;

2) Из устойчивых задач Коши (5) и (6) определяются матрицы функции $X^+(\tau)$ и $Y^-(\tau)$ соответственно;
3) По формулам (7) определяется общее решение на промежутке $[0; r]$.

Одним из преимуществ предложенного метода является малая размерность матричных задач. Однако его основным достоинством явлется устойчивость задач (5) и (6).

Отметим, что формулы (7) очень удобны для решения различных краевых задач для системы (1).

Под описанную систему укладываются гамильтоновы (канонические) системы, если функция Гамильтона есть вещественная квадратичная форма переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Уравнением (1) моделируется также стационарная задача когерентного рассеяния в однородном плоском слое. В этом случае уравнение (3) представляет собой аналог известного уравнения Амбарцумяна для полубесконечной среды и матрица $\rho^+$ является пределом возрастающих итераций.

## Список литературы

[1] М. Г. Мурадян, К определению операторов отражения и пропускания в плоском слое, Ж. Вычисл. матем. и мат. физ., 2014, том 54(3), 529–535.

[2] М. Г. Мурадян О решении одной задачи теории переносз, Ж. Вычисл. матем. и мат. физ., 1993, том 33 (2), 271–282.

## Формулы Варинга для одного вида систем алгебраических уравнений

**Е. К. Мышкина**

*Институт математики и фундаментальной информатики СФУ*

E-mail: elfifenok@mail.ru

Рассмотрим систему $n$ уравнений от $n$ неизвестных

$$f_1(z) = \cdots = f_n(z) = 0.$$

Левая часть каждого уравнения системы — голоморфная в окрестности начала координат функция. Разложим функции $f_j(z)$ в ряд Тейлора с центром в начале координат

$$f_j(z) = P_j(z) + Q_j(z), j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $P_j(z)$ – младшая однородная часть степени $m_j$. Будем предполагать, что система многочленов

$$P_1, \ldots, P_n \tag{2}$$

невырождена, то есть ее общим нулем является только начало координат. Тогда известно, что для почти всех малых $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $r_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$ множество

$$\Gamma_P(r) = \{z\colon |P_j(z)| = r_j,\ j = 1, \ldots, n\}$$

является гладким компактным циклом размерности $n$.

При некоторых дополнительных условиях на систему многочленов ((2)) множество $\Gamma_P(r)$ не пересекает координатные плоскости, и определен вычетный интеграл

$$J_\gamma = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_P(r)} \frac{1}{z^{\gamma+I}} \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n}.$$

**Теорема [2, Теорема 1].**

$$J_\gamma = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\|\alpha\| \leqslant \|\gamma\|+n} (-1)^{\|\alpha\|} \int_{\Gamma_P} \left[ \frac{\Delta \cdot Q^\alpha \cdot dz}{z^{\gamma+I} \cdot P^{\alpha+I}} \right],$$

*где* $\Delta$ *— якобиан системы ((1)).*

Рассмотрим теперь алгебраический случай: когда все функции $f_j$ являются многочленами. Следуя стратегии статьи [1], мы наложим ряд ограничений на многочлены $P$ и $Q$: 1) система ((2)) не имеет общих бесконечно удаленных корней в компактификации комплексного пространства $\overline{\mathbb{C}^n}$; 2) верны неравенства

$$\deg_{z_j} P_j < \deg_{z_j} Q_j,\ \deg_{z_k} P_j > \deg_{z_k} Q_j =: s_j^k \text{ при } k \neq j.$$

Сделаем во всех функциях $f_j(z)$ замену $z_i = \dfrac{1}{w_i}$, $i = 1, \ldots, n$, предполагая, что все $w_i \neq 0$. Получим

$$f_j\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right) = \frac{1}{w_1^{m_j^1} \cdots w_j^{s_j^j} \cdots w_n^{m_j^n}} \cdot \left(\tilde{P}_j(w) + \tilde{Q}_j(w)\right) =$$
$$= \frac{1}{w_1^{m_j^1} \cdots w_j^{s_j^j} \cdots w_n^{m_j^n}} \cdot \tilde{f}_j(w).$$

Будем также считать, что система многочленов

$$\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n \tag{3}$$

невырождена (достаточное условие этого факта – Лемма 4 [2]). При сделанных ограничениях исходная система имеет конечное число корней ([2, Теорема 2]), и их степенная сумма с отрицательными показателями представляется вычетным интегралом, который в свою очередь выражается через коэффициенты исходной системы. Таким образом, верна теорема.

**Теорема [2, Теорема 6].**

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot z_{j2}^{\gamma_2+1} \cdots z_{jn}^{\gamma_n+1}} =$$
$$= \sum_{\|K\| \leqslant \|\gamma\|+n} \frac{(-1)^{\|K\|+n} \prod\limits_{s=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_{sj}\right)!}{\prod\limits_{s,j=1}^{n} (k_{sj})!} \mathfrak{M}\left[\frac{w^{\gamma+I} \cdot \tilde{\Delta} \cdot \det A \cdot Q^{\alpha} \prod\limits_{s,j=1}^{n} a_{sj}^{k_{sj}}}{\prod\limits_{j=1}^{n} w_j^{\beta_j N_j + \beta_j + N_j}}\right],$$

*где $p$ – число корней исходной системы, не лежащих на координатных плоскостях, $K$ пробегает множество целочисленных матриц с неотрицательными элементами $k_{sj}$, $\|K\| = \sum\limits_{s,j=1}^{n} k_{sj}$, $\tilde{\Delta}$ – якобиан системы ((3)), $A$ – полиномиальная матрица из элементов $a_{jk}$ представления*

$$w_j^{N_j+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} f_k, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$\alpha_j = \sum\limits_{s=1}^{n} k_{sj}$, $\beta_s = \sum\limits_{j=1}^{n} k_{js}$, *а функционал $\mathfrak{M}$ сопоставляет многочлену Лорана его свободный член.*

Последняя формула является многомерным аналогом формулы Варинга для алгебраических систем уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00019).

## Список литературы

[1] A. A. Kytmanov, A. M. Kytmanov,E. K. Myshkina, Residue Integrals and Waring's Formulas for a Class of Systems of Transcendental Equations in $\mathbb{C}^n$, Journal of Complex Variables and Elliptic Equations, 2018, v. 63, no. 4.

[2] А. М. Кытманов, Е. К. Мышкина, Вычетные интегралы и формулы Варинга для алгебраических и трансцендентных систем уравнений (принята к публикации в «Известия вузов. Математика»).

# О взаимосвязи энергия-вероятность в моделях классической статистической физики

**Б. С. Нахапетян**

*Институт математики НАН РА*

E-mail: nahapet@instmath.sci.am

В докладе излагается новая точка зрения на математические основы статистической механики бесконечных систем. В качестве базового вводится понятие функции энергии перехода физической системы из одного состояния в другое. Эта функция, в отличие от гамильтониана, имеет ясный физический смысл и описывается своими внутренними, физически обоснованными свойствами. Приводимая в докладе аргументация напрямую связана с решением проблемы Добрушина задания спецификаций согласованными системами одноточечных распределений с бесконечными граничными условиями. Предлагаемый подход позволил дать в общей форме строгое математическое определение гамильтониана и на этой основе обосновать формулу Гиббса, связывающую потенциальную энергию состояния физической системы с вероятностью нахождения её в этом состоянии. Кроме того, данный подход позволяет изложить основы теории гиббсовских случайных полей без привлечения понятия потенциала, что открывает возможность напрямую применять вероятностные методы ко многим задачам статистической физики.

Работа выполнена совместно с С. Дашяном, Университет Лилля, Франция.

## Stochastic Tomography of convex bodies in $\mathbf{R}^n$

**V. K. Ohanyan**
*Yerevan State University*
E-mail: victoohanyan@ysu.am

Let $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ be the $n$-dimensional Euclidean space, $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$ be a bounded convex body with inner points, and $V_n$ be the n-dimensional Lebesgue measure in $R^n$.

Let $S^{n-1}$ denote the $(n-1)$-dimensional sphere of radius 1 centered at the origin in $R^n$. We consider a random line which is parallel to $\mathbf{u} \in S^{n-1}$ and intersects $\mathbf{D}$, that is, an element from the set: $\Omega_1(\mathbf{u}) = \{$lines which are parallel to $\mathbf{u}$ and intersect $\mathbf{D}\}$. Let $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$ be the orthogonal projection of $\mathbf{D}$ onto the hyperplane $\mathbf{u}^\perp$ (here $\mathbf{u}^\perp$ stands for the hyperplane with normal $\mathbf{u}$, passing through the origin).

A random line which is parallel to $\mathbf{u}$ and intersects $\mathbf{D}$ has an intersection point (denoted by $x$) with $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$. We can identify the points of $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$ and the lines which intersect $\mathbf{D}$ and are parallel to $\mathbf{u}$, meaning that we can identify the sets $\Omega_1(\mathbf{u})$ and $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$. Assuming that the intersection point $x$ is uniformly distributed over the convex body $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$, we can define the following distribution function.

**Definition 1.** *The function*

$$F(\mathbf{u}, t) = \frac{V_{n-1}\{x \in \Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D} : V_1(g(\mathbf{u}, x) \cap \mathbf{D}) < t)\}}{b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})}$$

*is called orientation-dependent chord length distribution function of* $\mathbf{D}$ *in direction* $\mathbf{u}$ *at point* $t \in R^1$, *where* $g(\mathbf{u}, x)$ *is the line which is parallel to* $\mathbf{u}$ *and intersects* $\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D}$ *at point* $x$ *and* $b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) = V_{n-1}(\Pi r_{\mathbf{u}^\perp}\mathbf{D})$.

**Definition 2.** *The function*

$$C(\mathbf{D}, h) = V_n(\mathbf{D} \cap (\mathbf{D} + h)), \quad h \in \mathbf{R}^n,$$

*is called the covariogram of the body* $\mathbf{D}$. *Here* $\mathbf{D} + h = \{x + h, \, x \in \mathbf{D}\}$.

Observe that each vector $h \in \mathbf{R}^n$ can be represented in the form $h = (\mathbf{u}, t)$, where $\mathbf{u}$ is the direction of $h$, and $t$ is the length of $h$.

The problem of finding the measure of the segments of a constant length that are contained in $\mathbf{D}$ has no simple solution and depends on the shape of $\mathbf{D}$. Note that explicit forms for orientation-dependent chord length distribution function $F(u, t)$ for triangles, ellipses, regular polygons and parallelograms were obtained in the paper [1].

Denote by $\mathbf{P}(L(\mathbf{u}, \omega) \subset \mathbf{D})$ probability, that random segment $L(\mathbf{u}, \omega)$ (of fixed length $l$ and direction $\mathbf{u}$) entirely lying in body $\mathbf{D}$.

**Proposition 1.** *(see [2]). Probability $\mathbf{P}(L(\mathbf{u}, \omega) \subset \mathbf{D})$ in terms of distribution function $F(\mathbf{u}, z)$ has the following form:*

$$\mathbf{P}(L(\mathbf{u}, \omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{V_n(\mathbf{D}) - l\, b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u}) + b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})) \int_0^l F(\mathbf{u}, z)\, dz}{V_n(\mathbf{D}) + l\, b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})},$$

*while in the terms of the covarigramm of body $\mathbf{D}$ has the form:*

$$\mathbf{P}(L(\mathbf{u}, \omega) \subset \mathbf{D}) = \frac{C(\mathbf{D}, \mathbf{u}, l)}{V_n(\mathbf{D}) + l\, b_{\mathbf{D}}(\mathbf{u})},$$

## References

[1] A. Gasparyan and V. K. Ohanyan, Orientation-dependent distribution of the length of a random segment and covariogram, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of sciences), 50 (2), 90 - 97, 2015.

[2] N. G. Aharonyan, V. K. Ohanyan, Calculation of geometric probabilities using Covariogram of convex bodies, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), 53 (2), pp. 112–120, 2018.

# Абелевы модели Хиггса на компактных римановых поверхностях

**Р. В. Пальвелев**
*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН*
E-mail: palvelev@mi.ras.ru

Пусть $X$ — компактная риманова поверхность, $L \to X$ — комплексное линейное (т.е. одномерное) расслоение над $X$. Предположим, что на $X$ задана метрика $g$, согласованная с комплексной структурой, пусть $\omega = \omega_g$ — соответствующая кэлерова форма (форма объема). Пусть также на $L$ фиксирована эрмитова метрика $h$.

Статическая абелева модель Хиггса в расслоении $L$ задается *функционалом потенциальной энергии* $V$, определенным на парах $(A, \Phi)$, где $A$ — $U(1)$-связность (эрмитова связность) в $L$, а $\Phi$ — гладкое сечение расслоения $L$. Обозначим через $d_A$ внешнюю ковариантную производную, задаваемую связностью $A$, а через $F_A$ форму кривизны связности. Тогда

$$V(A, \Phi) := \frac{1}{2} \int\limits_X \left( |d_A \Phi|^2 + |F_A|^2 + \frac{1}{4}(|\Phi|_h^2 - 1)^2 \right) \omega.$$

Функционал $V$ инвариантен относительно *(статических) калибровочных преобразований*, задаваемых формулами

$$A \longmapsto A - f^{-1} df, \quad \Phi \longmapsto f\Phi,$$

где $f \in C^\infty(X, U(1))$.

Будем предполагать, что число Черна расслоения $L$ — натуральное число: $c_1(L) =: N \in \mathbb{N}$, и что выполнено условие разрешимости $c_1(L) \leqslant \dfrac{1}{4\pi} Vol_g(X)$. Тогда, как доказал С.Брэдлоу в 1990г., все решения статической модели с точностью до калибровочной эквивалентности задаются нулями сечения $\Phi$. Более точно, пусть заданы $N$ точек $Z_1, \ldots, Z_N \in X$ (какие-то из них могут совпадать).

Тогда существует единственное с точностью до калибровочной эквивалентности решение $(A, \Phi)$ статической модели такое, что нули $\Phi$ — это точки $Z_j$ (с учетом кратности). Точки $Z_j$ называются положениями вихрей. Пространство модулей статических решений $\mathcal{M}_N$ (то есть пространство калибровочных классов решений) естественнно отождествляется с $N$-й симметрической степенью поверхности $X$:

$$\mathcal{M}_N = \mathsf{Sym}^N X.$$

Пусть теперь $(X, g, L, h)$ — статическая модель Хиггса на компактной римановой поверхности $X$. Тогда прямое произведение $L \times \mathbb{R}$ есть расслоение над $X \times \mathbb{R}$. Пусть $t$ — координата на $\mathbb{R}$. Рассмотрим пары $(\mathbb{A}, \Phi)$, где $\mathbb{A}$ — $U(1)$-связность в $L \times \mathbb{R}$, а $\Phi$ — сечение этого расслоения. Тогда для любой локальной координаты $z$ на $X$ форма связности $\mathbb{A}$ запишется в виде $\mathbb{A}(z,t) = A_0(z,t)dtA(t)$, где $A(t)$ при каждом $t$ — связность в $L$, а $A_0(\cdot, t)$ — функция на $X$. Определим *функционал кинетической энергии* $T$ выражением

$$T(\mathbb{A}, \Phi) := \frac{1}{2} \int\limits_X \left\{ |\dot{A} - dA_0|^2 + |\dot{\Phi} - A_0 \Phi|^2 \right\} \omega.$$

Здесь точка обозначает производную по времени.

*Функционал действия* $\mathcal{S}(\mathbb{A}, \Phi)$ *динамической абелевой модели Хиггса* задается стандартной формулой $\mathcal{S} = \int (T - V)dt$. Динамическими решениями модели называются экстремали функционала действия $\mathcal{S}$.

Можно показать, что функционал кинетической энергии $T$ задает гладкую риманову метрику на пространстве модулей статических решений $\mathcal{M}_N$ (кинетическую метрику). Предполагается, что в моделях на компактных римановых поверхностях выполнен так называемый *адиабатический принцип*, согласно которому геодезические кинетической метрики на пространстве модулей $\mathcal{M}_N$ могут служить приближениями к «медленным» динамическим решениям модели. (В настоящее время доказательство указанного принципа получено лишь для некоторых частных случаев.)

Используя геодезическое приближение, можно получить определенные результаты о динамике положений вихрей в моделях на римановых поверхностях. В частности, удается показать, что после симметричного столкновения всех $N$ вихрей в одной точке локально происходит их рассеяние на угол $\pi/N$.

## Об одной обратной задаче нелинейной теории переноса излучения

**О. В. Пикичян**

*Бюраканская астрофизическая обсерватория*

*им. В. А. Амбарцумяна НАН РА*

E-mail: hovpik@gmail.com, hovpik@bao.sci.am

Целью представленного доклада является иллюстрация эффективности применения принципа инвариантности Амбарцумяна [1] с совместным использованием понятия так называемых «линейных образов» [2] (первое сообщение о последних см. в [3]) в нелинейных задачахтеории переноса, на примере аналитического решения одной простой нелинейной задачи.

Пусть имеется одномерная консервативно рассеивающая-поглощающая среда конечной оптической толщины $\tau_0$ состоящая из двухуровневых атомов, которая со стороны обеих своих внешних границ (левой и правой) находится под непрерывном воздействием мощных внешних возбуждающих пучков излучения интенсивностей $x$ и $y$ соответственно. Требуется определить интенсивность $I^{\pm} \equiv I^{\pm}(\tau, x, y, \tau_0)$ внутреннего поля излучения на произвольной глубине $\tau \in [0, \tau_0]$ данной среды,идущего в сторону её правой «$+$» и левой «$-$» границ. Искомая величина определяется из кинетического уравнения Больцмана записанного для «фотонного газа» (уравнение переноса излучения)

$$\frac{dI^{\pm}}{d\tau} = \pm\alpha^{\pm}\left(I^{+}, I^{-}\right), \tag{1}$$

где правая часть представляет заданную форму «интеграла столкновений». В рассматриваемом нами случае:

$$\alpha^{\pm}\left(I^{+},I^{-}\right)=\mp\frac{I^{+}-I^{-}}{2\left[1+b\cdot\left(I^{+}+I^{-}\right)\right]},\ \ d\tau=n\left(l\right)\frac{h\cdot\nu}{2}B_{12}dl, \qquad (2)$$

$$b\equiv\frac{B_{12}+B_{21}}{2A_{21}}=\frac{c^{2}}{4h\nu^{3}}\left(1+\frac{g_{2}}{g_{1}}\right),$$

где величина $l\in[0,l_0]$ – параметр геометрической глубины в среде, а обозначения микроскопических величин и характеристик элементарного объёма стандартны (см. например [4]).Добавлениемк уравнению (1) граничных условий:

$$I^{+}\big|_{\tau=0}=x,\qquad I^{-}\big|_{\tau=\tau_0}=y, \qquad (3)$$

традиционно формулируется граничная задача (1), (3). Если же заранее известно решение более частной задачи об отражении и пропусканияизлучения данной средой, то для определения поля излучения внутри среды достаточно, вместо «двухточечной» граничной задачи (1), (3), рассмотреть лишь одну из двух задач Коши с начальными условиями

$$I^{+}\big|_{\tau=0}=x,\quad I^{-}\big|_{\tau=0}=v\quad\text{или}\quad I^{+}\big|_{\tau=\tau_0}=u,\quad I^{-}\big|_{\tau=\tau_0}=y, \qquad (4)$$

где $v\equiv v\left(x,y\right)\equiv v\left(x,y,\tau_0\right)$ , $u\equiv u\left(x,y\right)\equiv u\left(x,y,\tau_0\right)$. С помощью применения нелинейной формы принципа инвариантности Амбарцумяна [1] и введённого нами «метода линейных образов»[2, 3] решение задачи отражения-пропускания было сведено к рассмотрению функционального уравнения так называемой «полной инвариантности Амбарцумяна» записанного для «линейного образа» $T\equiv\ T\left(x,y\right)\equiv T\left(x,y,\tau_0\right)$искомого решения задачи отражения-пропускания $u$ , $v$:

$$\left[k\left(x+v\right)\frac{\partial}{\partial x}+k\left(y+u\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]T=-T\cdot\frac{k\left(x+v\right)-k\left(y+u\right)}{x-y}, \qquad (5)$$

$$k\left(\xi\right)=\frac{k\left(0\right)}{1+b\xi},\quad k\left(0\right)=n\left(l\right)\frac{h\cdot\nu}{2}B_{12}. \qquad (6)$$

Интегрированиеуравнения (5) показывает, что линейный образ $T$в данной задаче зависит лишь от суммы своих аргументов $T\left(x,y\right)\equiv T\left(x+y\right)=T\left(\xi\right)$ и даётся явным выражением

$$T\left(\xi\right)=q\frac{1+b\xi}{1+qb\xi}=\frac{2\left(1+b\xi\right)}{\tau_0+2\left(1+b\xi\right)}, \tag{7}$$

где величина $q=2/\left(\tau_0+2\right)$- решение линейной задачи о пропускании излучения слоем.

Решение нелинейной задачи «отражения-пропускания» выражается через найденный линейный образ посредством выражений:

$$u\left(x,y\right)=y+\left(x-y\right)\cdot T\left(x+y\right), \quad v\left(x,y\right)=x-\left(x-y\right)\cdot T\left(x+y\right), \tag{8}$$

где зависящие от двух энергетических переменных величины $u\left(x,y\right)$ и $v\left(x,y\right)$ элементарно выражаются через новую вспомогательную функцию одной энергетической переменной $T\left(\xi\right)\equiv T\left(\xi,\tau_0\right)$ при этом $\xi\equiv x+y$. Линейный образ $T\left(\xi,\tau_0\right)$ имеет прозрачный физический смысл - представляет из себя вероятность пропускания слоем «предельной» (т. е. соответствующей линейному случаю - невозбужденному состоянию среды) оптической толщины $\tau_0$падающего на него единичного кванта или излучения «единичной мощности», когда этот слой со стороны своих обеих границ непрерывно находится под воздействием внешних возбуждающих пучков интенсивностей$(x,y)$ соответственно.Решение любой из двух задач Коши (1),(4)с использованием форм (8), (7) окончательно приводит к выражениям:

$$I^+=I^-+\left(x-y\right)\cdot T\left(x+y\right), \quad A\cdot\left(I^-\right)^2+B\cdot I^--C=0. \tag{9}$$

Коэффициенты и свободный член в квадратичном уравнении имеют вид $\left(\xi^{\pm}\equiv x\pm y\right)$ :

$$A=b\left[\tau_0+2\left(1+b\xi^+\right)\right], \quad B=\tau_0+2\left(1+b\xi^+\right)\left(1+b\xi^-\right),$$

$$C=\tau_0\left(1+bx\right)x-\tau\left(1+b\xi^+\right)\xi^-+2y\left(1+bx\right)\left(1+b\xi^+\right). \tag{10}$$

Физическимявляется решение, соответствующее положительному знаку перед дискриминантом квадратного трехчлена (9), которое удовлетворяет линейному пределу задачи.Линейная задача формально соответствует значению $b \equiv 0$ .

Таким образом из принципа инвариантности выводится функциональное уравнение «полной инвариантности Амбарцумяна» (5), из которого находится «линейный образ» решения задачи «отражения-пропускания» (7), с помощью последнего находятся интенсивности выходящего из среды излучения (8), а с их помощью формулируется задачи Коши (1), (4) и явным образом «восстанавливается» поле излучения внутри среды (9).

## Список литературы

[1] В. А. Амбарцумян, ДАН Арм. ССР, 1964, 38, №4, 225-230.

[2] H. V Pikichyan.,On the linear properties of the nonlinear radiative transfer problem, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2016, 183, pp.113-127.

[3] О. В. Пикичян, стр. 48-49, в кн: Тезисы докладов 5-ого российско-армянского совещания по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам, 28 сентября-3 октября, Ереван. 2014, 56 с.

[4] В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969, 472 с.

# Торические циклы в дополнении алгебраической кривой в 2-мерном комплексном торе

**Д. Ю. Почекутов**

*Сибирский федеральный университет*

E-mail: potchekutov@gmail.com

Хорошо известно, что в многомерном комплексном анализе при вычислении и исследовании свойств интеграла

$$\int_{\Gamma} \omega$$

от замкнутой дифференциальной формы $\omega$ на комплексном многообразии $X$, имеющей особенности на подмножестве $T \subset X$, по циклу $\Gamma$ из $X \setminus T$ возникает необходимость изучать соответствующую группу гомологий дополнения $X \setminus T$ (см. [1]). Даже в случае алгебраического подмножества $T$ комплексного пространства $X = \mathbb{C}^n$ или $X = (\mathbb{C}^{\times})^n$ такое изучение упирается в существенные топологические трудности.

В докладе мы обсуждаем тот факт, что некоторую информацию о циклах из дополнения $(\mathbb{C}^{\times})^n \setminus V$ алгебраической гиперповерхности $V \subset (\mathbb{C}^{\times})^n$ можно получить, привлекая понятия *амебы*(см. [2])

$$\mathcal{A}_V := \mathsf{Log(V)},\ \mathsf{Log}(z) := (\log|z_1|, \ldots, \ldots |z_n|),$$

и *коамебы*

$$\mathcal{A}'_V := \mathsf{Arg(V)},\ \mathsf{Arg}(z) := (\arg(z_1), \ldots, \arg(z_n)).$$

Дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ состоит из конечного числа компонент связности $E_\nu$.

Пусть $x \in E_\nu$, тогда $n$-мерный вещественный тор $\mathsf{Log}^{-1}(x_\nu)$ назовем *торическим циклом* в $(\mathbb{C}^{\times})^n \setminus V$.

Мы доказываем, что в двумерном случае, если кривая $V$ определяется *гарнаковским* многочленом (см. [3]), то торические циклы $\mathsf{Log}^{-1}(x_\nu)$ составляют гомологически независимое семейство в группе $H_2((\mathbb{C}^{\times})^2 \setminus V)$.

## Список литературы

[1] Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков, Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск, 1979. С. 128.

[2] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, Discriminants, Resultants and Multidimensional determinants. Berlin, 1994, p. 194.

[3] M. Passare, The trigonometry of Harnack curves, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 9:3 (2016), С. 347-352.

## Аналитическая механика микрополярных упругих тонких оболочек

**С. О. Саркисян**

*Ширакский государственный университет*

E-mail: s_sargsyan@yahoo.com

Развитие механики сплошной среды тесно связано с появлением обобщенных математических моделей, рассматривающих частицу материала не как материальную точку, а как более сложный объект, наделенные дополнительными свойствами микро - или наноструктурой материала.

Выдающимся этапом в развитии механики сплошной среды является монография (1909 г.) братьев Эжена и Франсуа Коссера, в которой описана модель, получившая название микрополярной среды или континуума Коссера. В отличие от классической механики сплошных сред в среде Коссера деформируемое твердое тело характеризуется вектором перемещения и вектором независимого поворота, кроме тензора деформации вводится тензор изгиба-кручения, кроме тензора напряжений-тензор моментного напряжения. Все тензоры несимметричные.

Экспериментальные работы показывают, что моментные эффекты весьма существенны для тонких пластин, оболочек и стержней. С этой точки зрения актуально построение прикладных теорий микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и стержней.

Основной подход [1,2] построения моделей тонких оболочек, пластин и стержней, получавший название прямого подхода, заключается в том, что оболочка (пластинка) с самого начала рассматривается как материальная поверхность, стержень-как материальную линию.

Фактически метод линий и поверхностей Коссера игнорирует пространственную структуру стержней, пластин и оболочек, остается в стороне вопрос о распределении напряжений и моментных напряжений по толщине или по поперечному сечению указанных тонких тел, которые, понятно, необходимы при расчетах на прочность.

В работе [3], для трехмерной краевой задачи микрополярной теории упругости в тонкой области оболочки, построена асимптотическое решение и основные свойства внутреннего итерационного процесса формулированы как адекватные гипотезы.

В данном докладе на основе этих гипотез, построена прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек. Доказываются энергетические теоремы и вариационные принципы (типа Лагранжа, Кастильяно и общий вариационный принцип типа Ху-Вашицу).

## Список литературы

[1] H. Altenbach, V. A. Eremeyev, On the linear theory of micropolar plates, Z. Angew. Math. Mech., 2009, 89, №4, 242-256.

[2] V. Eremeyev, H. Altenbach, Basics of Mechanics of Micropolar Shells, Shell-like Structures. CISM International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures, 572, Springer, 63-112.

[3] S. H. Sargsyan, Asymptotically Confirmed Hypotheses Method for the Construction of Micropolar and Classical Theories of Elastic Thin Shells, Advances in Pure Mathematics, 2015, 5, №10, 629-643.

## Квантовое исчисление и сингулярные интегральные операторы

**А. Г. Сергеев**
*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН*
E-mail: sergeev@mi.ras.ru

Одной из задач некоммутативной геометрии является перевод основных понятий анализа на язык банаховых алгебр. Этот перевод осуществляется с помощью процедуры квантования. Возникающее в результате операторное исчисление называется, следуя Конну, квантовым исчислением. В докладе будет приведен целый ряд утверждений из указанного исчисления, касающихся интерпретации идеалов Шэттена в духе некоммутативной геометрии. Основное внимание уделяется операторам Гильберта–Шмидта.

## Экстремальное свойство триангуляции Делоне и его приложения в математической физике

**Г. С. Сукиасян**
*Институт математики НАН РА*
E-mail: haik@instmath.sci.am

Актуальным способом численного решения многих нелинейных задач математической физики является метод конечных элементов. Этот метод базируется на построении сетки из треугольников. Сходимость процесса последовательных приближений при численном решении задач математической физики методом конечных элементов зависит от геометрической конфигурации треугольной сетки.

Нами доказано следующее экстремальное свойство: *Сумма котангенсов внутренних углов треугольной сетки при фиксированном множестве вершин достигает своего минимума для триангуляции Делоне.*

С помощью этого экстремального свойства получена теорема о том, что для любого множества узлов для численного решения уравнения Максвелла для электромагнитного поля методом конечных элементов оптимальной сеткой является триангуляция Делоне.

## О тяжелой квантовой частице

**Д. В. Трещев**
*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН*
E-mail: treschev@mi.ras.ru

В уравнении Шредингера, описывающем динамику волновой функции для тяжелой частицы с потенциалом на торе изучается возможность роста высших соболевских норм решения.

## Области Каратеодори, аналитическое выметание мер и плохо приближаемые функции в пространствах $L^p$

**К. Ю. Федоровский**[1]
*МГТУ им. Н. Э. Баумана (Москва, Россия)*
*СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)*
E-mail: kfedorovs@yandex.ru

В докладе, основанном на результатах работ [1] и [2] планируется обсудить понятие аналитического выметания мер, введенное Д. Хавинсоном [3] во второй половине 1980-х годов. Это понятие

[1]Автор поддержан Министерством образования и науки РФ (проекты 1.517.2016/1.4 и 1.3843.2017/4.6), Российским Фондом Фундаментальных Исследований (проекты 16-01-00674-а и 17-51-150005-НЦНИ-а) и Simons Foundation (Simons-IUM fellowship)

оказалось весьма полезным для изучения свойств мер, ортогональных рациональным функциям на компактах в комплексной плоскости. Будут представлены новые явные формулы для аналитического выметания мер в случае, когда носитель исходной меры лежит внутри данного компакта Каратеодори и рассматривается выметание на границу этого компакта. Эти формулы основаны на недавних результатах о граничном поведении конформных отображений единичного круга на области Каратеодори (см. [4, разд. 2]).

Пусть $X$ — компакт в $\mathbb{C}$, а $R(X)$ — это пространство всех функций, которые могут быть равномерно на $X$ приближены рациональными функциями комплексного переменного с полюсами, лежащими вне $X$.

Пусть $\mu$ — мера с условием $\mathrm{Supp}(\mu) \subset X^\circ$, где $X^\circ$ — это внутренность $X$. *Аналитическим выметанием* меры $\mu$ на границу $\partial X$ компакта $X$ называется такая мера $\nu$ на $\partial X$, что разность $\mu - \nu$ ортогональна к $R(X)$ и для любой меры $\widetilde{\nu}$ на $\partial X$ такой, что разность $\mu - \widetilde{\nu}$ ортогональна к $R(X)$, выполнено $\|\nu\| \leqslant \|\widetilde{\nu}\|$.

Напомним, что ограниченная область $G \subset \mathbb{C}$ называется *областью Каратеодори*, если $\partial G = \partial G_\infty$, где $G_\infty$ — это неограниченная связная компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$. Любая область Каратеодори односвязна и обладает свойством $G = (\overline{G})^\circ$. Обозначим через $\partial_a G$ множество достижимых граничных точек области $G$.

Имеет место следующее утверждение: *Пусть $G$ — область Каратеодори, $f$ — некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на $G$, и пусть $\mu$ — мера с условием $\mathrm{Supp}(\mu) \subset G$, а $\nu$ — это аналитическое выметание $\nu$ меры $\mu$ на $\partial G$. Тогда мера $\nu$ сосредоточена на $\partial_a G$ и имеет вид*

$$\nu = \frac{1}{2i}(\widehat{\eta} \circ f^{-1})\,\omega - \frac{1}{2i}(h^* \circ f^{-1})\,\omega, \tag{1}$$

*где $\eta = f^{-1}(\mu)$, символом $\widehat{\eta}$ обозначено преобразование Коши меры $\eta$, а функция $h^* \in H^1$ (класс Харди в круге $\mathbb{D}$ и на единичной* *окружности* $\mathbb{T}$) *— это решение экстремальной задачи*

$$\|\widehat{\eta} - h^*\|_{L^1(\mathbb{T})} = \inf_{h \in H^1} \|\widehat{\eta} - h\|_{L^1(\mathbb{T})}. \tag{2}$$

В рассматриваемой ситуации функции $f$ и $f^{-1}$ продолжаются до измеримых по Борелю взаимно обратных функций на $\mathbb{D} \cup \mathcal{F}(f)$ и $G \cup \partial_a G$ соответственно, где символом $\mathcal{F}(f)$ обозначено множество всех точек из $\mathbb{T}$, в которых существуют угловые предельные значения функции $f$ (множества $\mathcal{F}(f)$ и $\partial_a G$ являются борелевскими). Наконец, для любой функции $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ определена мера $f(\varphi\, dz|_{\mathbb{T}})$, причем $f(\varphi\, dz|_{\mathbb{T}}) = (\varphi \circ f^{-1})\,\omega$, где $\omega = f(dz|_{\mathbb{T}})$ — комплексная гармоническая мера на $\partial G$.

В докладе планируется также обсудить общую задачу об описании $p$-плохо приближаемых функций, $1 \leqslant p < \infty$, т.е. таких функций класса $L^p$ на единичной окружности, для которых наилучшим приближением функциями класса Харди $H^p$ является нулевая функция. В частном случае, когда функция $\widehat{\eta}$ является $1$-плохо приближаемой, формула (1) для аналитического выметания меры приобретает наиболее простой и естественный вид: $\nu = \dfrac{1}{2i}(\widehat{\eta} \circ f^{-1})\,\omega$. В связи с этим представляет интерес следующее утверждение: *Функция* $h^* = 0$ *является* (*единственным*) *решением задачи* (2) *в том и только том случае, когда мера* $\mu$ *— это конечная сумма точечных мер, носителем одной из которых является точка* $f(0)$.

## Список литературы

[1] E. Abakumov, K. Fedorovskiy, Analytic balayage of measures, Carathéodory domains, and badly approximable functions in $L^p$, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 356:8 (2018), 870–874.

[2] К. Ю. Федоровский, Множества Каратеодори и аналитическое выметание мер, Матем. сб., 209:9 (2018), в печати.

[3] D. Khavinson, F. and M. Riesz theorem, analytic balayage, and problems in rational approximation, Constr. Approx., 4:4 (1988), 341–356.

[4] J. J. Carmona, K. Yu. Fedorovskiy, Conformal maps and uniform approximation by polyanalytic functions, Selected topics in complex analysis, Oper. Theory Adv. Appl., 158, Birkhäuser, Basel, 2005, 109–130.

## О голоморфном продолжении функций в торических многообразиях

**С. В. Феклистов, А. В. Щуплев**

*Институт математики и фундаментальной информатики СФУ*

E-mail: feclistov.sergei@yandex.ru, alexey.shchuplev@gmail.com

Пусть $X$ – связное комплексное многообразие. Будем говорить, что $X$ допускает феномен Гартогса, если для любого компактного множества $K \subset X$, такого что $X \setminus K$ связно, любая голоморфная функция на $X \setminus K$ голоморфно продолжается на $X$. Мы рассматриваем это явление для гладких торических многообразий, и его связь с веерами, которые задают это многообразие.

В своей диссертации М. Марциняк [1] получила условие для феномена Гартогса в гладких торических поверхностях в терминах выпуклости соответствующего веера и сформулировала гипотезу для торических многообразий произвольной размерности.

Пусть $\Sigma$ – веер в $\mathbb{R}^n$, кодирующий гладкое торическое многообразие $X_\Sigma$. Связную компоненту дополнения $\mathbb{R}^n \setminus |\Sigma|$ будем называть вогнутой, если она не является выпуклым множеством и содержит гиперплоскость.

**Теорема.** *Если дополнение веера $\Sigma$ содержит по крайней мере одну вогнутую связную компоненту, то $X_\Sigma$ допускает феномен Гартогса.*

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006).

## Список литературы

[1] M. A. Marciniak, Holomorphic extensions in toric varieties, Doctoral dissertation, Missouri University of Science and Technology, 2009.

## О разрешимости некоторых нелинейных задач, возникающих в теории географического распространения эпидемий

**А. Х. Хачатрян**
*Институт математики НАН РА*
E-mail: aghavard59@mail.ru

В работе рассматриваются различные модели, описывающие распространение эпидемии. В рамках этих моделей задачи сводятся к изучению нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Особое внимание было уделено на пространственно-временной модели, основанной на модели Диекмана с учетом выздоровления, рождения и смертности популяции людей. Указанная задача сводится к следующему нелинейному интегральному уравнению:

$$u(t,x)=\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(u(t-\tau,y))S_0(y)H(\tau)V(x-y)dyd\tau+g(t,u,x)+f(t,x), \tag{1}$$

где

$$G(u)=1-e^{-u}, \tag{2}$$

$$f(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^t J_0(y)H(\tau)V(x-y)d\tau dy, \tag{3}$$

$$g(t,u,x)=\int\limits_0^t \frac{\chi(\tau,x)+a(\tau,x)}{S_0(x)}[e^{u(\tau,x)}-S_0(x)]d\tau. \qquad (4)$$

Здесь $S_0$ и $J_0$ -число восприимчивых и инфицированных людей соответственно в начальный момент времени.

Функция $H(\tau)V(x-y)$ описывает инфекцию в точке $x$, обусловленную инфицированным человеком, который был заражен болезнью $\tau$ время назад в точке $y$.

$$V(x)\geq 0; \quad H(\tau)\geq 0; \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} V(x)dx=1; \quad \int\limits_0^{\infty} H(\tau)d\tau<+\infty. \qquad (5)$$

$\chi(t,x)$–скорость рождаемости и смертности, $a(t,x)$– скорость, с которой инфицированные становятся восприимчивыми. При наличии порогового условия доказывается теорема существования положительного ограниченного и монотонно возрастающего по времени решения для нелинейного интегрального уравнения (1). Найдены асимптотическое поведение, как по координате, так и по времени, а также двусторонняя оценка для построенного решения. Доказанные теоремы носят конструктивный характер. В конце работы рассмотрены отдельные частные случаи уравнения (1).

# О некоторых классах нелинейных интегральных уравнений в теории географического распространения эпидемии

**Х. А. Хачатрян**
*Институт математики НАН РА*
E-mail: Khach82@rambler.ru

Доклад посвящен вопросу построения нетривиальных решений для следующего класса многомерных интегральных уравнений на $(-\infty, T] \times \mathbb{R}^n$ :

$$u(t,\mathsf{x}) = \int\limits_0^\infty H(\tau) \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(u(t-\tau,\mathsf{y}))\lambda(\mathsf{x},\mathsf{y})V(\mathsf{x}-\mathsf{y})d\mathsf{y}d\tau, \tag{1}$$
$$-\infty < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

относительно искомой функции $u(t,\mathsf{x})$.

Уравнением (1) описывается географическое распространение эпидемии в пространстве и по времени, где $S(t,\mathsf{x}) = S_0 e^{-u(t,\mathsf{x})}$ ($S_0 = const$) — плотность восприимчивых лиц в момент времени $t$ в точке $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n$ (см. [1]-[2]) (в реальных ситуациях $n = 2$ или $n = 3$).

Функция $A(\tau,\mathsf{x},\mathsf{y}) := H(\tau)\lambda(\mathsf{x},\mathsf{y})V(\mathsf{x}-\mathsf{y})$ имеет вероятностный смысл: $A(\tau,\mathsf{x},\mathsf{y})d\tau d\mathsf{y}$ представляет собой вероятность того, что восприимчивый человек в точке x приобретает инфекцию от инфицированных лиц, находящихся в интервале $(\mathsf{y},\mathsf{y}+d\mathsf{y})$ и зараженных $d\tau$ времени назад.

В уравнении (1) ядра $H,\lambda$ и $V$ удовлетворяют следующим основным условиям:

**I)** $H(\tau) \geq 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^+ := [0,+\infty), \quad \int\limits_0^\infty H(\tau)d\tau = 1,$

**II)** $0 \leq \lambda(\mathsf{x},\mathsf{y}) \leq 1, \quad (\mathsf{x},\mathsf{y}) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \lambda \in C(\mathbb{R}^{2n}),$

**III)** $V(\mathsf{x}) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} V(\mathsf{x})d\mathsf{x} = 1.$

При определенных условиях на функцию $g$ и при дополнительных ограничениях на $\lambda$ и $V$ доказываются конструктивные теоремы существования монотонных и ограниченных решений.

Из доказанных результатов, как частный случай, получается теорема О. Диекмана из работы [1].

Основные результаты данного доклада приняты к печати в журнале "Труды МИАН"(см. [3]).

В реальных задачах распространения эпидемий полученные математические результаты в терминах их приложения имеют следующий смысл:

- согласно результатам теоремы 1 (из работы [3]) число восприимчивых лиц $S(t, \mathrm{x})$ по времени уменьшается, что, в свою очередь, означает дальнейшее развитие эпидемии;
- из результатов теорем 2 и 4 (см. [3]) вытекает, что искомая функция зависит от x. Последнее означает, что сквозь население распространяется бегущая (эпидемическая) волна;
- наконец, теорему 3 (см. [3]) можно интерпретировать следующим образом: эпидемия в одну сторону развивается, а в другую сторону постоянно угасает.

## Список литературы


[1] O. Diekmann, Thresholds and Travelling Waves for the Geographical Spread of Infection, Journal of Math. Biology, 1978, 6, 109-130.

[2] O. Diekmann, Limiting behaviour in an epidemic model, Journal of Non. Anal.- Theory Math. Appl., 1977, 1, 459-470.

[3] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, О разрешимости некоторых нелинейных интегральных уравнений в задачах распространения эпидемии, Труды МИАН, 2019, 304 (в печати).

# О разрешимости одного класса нелинейных уравнений с матрицами Теплица

**Х. А. Хачатрян**[1], **С. М. Андриян**[2]

[1] *Институт математики НАН РА,*

E-mail: Khach82@rambler.ru

[2] *Национальный аграрный университет Армении*

E-mail: smandriyan@hotmail.com

Доклад посвящен вопросам исследования и построения нетривиальных (непостоянных) решений граничных задач для некоторых классов дискретных матричных уравнений.

Сначала рассматривается граничная задача для нелинейного матричного уравнения вида:

$$cX^3 + (1-c)X = AXB \tag{1}$$

относительно матрицы $X = (x_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ при условии

$$\lim_{|m|\to\infty}\lim_{|n|\to\infty} x_{mn} = \lim_{|n|\to\infty}\lim_{|m|\to\infty} x_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{если } m\cdot n \geq 0, \\ -1, & \text{если } m\cdot n < 0 \end{cases}$$

где $A = (a^*_{mi})^{\infty}_{m,i=-\infty}$ и $B = \left(b^*_{jn}\right)^{\infty}_{n,j=-\infty}$ — матрицы Теплица с элементами

$$a^*_{mi} := a_{m-i}, \quad (m,i\in\mathbb{Z}) \quad \text{и} \quad b^*_{jn} := b_{n-j}, \quad (n,j\in\mathbb{Z})$$

соответственно, $c\in(0,1]$ — числовой параметр. При этом предполагается, что числовые последовательности $\{a_k\}^{+\infty}_{k=-\infty}$ и $\{b_s\}^{+\infty}_{s=-\infty}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$a_k, b_s > 0 \;\; \forall k,s\in\mathbb{Z}; \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = 1, \; \sum_{s=-\infty}^{+\infty} b_s = 1; \tag{2a}$$

$$a_{-k} = a_k,\; b_{-s} = b_s \;\; \forall k,s\in\mathbb{N}; \quad a_k,\; b_s \downarrow \text{на}\, \mathbb{Z}^+ \equiv \mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{2b}$$

Далее при определенных условиях рассматриваются граничные задачи

- для соответствующего неоднородного матричного уравнения:

$$cW^3 + (1-c)W = V + AWB, \tag{3}$$

- для уравнений с некоторыми более общими случаями нелинейности:

$$Q(\tilde{X}) = A\tilde{X}B \tag{4}$$

Интерес к задаче о построении классического вещественного решения рассматриваемой задачи связан с возможными применениями в дискретных задачах в $p$-адической теории струн, в космологии и в других областях естествознания (см. (1)–(4)).

Для рассматриваемых задач доказаны теоремы существования бесконечных матриц (решений) с монотонно возрастающими и ограниченными элементами на всей целочисленной решетке $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, причем для последней задачи (следовательно, и для первой, как ее обобщающей) решения образуют двухпараметрическое семейство. При некоторых дополнительных условиях на заданные матрицы и на функцию $Q$ для соответствующих задач устанавливается асимптотическое поведение элементов построенных матриц (решений) при бесконечном удалении и по строкам, и по столбцам.

Полученные результаты могут иметь также прикладной интерес при исследовании соответствующего непрерывного аналога как двумерного, так и одномерного.

## Список литературы

[1] Л. В. Жуковская, Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн, ТМФ, 146:3 (2006), 402–409.

[2] В. С. Владимиров, О нелинейном уравнении $p$-адической открытой струны для скалярного поля. УМН, 60:6(366) (2005), 73–88.

[3] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, О нелинейном уравнении динамики в теории pp-адической струны. ТМФ, 138:3 (2004), 355–368.

[4] Х. А. Хачатрян, О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории $p$-адической струны. Изв. РАН. Сер. матем., 2018, т. 82, 2.

## Нелинейные функционалы, сохраняющие нормальное распределение, и их асимптотическая нормальность

**Л. А. Хачатрян**
*Институт математики НАН РА*
E-mail: linda@instmath.sci.am

Предельные теоремы для сумм случайных величин играют важную роль во многих прикладных задачах, в частности, в задачах математической статистической физики (вопросы эквивалентности ансамблей, получение асимптотических формул для расчета значений термодинамических функций, изучение асимптотического поведения суммарных спинов и т.д.). В этой связи проблема расширения области применимости предельных теорем является весьма актуальной.

Хорошо известно, что теория предельных теорем для сумм независимых случайных величин является практически завершенной теорией. Однако условие независимости случайных слагаемых не является необходимым, и отказ от него приводит к возможности распространения этой теории на совокупности зависимых случайных величин (случайныt процессы с перемешиванием, мартингалы и др.). Существует и другое направление исследований, а именно, установление асимптотической нормальности для последовательностей нелинейных функционалов от случайных величин.

В докладе рассматривается вопрос о распространении справедливости центральной пределеьной теоремы на нелинейные функционалы от независимых случайных величин. Прежде всего, будет представлен достаточно широкий класс нелинейных функционалов, сохраняющих нормальное распределение, т.е. таких функционалов, которые, будучи применены к независимым нормально распределенным случайным величинам, также имеют нормальное (гауссовское) распределение. Кроме того, будут указаны условия, при которых последовательность таких функционалов от независимых, но не обязательно гауссовских случайных величин, является асимптотически нормальной.

Работа выполнена совместно с Б. С. Нахапетяном, Институт Математики НАН РА, Армения.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении

Российско-Армянский университет

# Седьмое Российско-Армянское совещание

по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам

Посвящается 75–летию
Национальной Академии Наук Армении

## Тезисы докладов

Изд. заказ № 881
Сдано в производство 31.08.2018 г.
Формат $60 \times 84^1/_{16}$. $6$ печ. листов.
Тираж 100 экз.
Типография издательства “Гитутюн” НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24.